

УДК 537.311: [57+61]

## **ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

**А.Л. Зуев<sup>1,2</sup>, А.И. Судаков<sup>1</sup>, Н.В. Шакиров<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: shakirov@icmm.ru

<sup>2</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

**Аннотация.** Для математической обработки биоимпедансных измерений используются эквивалентные схемы замещения различной степени сложности. Значения параметров, входящих в электрические модели, определяются неоднозначно. Они чаще всего находятся из условия минимума квадратичного отклонения измеренной величины от нелинейной аппроксимирующей. В настоящей работе обсуждаются известные четырех- и пятиэлементные эквивалентные схемы замещения биологических объектов. Используя правила расчета электрических цепей параллельного и последовательного соединений активных и реактивных элементов, выводятся формулы для импедансов моделей Фойхта, Максвелла и лестничной. Обсуждается задача установления условий тождественности для трех пятиэлементных моделей, состоящих из трех резисторов и двух конденсаторов. Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений с пятью неизвестными. Считая параметры одной модели известными, решая систему из пяти уравнений, находят неизвестные параметры второй модели. Приводятся аналитические выражения, устанавливающие соответствие между моделями. Как частные случаи из полученных в работе соотношений вытекают известные условия тождественности для четырех- и трехэлементных моделей. В тех случаях, когда кривая зависимости модуля импеданса имеет асимптоты при частоте, стремящейся к нулю и бесконечности, можно рекомендовать аппроксимацию экспериментальных результатов проводить с использованием модели Фойхта. А затем находить параметры других моделей из условий тождественности. Если спектральная характеристика модуля импеданса имеет асимптоту при частоте, стремящейся к нулю, то рациональнее находить параметры, входящие в модель Максвелла или лестничную модель. В том случае, когда времена релаксации исследуемой модели отличаются на порядки, аппроксимацию экспериментальных данных проще осуществлять, используя модель Фойхта.

**Ключевые слова:** электрический импеданс, биоимпедансные измерения, эквивалентные схемы замещения, четырех- и пятиэлементные модели, условия тождественности, реография.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Биоимпедансные измерения используются в различных сферах медицины для оценки состояния клеточного гомеостаза [1] и показателей крови [8, 21]. Эти измерения применяются для наблюдения за состоянием биологических мембран и межклеточного пространства. На основании контурного анализа нативной реограммы

---

© Зуев А.Л., Судаков А.И., Шакиров Н.В., 2014

Зуев Андрей Леонидович, д.ф.-м.н., с.н.с. ИМСС УрО РАН, Пермь

Судаков Андрей Иванович, с.н.с. ИМСС УрО РАН, Пермь

Шакиров Нагим Вагизович, с.н.с. ИМСС УрО РАН, Пермь

определялись амплитудно-временные показатели: максимальная амплитуда реограммы систолической и диастолической частей пульсовой волны, амплитуды дикротического зубца и диффреограммы. Рассчитывались гемодинамические показатели: время изгнания крови из сердца, минутный объем кровообращения, время распространения пульсовой волны [10, 12, 14]. Биоимпедансный анализ широко используется для определения объемов общей, внеклеточной и внутриклеточной жидкости. Количественная оценка объемов жидких фракций тела человека позволяет контролировать баланс жидкостей организма [10, 14]. Биоимпедансный подход позволяет вычислить вязкость крови и количество красных кровяных телец в ней с высокой степенью достоверности [8, 20, 21]. В работе [20] с использованием результатов экспериментальных исследований, проведенных с помощью аппарата искусственного кровообращения, выведены количественные соотношения между вязкостью крови и электрическим импедансом с учетом температуры и гематокрита. Установлена высокая корреляция.

Для описания вязкоупругого поведения биологических объектов часто используются механические (реологические) модели, состоящие из пружин и демпферов, которые являются механическими аналогами твердого гукковского тела и ньютоновской жидкости соответственно [2, 6, 7]. Исследователь оставляет свой выбор на той или иной модели в силу различных причин. Качественное поведение вязкоупругой среды можно также описать, привлекая электрическую аналогию, в которой конденсатор является электрическим аналогом твердого гукковского тела, а резистор – аналогом ньютоновской жидкости [7]. Это позволяет моделировать сосудистые сети с учетом ветвлений и различных особенностей кровоснабжения [5, 9]. Гидравлическим моделям сосудистого русла ставится в соответствие электромеханическая аналогия. В [9] показана возможность количественной оценки значений сопротивлений, коэффициентов растяжимости отдельных участков физических моделей сосудистого русла по величине импеданса модели.

На ранней стадии метод реографии развивался в основном как чисто эмпирический способ качественной оценки биологического объекта. В частности, электрические свойства крови моделировали трехэлементной эквивалентной схемой замещения. Позднее для количественного описания гетерогенных систем стали применяться модели, содержащие большее число элементов, а также переменные элементы. Возможности идентификации эквивалентных схем замещения и способы расчета частотно-независимых элементов этих схем обсуждаются в [3, 13, 16, 18, 19]. Отмечается, что для многих сложных эквивалентных схем еще не разработаны методы расчета составляющих; сравниваются достоинства и недостатки математических и графических способов анализа электрических свойств разных сред.

Биологические ткани сложны и гетерогенны, поэтому они существенно различаются по электропроводным и диэлектрическим свойствам. Это обуславливает трудности экспериментального измерения и математического описания электрического сопротивления биологических тканей. Импедансы многих биологических объектов удовлетворительно описываются четырех- или пятиэлементными эквивалентными схемами [10, 14, 15, 18]. Построение эквивалентной схемы исследуемого объекта является важным этапом его изучения. Достоверность реографических формул, устанавливающих количественную связь между характеристиками реограммы и гемодинамическими параметрами, существенно зависит от соответствия электрофизической модели реальному объекту.

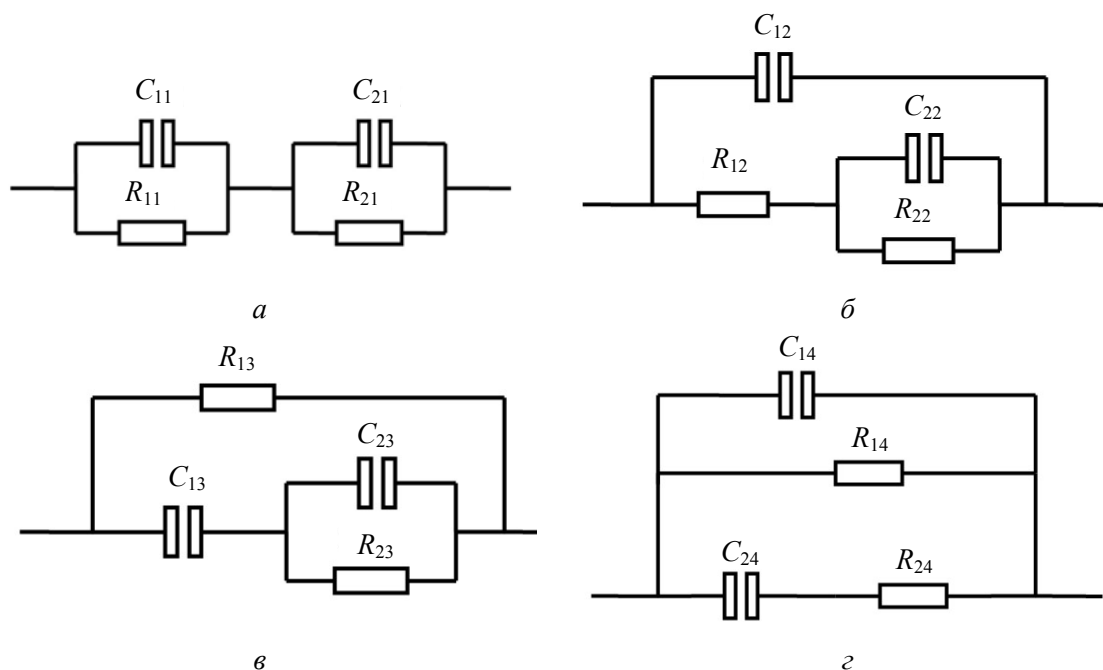


Рис. 1. Четырехэлементные эквивалентные электрические модели

Для математического моделирования экспериментальных результатов импедансной спектроскопии конкретного объекта часто привлекают модели, состоящие из одинакового количества элементов, но отличающиеся своими номиналами и вариантами их соединения. При этом оказывается, что отклонения расчетных реограмм от экспериментальных незначительны. В [11] отмечается, что теоретическими методами исследования частотной зависимости импеданса невозможно провести идентификацию схем замещения, состоящих из одинакового числа однородных элементов. Каждой схеме замещения, включающей три элемента или более, может быть поставлена в соответствие другая схема, имеющая то же количество элементов, но отличающаяся от первоначальной типом соединений элементов и их номиналов. Выбор конкретной схемы определяется физическими и химическими процессами, протекающими в среде и области контакта электродов и тканей, и удобством интерпретации полученных опытных данных.

В [11, 16] выведены условия тождественности некоторых часто используемых трех- и четырехэлементных схем замещения, состоящих из резисторов и конденсаторов. В [17] анализируются четыре схемы, представленные на рис. 1, и приводятся условия тождественности этих моделей. Все схемы на этом рисунке характеризуются тем, что при зондирующей частоте, стремящейся к бесконечности, величина импеданса стремится к нулю. Биологические же объекты обладают конечным активным сопротивлением даже при достаточно большой зондирующей частоте. Для удовлетворительного описания электрических свойств биологических тканей необходимо модели, показанные на рис. 1, дополнить последовательно подключенным активным сопротивлением. В настоящей работе выводятся условия тождественности пятиэлементных схем замещения.

### ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

В работе [15] для расчета спектральных характеристик легочной ткани человека (рис. 2) использовалась пятиэлементная модель, представленная на рис. 3. Модели такого типа, когда элементы или блоки соединяются последовательно, получили название модели Фойхта (*Voigt*). В [4] приводятся параметры пятиэлементной модели

максвелловского (*Maxwell*) типа, которая также хорошо аппроксимирует экспериментальные результаты, приведенные на рис. 2. В настоящей работе выведены условия тождественности моделей Фойхта, Максвелла и ленточной (*Ladder*), показанных на рис. 3–5.

Используя правила расчета электрических цепей параллельного и последовательного соединений активных и реактивных элементов для схем замещения, приведенных на рис. 3–5, получим следующие выражения для импеданса:

$$Z_V = \frac{R_\infty + R_3 + R_4 - R_\infty R_3 R_4 C_3 C_4 \omega^2 + j\omega [R_\infty (R_3 C_3 + R_4 C_4) + R_3 R_4 (C_3 + C_4)]}{1 - R_3 R_4 C_3 C_4 \omega^2 + j\omega (R_3 C_3 + R_4 C_4)}, \quad (1)$$

$$Z_L = \frac{R_0 \{1 - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 + j\omega [R_2 C_1 + R_1 C_1 + R_2 C_2]\}}{1 - (R_0 + R_1) R_2 C_1 C_2 \omega^2 + j\omega [(R_0 + R_1 + R_2) C_1 + R_2 C_2]}, \quad (2)$$

$$Z_M = \frac{R_0 - R_0 R_5 R_6 C_5 C_6 \omega^2 + j\omega R_0 (R_5 C_5 + R_6 C_6)}{1 - (R_0 + R_5) R_6 C_5 C_6 \omega^2 - R_0 R_5 C_5 C_6 \omega^2 + j[(R_0 + R_5) C_5 + (R_0 + R_6) C_6]}, \quad (3)$$

где  $j$  – мнимая единица;  $\omega$  – зондирующая частота.

Импедансы моделей будут совпадать при любых частотах в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$  будут равны между собой, т.е. для того чтобы спектральные характеристики, описываемые, например, уравнениями (1, 2), были тождественны, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_\infty + R_3 + R_4, & R_0 R_1 R_2 C_1 C_2 &= R_\infty R_3 R_4 C_3 C_4, \\ (R_0 + R_1) R_2 C_1 C_2 &= R_3 R_4 C_3 C_4, & (R_0 + R_1 + R_2) C_1 + R_2 C_2 &= R_3 C_3 + R_4 C_4, \\ R_0 C_1 (R_1 + R_2) + R_0 R_2 C_2 &= R_\infty (R_3 C_3 + R_4 C_4) + R_3 R_4 (C_3 + C_4). \end{aligned} \quad (4)$$

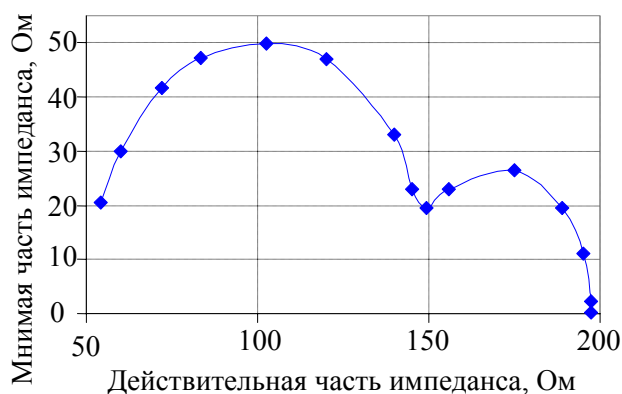


Рис. 2. Диаграмма Найквиста легочной ткани человека

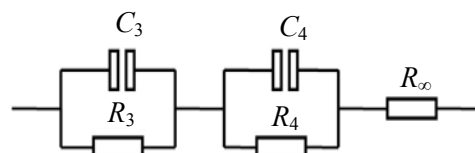


Рис. 3. Пятиэлементная модель Фойхта

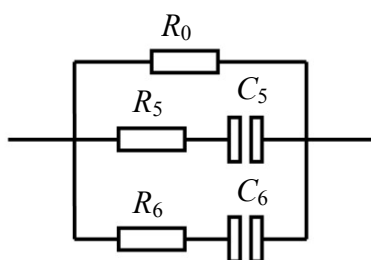


Рис. 4. Пятиэлементная модель Максвелла

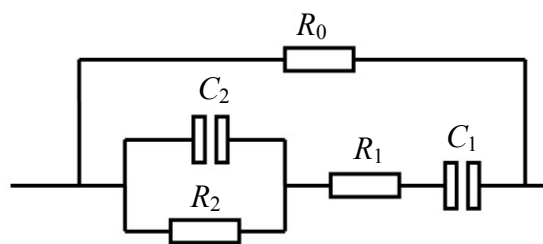


Рис. 5. Пятиэлементная ленточная модель

Считая параметры первой модели неизвестными, решая вышеприведенную систему пяти уравнений с пятью неизвестными, находим соотношения между элементами, обеспечивающие условие тождественности рассматриваемых электрических моделей:

$$R_0 = R_\infty + R_3 + R_4, R_1 = \frac{R_0 R_\infty}{R_3 + R_4}, R_2 = \frac{R_0^2 R_3 R_4 (R_3 C_3 - R_4 C_4)^2}{(R_3^2 C_3 - R_4^2 C_4)^2 (R_3 + R_4)},$$

$$C_1 = \frac{R_3^2 C_3 + R_4^2 C_4}{R_0^2}, C_2 = \frac{C_3 C_4 (R_3 + R_4)^2 (R_3^2 C_3 - R_4^2 C_4)}{R_0^2 (R_3 C_3 - R_4 C_4)^2}. \quad (5)$$

Аналогичным образом, сопоставляя спектральные характеристики моделей, представленных на рис. 4 и рис. 5, выводим необходимое условие тождественности этих моделей:

$$C_1 = C_5 + C_6, C_2 = \frac{C_5 C_6 (C_5 + C_6) (R_5 + R_6)^2}{(R_5 C_5 - R_6 C_6)^2}, R_1 = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}, R_2 = \frac{(R_5 C_5 - R_6 C_6)^2}{(R_5 + R_6) (C_5 + C_6)^2}. \quad (6)$$

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Если принять  $R_\infty = 0$ , то пятиэлементная модель Фойхта вырождается в четырехэлементную, представленную на рис. 1, а. Из полученных выше соотношений (5) следует, что  $R_1 = 0$ , т.е. данная модель вырождается в четырехэлементную, представленную на рис. 1, в. Условие тождественности (5) совпадает с условием тождественности, полученным в работе [17] для моделей «а» и «в», показанных на рис. 1.

Если  $R_3 C_3 = R_4 C_4$ , то из формул (5) и рис. 3 и 5 следует, что пятиэлементные модели вырождаются в трехэлементные, которые будут также тождественны.

Полагая в модели Максвелла сопротивление  $R_6 = 0$ , получаем модель, представленную на рис. 1, г. Пятиэлементные модели, показанные на рис. 3–5, хорошо описывают весьма сложные спектральные характеристики биологических объектов. На рис. 2 приведены результаты аппроксимации экспериментальных данных, взятых из работы [17]. Сплошная линия соответствует расчетам, выполненным по формулам (2) и (3), в которых параметры принимали следующие значения:  $R_0 = 197,4$  Ом;  $R_1 = 66,6$  Ом;  $R_2 = 460,9$  Ом;  $R_3 = 74,6$  Ом;  $R_4 = 609$  Ом;  $C_1 = 95$  нф;  $C_2 = 9,1$  нф;  $C_3 = 6,6$  нф;  $C_4 = 88$  нф.

Из рис. 2 видно, что диаграмма Найквиста образована пересечением двух полуокружностей различного радиуса. Это указывает на то, что времена релаксации рассматриваемых пятиэлементных моделей отличаются значительно. Для моделей Фойхта (см. рис. 3) времена релаксации легко вычисляются. Они равны произведениям сопротивлений на соответствующие емкости:

$$\lambda_1 = R_3 C_3 = 71,57 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_2 = R_4 C_4 = 1,44 \cdot 10^{-6}.$$

Формулы для вычисления  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в других моделях имеют более громоздкий вид.

## Выводы

Сформулированы условия тождественности для трех пятипараметрических электрических эквивалентных схем замещения, состоящих из трех резисторов и двух конденсаторов. Как частные случаи из полученных условий тождественности пятиэлементных схем вытекают условия тождественности четырех- и трехэлементных моделей.

В тех случаях, когда кривая зависимости модуля импеданса от частоты имеет асимптоты при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ , можно рекомендовать аппроксимацию экспериментальных результатов проводить с использованием модели Фойхта. А затем находить параметры других моделей из условий тождественности. Если частотная зависимость модуля импеданса имеет асимптоту при  $\omega \rightarrow 0$ , то рациональнее находить параметры, входящие в модель Максвелла или ленточную модель.

В том случае, когда времена релаксации исследуемой модели отличаются на порядки, аппроксимацию экспериментальных данных проще осуществлять, используя модель Фойхта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсуков А.В., Храмцов М.М., Мамошин А.В., Перегонцева О.С., Костюкова Ю.В. Двухкомпонентная малоинвазивная биоимпедансометрия при заболеваниях панкреатодуоденальной зоны (*in vivo* и *in vitro*): новые диагностические возможности для врача-клинициста // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия: Естественно-техническая и медицинская науки. – 2012. – № 1. – С. 202–206.
2. Бранков Г. Основы биомеханики. – М.: Мир, 1981. – 254 с.
3. Егоров Л.Я., Новосельский И.М. Унификация методов анализа и расчета эквивалентных схем импеданса электрода // Электрохимия. – 1969. – № 3. – С. 274–283.
4. Зуев А.Л., Мишланов В.Ю., Судаков А.И., Шакиров Н.В., Фролов А.В. Эквивалентные электрические модели биологических объектов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 1. – С. 110–120.
5. Кизилова Н.Н. Конспект лекций по курсу «Биомеханика». – Харьков: ХТУРЭ, 1999. – 108 с.
6. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрин Н.Х. Реология крови. – М.: Медицина, 1982. – 270 с.
7. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. – СПб.: Профессия, 2007. – 558 с.
8. Мельников А.А., Малахов М.В., Николаев Д.В., Смирнов А.В. Возможности биоимпедансной спектроскопии для исследования крови // Материалы 14-й научно-практической конференции «Диагностика и лечение нарушений регуляции сердечно-сосудистой системы». – 2012. – № 14. – С. 155–162.
9. Наумов А.Ю., Балашов С.А., Мелькумянц А.Н. О применимости метода входного импеданса для анализа состояния внутриорганных артериальных сетей // Современные проблемы биомеханики. – 2006. – Вып. 11. – С. 79–93.
10. Николаев Д.В., Смирнов А.В., Бобринская И.Г., Руднев С.Г. Биоимпедансный анализ состава тела. – М.: Наука, 2009. – 404 с.
11. Новосельский И.М., Гудина Н.Н., Фетисов Ю.И. О тождественных эквивалентных схемах замещения импеданса // Электрохимия. – 1972. – № 4. – С. 565–567.
12. Соколова И.В., Ронкин И.М., Максименко И.М. Основы пульсовой гемодинамики. – М.: Самшит, 2007. – 172 с.
13. Попечителев Е.П., Филист С.А. Способы и модели идентификации биоматериалов на основе анализа многочастотного импеданса // Известия Юго-западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2011. – № 1. – С. 74–80.
14. Цветков А.А. Биоимпедансные методы контроля системной гемодинамики. – М.: Слова, 2010. – 330 с.
15. Ackmann J.J. Complex bioelectric impedance measurement system for the frequency range from 5 Hz to 1 MHz // Annals of Biomedical Engineering. – 1993. – Vol. 21 – P. 135–146.
16. Barsoukov E., Macdonald J.R. Impedance bioimpedance spectroscopy theory, experiment, and applications. 2 ed. – New Jersey: Wiley-Interscience, 2005. – 595 p.

17. Diard J.P., Gorrec B.L., Montella C. Handbook of electrochemical impedance spectroscopy [Электронный ресурс]. – 2011. – 29 p. – URL: [www.bio-logic.info/assets/handbook%20of%20EIS/20110929%20-%20RLC.pdf](http://www.bio-logic.info/assets/handbook%20of%20EIS/20110929%20-%20RLC.pdf) (дата обращения: 12.04.2014).
18. Grimnes S., Martinsen O.G. Bioimpedance and bioelectricity basics. Second edition. – Amsterdam: Elsevier Science & Technology Books, 2008. – 471 p.
19. MacDonald J.R. Impedance spectroscopy // Annals of Biomedical Engineering. – 1992. – Vol. 20. – P. 289–305.
20. Pop G.A.M., de Backer T.L.M. On-line electrical impedance measurement for monitoring blood viscosity during on-pump heart surgery // European Surgical Research. – 2004. – № 3. – P. 259–265.
21. Zhao T.X., Jacobson B. Quantitative correlations among fibrinogen concentration, sedimentation rate and electrical impedance of blood // Medical & Biological Engineering & Computing. – 1997. – № 5. – P. 181–184.

## IDENTICAL ELECTRICAL MODELS OF BIOLOGICAL OBJECTS

**A.L. Zuev, A.I. Sudakov, N.V. Shakirov (Perm, Russia)**

Complex equivalent circuits are commonly used in the mathematical treatment of bioimpedance measurements. Parameter values for electrical models are determined differently because they are often found on condition that the squared deviation of the measured value from the nonlinear approximate value is minimal. In the present paper, we consider the known four- and five-element equivalent circuits for modelling biological objects. To obtain the impedance relations of Voigt, Maxwell and ladder models, we use the rules for calculating electrical circuits with active and reactive elements connected in parallel and series. Determination of identity conditions for three five-parameter electrical equivalent circuits consisting of three resistors and two capacitors is discussed. The problem is reduced to the solution of a system of nonlinear equation with five unknowns. Assuming that the parameters of the first model are the unknown parameters and solving the above system of five equations, we find the unknown parameters for the second model. Analytical expressions which establish correspondence between the models are given. The identity conditions for four- and three-element models are derived from the obtained relations as particular cases. It has been found that in the case when the curve of impedance modulus has asymptotes at frequency tending to zero and infinity, it is best to apply the Voigt model for approximating the experimental results. Other model parameters can be determined by analyzing identity conditions. If the spectral impedance modulus curve has an asymptote at frequency tending to zero, then it is reasonable to determine parameters that enter into the Maxwell or ladder models. When the relaxation times of the examined model differ by orders of magnitude, the approximation of the experimental data is easier to implement using the Voigt model.

**Key words:** electrical impedance, bioimpedance measurements, equivalent circuits, identical models, four- and five-element models, identity conditions, rheography.

*Получено 15 мая 2014*