

DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.02

УДК 534.1

**А.Н. Данилин<sup>1,2</sup>, Е.Л. Кузнецова<sup>2</sup>, Л.Н. Рабинский<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

## **МОДЕЛЬ ГИСТЕРЕЗИСА ЭНЕРГОРАССЕЯНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рассматривается феноменологический подход для описания гистерезиса энергорассеяния при нестационарных колебаниях механических систем. Механическая система трактуется как «черный ящик» с известными соотношениями между внешними воздействиями и наблюдаемыми реакциями. Конструируется математическая модель гистерезиса, идентификация параметров которой проводится с использованием экспериментальных данных для стационарных колебаний системы.

Для описания гистерезиса предлагается дифференциальный подход, названный кинематическим, согласно которому силовые и кинематические параметры связываются специальным дифференциальным уравнением первого порядка, его правая часть подбирается из класса функций, обеспечивающих асимптотическое приближение решения к кривым предельного гистерезисного цикла. Предельный цикл образуется кривыми прямого и обратного процессов (процессов нагрузки-разгрузки), которые строятся по экспериментальным данным для максимально возможных или допустимых интервалов изменения параметров в условиях установившихся колебаний. Коэффициенты в правой части определяются по экспериментальным данным для предельного гистерезисного цикла. Для этого строится аппроксимация кривых предельного цикла с использованием методов минимизации невязки аналитического представления к множеству экспериментальных точек. Предлагаемый метод позволяет одним дифференциальным уравнением описать траекторию гистерезиса с произвольной точкой старта внутри области предельного цикла.

В качестве примера рассмотрена задача о вынужденных колебаниях гасителя маятникового типа для демпфирования низкочастотных колебаний проводов воздушных линий электропередачи. Предложен алгоритм анализа эффективности энергорассеяния гасителей колебаний, позволяющей оптимизировать конструкцию гасителей на стадии проектирования.

Предлагаемый подход обладает общностью и может быть использован в расчетах нелинейного поведения различных конструкций, механизмов и систем, где необходим учет гистерезиса энергорассеяния в условиях нестационарных колебаний.

**Ключевые слова:** нестационарные колебания, гистерезис энергорассеяния, кинематический подход, предельный цикл, идентификация параметров, гасители низкочастотных колебаний

**A.N. Danilin<sup>1,2</sup>, E.L. Kuznetsova<sup>2</sup>, L.N. Rabinsky<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, Russian Federation

## **MODELLING HYSTERESIS OF ENERGY DISSIPATION AT VIBRATION OF MECHANICAL SYSTEMS**

The paper discusses a phenomenological approach to describe the energy dissipation hysteresis at nonstationary vibrations of mechanical systems. The mechanical system is considered as a "black box" with the known relationships between external factors and the observed reactions. A mathematical model is constructed for which the identification of parameters is carried out using the experimental data for steady-state vibrations of a system.

To describe the hysteresis the authors have suggested the differential approach, called kinematic one, according to which the force and kinematic parameters are associated by the special differential equation of the first order, the right part of which is selected from a class of functions that provides the asymptotic approximation of the solution to the curves of the limit hysteresis cycle. The limit cycle is formed by curves of direct and reverse processes ("loading-unloading" processes), which are based on experimental data for the maximum possible or permissible intervals of parameter changes during the steady vibrations. Coefficients in the right part are determined from experimental data for the limit hysteresis cycle. Approximation curves of the limit cycle are constructed using the methods of minimizing the discrepancy of analytical representations to the number of experimental points. The proposed approach allows (based on one differential equation) describing the trajectory of hysteresis with a random starting point within the area of the limit cycle.

As an example, the problem of forced vibrations of the pendulum-type damper for damping low-frequency vibrations is considered. The authors have considered the dampers, which are used for damping low-frequency vibrations of conductors of overhead transmission lines. The algorithm for energy dissipation analysis is suggested, allowing optimizing the damper constructions at the design stage.

The proposed approach has the generality and can be used in the modelling of nonlinear behavior of different structures, mechanisms and systems where it is necessary to take into account the energy dissipation hysteresis in conditions of nonstationary vibrations.

**Keywords:** nonstationary vibrations, energy dissipation hysteresis, kinematic approach, limit cycle, identification of parameters, damper for damping low-frequency vibrations.

### **Введение**

Гистерезис (от греч. *hysteresis* – отставание, запаздывание) свойствен нелинейным процессам, состояние которых определяется не только внешними условиями в данный момент времени, но и предысторией.

Нелинейные зависимости гистерезисного типа повсеместно возникают в различных областях естествознания и техники [1–5]. Известны: магнитный и диэлектрический гистерезис, гистерезис пластического деформирования [6, 14–17], гистерезис реологического поведения вязких сред [11–13, 18], в том числе под влиянием внешних физических полей, и т.п.

В технике существует множество типов устройств, работа которых основана на использовании свойств гистерезиса. Эти устройства широко применяются в авиационной и аэрокосмической технике, а также автомобилях, в общем машиностроении и приборостроении. Примерами гистерезисных устройств являются: фрикционные и вихре-токовые тормоза, демпферы и гасители колебаний, гистерезисные муфты для управления крутящим моментом во многих типах машин, гистерезисные электродвигатели и т.д.

Для построения математического описания гистерезиса применяются два принципиально различных подхода [1]. Первый основан на замене объекта некоторой совокупностью взаимодействующих между собой простых частей, математические описания которых хорошо известны. Этот подход типичен для задач механики, физики, химии. При втором подходе изучаемый объект трактуется как «черный ящик». В этом случае рассматриваются соотношения между воздействиями и наблюдаемыми реакциями, и на основе этого конструируются математические описания. Второй подход называется методом математической идентификации, и он типичен для задач управления сложными объектами, задач автоматического регулирования, общей теории систем, биологии и др.

В данной статье используется подход «черного ящика» для описания гистерезиса в задачах о колебаниях механических систем.

Установление зависимости, определяющей форму петли гистерезиса, выражает соответствующую гипотезу диссипации энергии. Широкое распространение получила гипотеза Фойгхта [2], в соответствии с которой рассеяние энергии зависит от частоты процесса деформирования системы. Однако для большинства конструкционных материалов, и тем более – сложных механизмов с трением, это не подтверждается экспериментально [3]. Физически обоснованными являются модель Н.Н. Давиденкова и модель гистерезиса трения без возвращающей силы [4–6], описывающие диссипацию энергии в упругопластических материалах. Подробный обзор с анализом различных моделей гистерезиса и методов идентификации его параметров для нелинейных механических колебательных систем содержится, например, в работе Н.П. Плахтиенко [7]. Здесь же описываются модели частотно независимого рассеяния энергии и анализируются двучленные аналитические выражения для характеристики восстанавливающей силы колебательной системы.

В работах [8, 9] предлагается подход, основанный на использовании данных серии типовых экспериментов по построению опорных кривых нагружения. Эти кривые используются далее в качестве своеобразной криволинейной координатной сетки, которая позволяет построить траекторию гистерезиса между кривыми нагрузки-разгрузки предельного цикла (гистерезисными кривыми цикла колебаний с максимальной амплитудой) в условиях нестационарных колебаний.

Предложенный подход может найти применение при математическом моделировании различных процессов с гистерезисом. Например, для описания процессов упругопластического деформирования и разрушения конструкционных сталей, сплавов и иных материалов при нестационарных и несимметричных циклических нагружениях [19–22]. В том числе представляет большой интерес использование подхода для математического моделирования пластического гистерезиса материалов при конечных деформациях с учетом упрочнения. В таких задачах, как известно [21, 22], модели часто демонстрируют отсутствие свойства циклической стабильности: петля пластического гистерезиса при расчетах по данным моделям даже асимптотически не сохраняет ни форму, ни размеры, ни местоположение.

В настоящее время представляют интерес задачи о нелинейных колебаниях гибких тросовых конструкций со сложной внутренней структурой, к которым относятся прежде всего провода, кабели и тросы воздушных ЛЭП. При колебаниях таких конструкций происходит диссипация энергии вследствие упругопластического взаимодействия проволочных спиралей при их взаимном трении. При этом, как показывают эксперименты, зависимости силовых факторов от соответствующих кинематических параметров имеют ярко выраженный гистерезисный характер. Учет этого эффекта в ряде задач необходим, например, при моделировании динамики гасителей колебаний, подобных демпферу Стокбриджа, или при моделировании эоловых вибраций. В таких задачах предлагаемый подход также может найти применение и оказаться эффективным [23, 24].

### **1. Модель гистерезиса**

Гистерезисные петли соседних циклов различаются из-за необратимости процессов, сопровождающихся рассеянием энергии. Аналитическое согласование гистерезисных кривых соседних циклов представ-

ляет собой непростую задачу. Такие математические модели часто оказываются не только сложными, но и весьма ограниченными для описания реальных процессов.

Известно, что при гармоническом внешнем воздействии через некоторое число циклов форма траектории гистерезиса приближается к петле, характеризующей установление (стабилизацию) динамического процесса. Начальная точка (точка «старта») каждого цикла определяется предысторией нестационарного процесса. Она может находиться в любой точке пространства изменений исследуемых параметров. Однако опыты показывают, что зависимости подобны друг другу в асимптотическом смысле, т.е. асимптотически приближаются с изменением (увеличением или уменьшением) параметра процесса к предельным гистерезисным кривым, которые строятся по экспериментальным данным для максимально возможных или допустимых интервалов изменения параметров. Скорость асимптотического сближения зависит от свойств механической системы (деформируемого тела) или устройства, где происходит процесс или производятся измерения.

Отмеченные трудности можно преодолеть, воспользовавшись дифференциальной формой описания физических связей, учитывающего диссипацию энергии при циклическом нестационарном воздействии. Предлагаемый метод позволяет одним дифференциальным уравнением описать траекторию гистерезиса с произвольной точкой старта внутри области, ограниченной предельными кривыми «нагрузки» и «разгрузки».

Подход заключается в использовании обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в виде  $df(q)/dq = R(q, f)$ , устанавливающего зависимость между параметром нагрузки  $f$  и соответствующим кинематическим параметром  $q$ . Правая часть этого уравнения  $R(q, f)$  подбирается из класса функций, обеспечивающих асимптотическое приближение решения к предельным кривым гистерезиса. В этом случае удается одним уравнением описать бесконечное множество подобных кривых, имеющих разные точки «старта», но приближающихся к предельной кривой с ростом или уменьшением аргумента в зависимости от направления процесса. Этот подход назван нами кинематическим.

Для описания гистерезиса при нестационарных колебаниях механической системы предлагается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в виде

$$\frac{df}{dq} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} q^{i-1} f^{j-1}, \quad (1)$$

где коэффициенты  $C_{ij}$  определяются методами приближения, минимизируя невязку аналитического представления  $R(q, f)$  к множеству значений  $\{df/dq\}$ , полученных из экспериментов для предельного цикла. Числа  $k$  и  $m$  подбираются в результате простых численных экспериментов. Значения этих параметров определяют характер (скорость) асимптотического приближения решения с начальной точкой  $(q_0, f_0)$  к кривым предельного цикла.

Будем считать, что в результате экспериментальных измерений получена последовательность  $m$  точек  $(q_i, f_i)$ , где  $i$  – текущий номер точки. Для построения последовательности точек  $\{q_i, (df/dq)_i\}$  можно воспользоваться конечно-разностным выражением  $(f_i - f_{i-1})/(q_i - q_{i-1})$ . Однако таким способом пользоваться нельзя, если экспериментальных точек мало или если измеряемые величины имеют сильный разброс своих значений. Однако можно предварительно получить аналитическую аппроксимацию  $f(q)$  по измеренным значениям, например, методом наименьших квадратов. Дифференцирование полученной зависимости даст искомую производную  $df/dq$ . Например, при использовании полиномиальной зависимости в виде

$$y = \sum_{j=1}^n C_j q^{j-1} \quad (2)$$

минимизация функции невязки  $F = \sum_{i=1}^m (y_i - f_i)^2$  приводит к системе  $n$  уравнений для определения  $C_j$

$$\sum_{j=1}^n C_j a_{jp} = b_p, \quad p = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где  $a_{jp} = \sum_{i=1}^m q_i^{j+p-2}$ ,  $b_p = \sum_{i=1}^m f_i q_i^{p-1}$ , причем если  $j > p$ , то  $a_{j,p} = a_{j-1,p+1} = \dots = a_{p+1,j-1} = a_{p,j}$ .

Тогда из (2) следует  $df/dq = \sum_{j=2}^n (j-1)C_j q^{j-2}$ , где  $C_j$  определяются из решения системы (3). Отсюда, полагая  $q = q_i$ , где  $i = 1, \dots, m$ , приходим к искомому множеству точек  $\{q_i, (df/dq)_i\}$ .

Далее символом  $f'_i$  будем обозначать величину  $(df/dq)_i$ . Множество этих величин может быть получено вышеописанным способом.

В соответствии с методом наименьших квадратов построим функцию невязки в виде

$$F = \sum_{l=1}^n (y_l - f'_l)^2, \quad (4)$$

где

$$y_l = R(q_l, f_l) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} q_l^{i-1} f_l^{j-1},$$

$n$  – число экспериментальных точек.

Минимизация (4) приводит к системе алгебраических уравнений относительно величин  $C_{ij}$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} a_{ijpq} = b_{pq}, \quad (5)$$

где

$$a_{ijpq} = \sum_{l=1}^n q_l^{i+p-2} f_l^{j+q-2}, \quad b_{pq} = \sum_{l=1}^n q_l^{p-1} f_l^{q-1} f'_l; \quad p = 1, \dots, k; \quad q = 1, \dots, m.$$

Систему (5) можно также свести к обычной форме записи системы линейных алгебраических уравнений. Для этого введем вектор неизвестных  $\mathbf{x}$  с элементами

$$x_{k(i-1)+p} = C_{pi} \quad (6)$$

и вектор правых частей  $\mathbf{r}$  с элементами

$$r_{k(i-1)+p} = b_{pi} = \sum_{l=1}^n q_l^{p-1} f_l^{i-1} f'_l. \quad (7)$$

Тогда вместо (5) получим

$$D\mathbf{x} = \mathbf{r}, \quad (8)$$

где элементы квадратной матрицы  $D$  имеют вид

$$d_{k(i-1)+p, k(j-1)+q} = \sum_{l=1}^n q_l^{p+q-2} f_l^{i+j-2}; \quad i, j \leq m, \quad p, q \leq k. \quad (9)$$

После определения  $C_{ij}$  из (8) с учетом обозначений (6), (7) и (9) правая часть дифференциального уравнения (1) сформирована, и его можно интегрировать любым численным методом с начальной точкой  $(q_0, f_0)$  внутри области предельного цикла.

Уравнение (1) должно быть введено в общую систему уравнений, описывающих движение механической системы. Составление таких уравнений представляет собой непростую задачу. Записываются они в дифференциальных или интегральных формулировках Эйлера или Лагранжа относительно переменных, зависящих от пространственных координат и времени.

В связи с этим использование кинематического уравнения в виде (1), где в левой части имеется производная по обобщенной координате  $q$ , вряд ли удобно. Более рациональной формой будет запись с учетом связи  $df/dq = (df/dt)(dt/dq)$ , которая позволяет переписать (1) в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{dq}{dt} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m C_{ij} q^{i-1} f^{j-1}. \quad (10)$$

Полная система разрешающих уравнений, включающая (10), является существенно нелинейной. Она может быть решена лишь с использованием различных методов дискретизации по пространственным координатам и времени.

## 2. Гистерезис гасителя низкочастотных колебаний

В качестве примера использования предложенного подхода рассмотрим вынужденные низкочастотные колебания гасителя маятникового типа. Такие гасители используются, например, для подавления и расстраивания низкочастотных колебаний проводов воздушных линий электропередачи [8, 9]. Упрощенная схема гасителя показана на рис. 1.



Основными элементами конструкции гасителя являются диски 1, 2 и 3. Диски 1 и 2 имеют общую центральную ось, позволяющую им вращаться друг относительно друга. К диску 3 крепится маятник 4. Диски 2 и 3 соединяются друг с другом через упругую вставку 6. Диск 1 скрепляется (подвешивается) с элементами конструкции, колебания которой необходимо демпфировать. Этот диск для остальной части элементов гасителя являются ведущим. Диск 2 является ведомым. Между дисками 1 и 2 помещаются элементы 5, препятствующие свободному вращению дисков относительно друг друга. Такими элементами могут быть, например, резиновые шарики, которые помещаются между дисками 1 и 2 в специальные профильные углубления (каналы). Колебания конструкции через диск 1 передаются к дискам 2 и 3. В силу инерционности маятника и эксцентриситета его центра масс (ц.м.) происходит прокручивание дисков 2 и 3 относительно диска 1. При этом происходит движение шариков по профильным каналам в дисках 1 и 2, которое сопровождается их значительным деформированием и трением о поверхности каналов, что является причиной демпфирования колебаний.

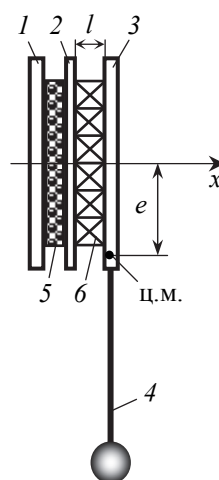


Рис. 1. Схема конструкции гасителя колебаний маятникового типа

Возможны также иные конструктивные варианты демпферных узлов гасителей маятникового типа. Например, вместо резиновых шариков можно использовать магнитореологические жидкости (МРЖ), которые при относительном вращении дисков перетекают по специальным каналам, где помещены магниты. Магнитные поля локально воздействуют на жидкость, увеличивая ее вязкость в зоне воздействия и, как следствие, увеличивая силы сопротивления течению [25].

Пусть  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  — углы поворотов соответственно ведущего и ведомого дисков, а также маятника, которые отсчитываются от вертикали в положительном направлении против часовой стрелки. Моменты, возникающие при прокручивании дисков друг относительно друга, показаны на рис. 2.

Момент  $M_1 = M_1(\varphi_2 - \varphi_1)$  порождается в результате взаимодействия ведущего 1 и ведомого 2 дисков через систему элементов демпфирования 5. Момент  $M_2$  возникает вследствие скручивания упругого элемента 6. Считается, что этот момент пропорционален углу  $\varphi_3 - \varphi_2$ . Тогда по закону Гука  $M_2 = (\varphi_3 - \varphi_2)(GJ_t/l)$ , где  $GJ_t$  – крутильная жесткость упругого элемента.

При вращении дисков возникают также инерционные моменты  $I_2\ddot{\varphi}_2$  и  $I_3\ddot{\varphi}_3$ , где  $I_2$  и  $I_3$  – моменты инерции ведущего и ведомого дисков.

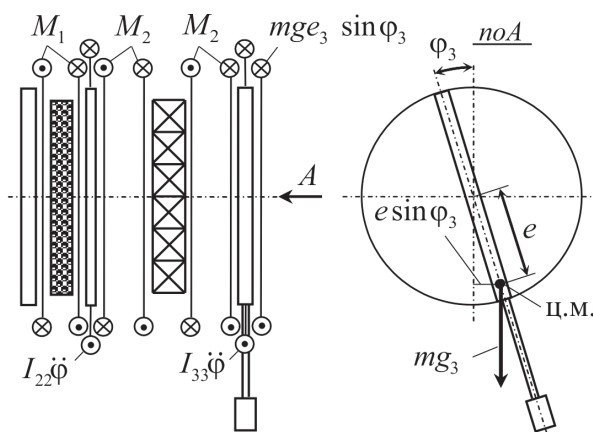


Рис. 2. Моменты взаимодействия составных элементов гасителя

С учетом перечисленных моментов уравнения колебаний связанных дисков записываются в виде

$$\begin{aligned} I_2\ddot{\varphi}_2 + M_1 - M_2 &= 0, \\ I_3\ddot{\varphi}_3 + M_2 + m_3 g e \sin \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для моделирования энергорассеяния гасителя необходимо определить закон движения ведущего диска. Принимается, что  $\varphi_1(t) = \Phi \sin \omega t$ , где  $\Phi$  и  $\omega$  – амплитуда и частота вынужденных гармонических колебаний.

В итоге уравнения колебаний принимают вид

$$\begin{aligned}
 I_2 \ddot{\varphi}_2 &= (\varphi_3 - \varphi_2) \frac{GJ_t}{l} - M_1(\varphi_2 - \varphi_1), \\
 I_3 \ddot{\varphi}_3 &= -(\varphi_3 - \varphi_2) \frac{GJ_t}{l} - m_3 g e \sin \varphi_3,
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$\varphi_1 = \Phi \sin \omega t; \quad \varphi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = \varphi_3(0) = \dot{\varphi}_3(0),$$

где зависимость  $M_1(\varphi_2 - \varphi_1)$  формулируется в результате экспериментальных исследований.

### 3. Модель гистерезиса диссипации энергии гасителя

При построении математической модели гистерезиса использовались данные, полученные в результате экспериментальных исследований гасителей низкочастотных колебаний маятникового типа [8, 9]. Примеры гистерезисных зависимостей  $M(\varphi)$  показаны на рис. 3, где *a–б* соответствуют двум различным программам нагружения демпферного узла гасителя.

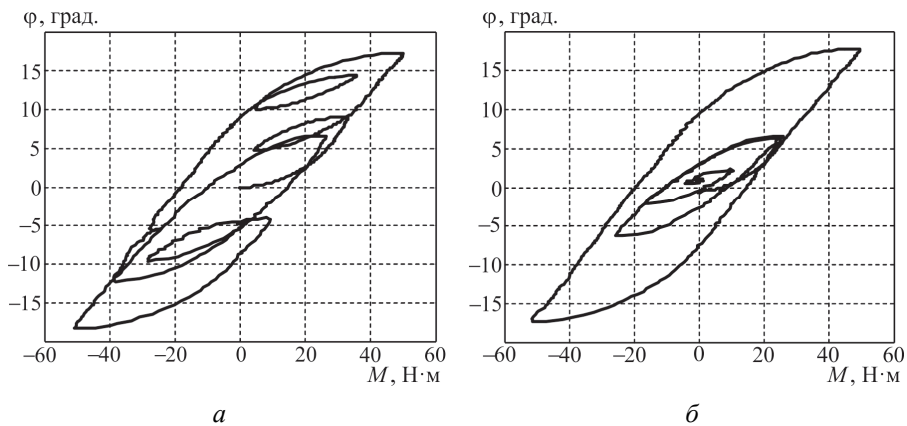


Рис. 3. Два варианта гистерезисных зависимостей  $M(\varphi)$  при квазистатических вынужденных колебаниях маятника гасителя

Анализ экспериментальных данных позволяет представить зависимость  $M(\varphi)$  на диаграмме  $\{M, \varphi\}$  в виде непрерывной ломаной кривой, состоящей из гладких участков (ветвей), формирующих в совокупности петлеобразную траекторию внутри предельного цикла. Ветви зависимости  $M(\varphi)$  образуют два множества, соответствующие

процессам «нагрузки» и «разгрузки». Считается, что в каждом множестве ветви подобны между собой в асимптотическом смысле, т.е. каждая из них асимптотически приближается с ростом или уменьшением  $\varphi$  к соответствующим гистерезисным кривым предельного цикла. Скорость асимптотического сближения зависит от параметров конструкции и физических свойств демпфирующих элементов.

Зависимость  $M(\varphi)$ , удовлетворяющую указанным свойствам, можно построить, используя уравнение (1).

Количества слагаемых в суммах правой части (1)  $k$  и  $m$  подбираются в результате простого перебора вариантов, ограничивая максимальное количество некоторым целым числом, например, 5–8. Для каждого сочетания  $k$  и  $m$  строится аппроксимация кривых предельного цикла с использованием методов минимизации невязки аналитического представления к множеству экспериментальных точек для предельного цикла установившихся колебаний. Это позволяет определить коэффициенты  $C_{ij}$ .

Отметим, что число удерживаемых членов в суммах порождает множество альтернативных видов правой части уравнения (1). В результате интегрирования каждого уравнения получаются кривые, аппроксимирующие данные, полученные из эксперимента. Выбираются такие правые части, которые обеспечивают наибольшее приближение решения (1) к экспериментальным данным и по виду наиболее просты.

Для рассматриваемой задачи (см. рис. 3) в результате численных экспериментов были найдены  $m = 2$  и  $k = 6$ . Для этих значений процедура минимизации невязки к экспериментальным точкам дала следующие значения коэффициентов:  $C_{11} = 650,9$ ;  $C_{21} = 1422,2$ ;  $C_{31} = 10,027$ ;  $C_{41} = 1,088$ ;  $C_{51} = 0,103$ ;  $C_{61} = 0,015$ ;  $C_{12} = -23,9$ ;  $C_{22} = -4,1$ ;  $C_{32} = -2,0$ ;  $C_{42} = -0,35$ ;  $C_{52} = 143,2$ ;  $C_{62} = 419,8$ .

Можно упростить вид правой части (1) без заметной потери точности аппроксимации, отбрасывая некоторые члены сумм. Вычисления показали, что членами, содержащими коэффициенты  $C_{31}$ ,  $C_{41}$ ,  $C_{51}$ ,  $C_{61}$ , можно пренебречь. В итоге уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{dM}{d\varphi} = \sum_{i=0}^m k_i \varphi^i + \sum_{j=0}^n c_j \varphi^j \cdot M, \quad (13)$$

где  $k_0 = C_{11}$ ;  $k_1 = C_{21}$ ;  $c_0 = C_{12}$ ;  $c_1 = C_{22}$ ;  $c_2 = C_{32}$ ;  $c_3 = C_{42}$ ;  $c_4 = C_{52}$ ;  $c_5 = C_{62}$ .

Как показали вычисления, представление (13) достаточно хорошо описывает траектории гистерезиса энергорассеяния при старте из любой точки внутри предельного цикла.

В соответствии с (10) уравнение (13) преобразуется к виду

$$\frac{dM}{dt} = \left( \sum_{i=0}^m k_i \varphi^i + \sum_{j=0}^n c_j \varphi^j \cdot M \right) \frac{d\varphi}{dt}, \quad (14)$$

что позволяет его интегрировать по времени совместно с уравнениями движения (12). Знак  $d\varphi/dt$  определяет направление движения по траектории гистерезиса (процессы «нагрузки» и «разгрузки»).

Мощность энергорассеяния определяется по формуле

$$A = \frac{1}{t} \int_t M_1 d\alpha = \frac{1}{t} \int_t M_1 \dot{\alpha} dt. \quad (15)$$

При исследовании нестационарных колебаний выражение (15) удобно представить в дифференциальной форме и включить в систему уравнений (12), (14). Дифференцирование по времени (15) дает  $t\dot{A} + A = M_1 \dot{\alpha}$ , откуда получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{t} (M_1 \dot{\alpha} - A). \quad (16)$$

Решение (16) имеет горизонтальную асимптоту, соответствующую мощности рассеяния установившихся вынужденных колебаний.

#### 4. Результаты моделирования

Ниже представлены результаты анализа эффективности энергорассеяния гасителя низкочастотных колебаний (рис. 4, а).

Масса и момент инерции ведомого диска принимались соответственно  $m_0 = 1,15$  кг и  $I_0 = 0,004$  кг·м<sup>2</sup>.

На рис. 5, *а* показана зависимость мощности рассеяния энергии от частоты при квазистатическом увеличении частоты гармонических колебаний ведущего диска от 0 до 3 Гц при амплитуде  $\Phi = 0,3$  рад. На рис. 5, *б* показана та же зависимость, но в интервале частот от 0 до 0,8 Гц. Примеры гистерезисной зависимости  $M(\varphi)$  при различных частотах колебаний ведущего диска даны на рис. 6.

На рис. 4, *б* показана схема конструкции гасителя с двумя маятниками, угол между которыми составляет  $90^\circ$ . Масса и момент инерции ведомого диска, как и прежде, приняты  $m_0 = 1,15$  кг и  $I_0 = 0,004$  кг·м<sup>2</sup>.

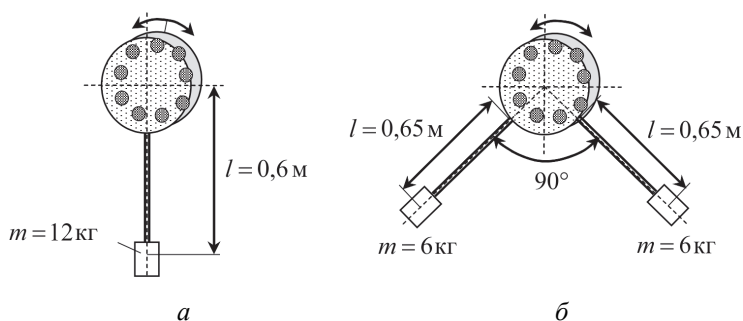


Рис. 4. Конструктивные схемы гасителей колебаний с одним (*а*) и двумя маятниками (*б*)

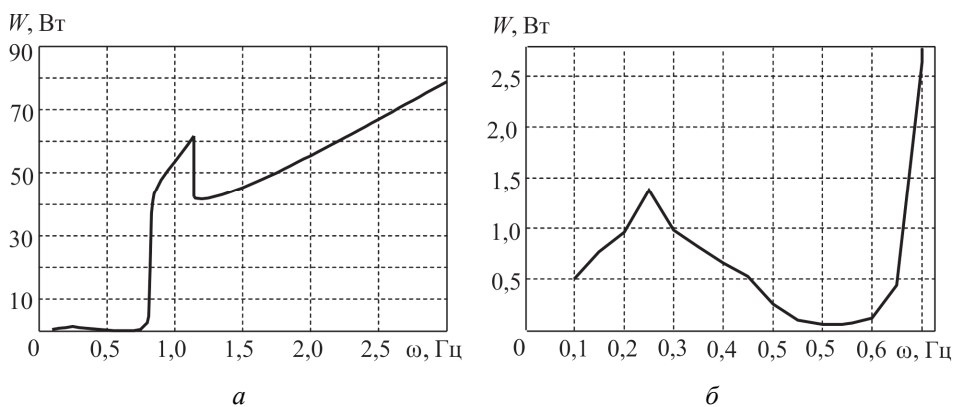


Рис. 5. Зависимость мощности энергорассеяния гасителя от частоты колебаний ведущего диска

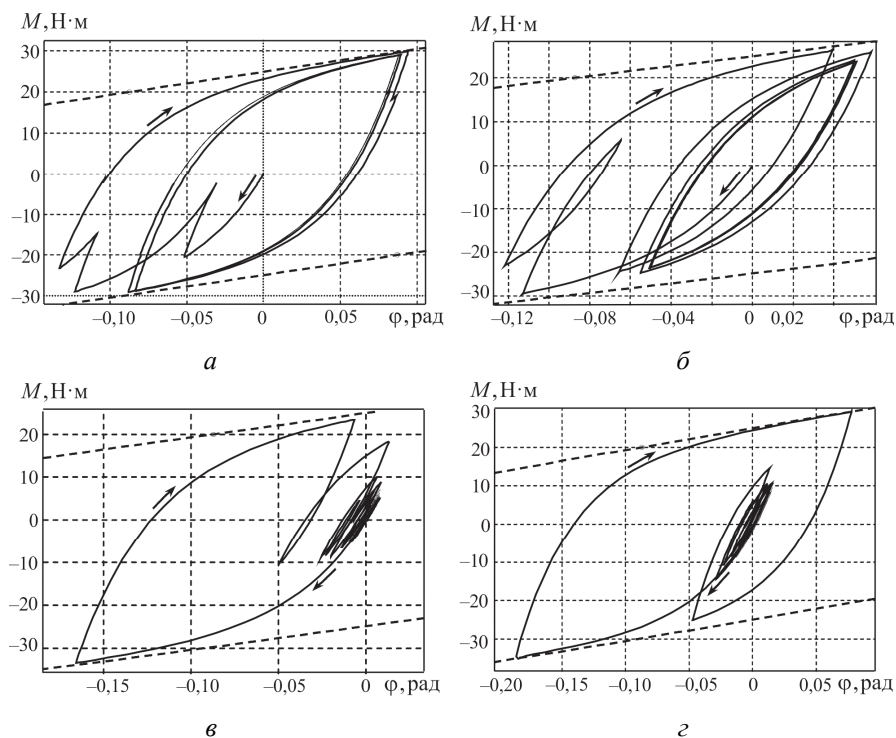


Рис. 6. Гистерезис зависимости  $M(\varphi)$  при гармонических колебаниях ведущего диска с амплитудой  $\Phi = 0,3$  рад: *a* – частота 0,2 Гц; *б* – частота 0,4 Гц; *в* – частота 0,6 Гц; *г* – частота 0,7 Гц

Механический гаситель по этой схеме был изготовлен на предприятии «Электросетьстройпроект» (ЭССП, г. Москва) и испытан на специализированном стенде. С целью проверки модели гистерезиса был произведен расчет гасителя по предложенной методике. Исследовались свободные колебания ведомого диска с маятниками при зафиксированном ведущем диске.

На рис. 7 представлены результаты исследований при начальном отклонении маятника на угол 0,4 рад и старте без начальной скорости. Зависимости угла поворота маятника  $\varphi$  от времени  $t$  показаны на рис. 7, *a*, где сплошная и пунктирная кривые представляют собой соответственно гладкие аппроксимации данных, полученных из эксперимента и в результате численного интегрирования уравнений (2), (4). На рис. 7, *б* показан гистерезис зависимости  $M(\varphi)$ .

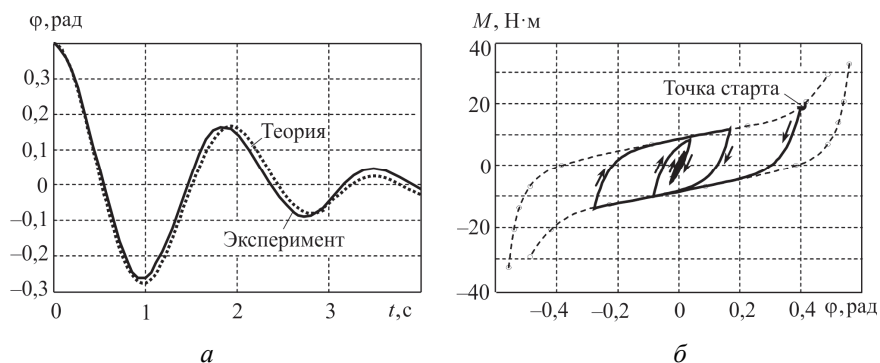


Рис. 7. Результаты исследования свободных колебаний диска с двумя маятниками: *a* – зависимость угла поворота диска от времени; *б* – зависимость момента сопротивления от угла поворота диска

### Заключение

В работе предложена математическая модель для описания гистерезиса различных физических зависимостей, в том числе диаграмм деформирования при нестационарных колебаниях механических систем. В качестве определяющего соотношения предложено использовать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка со специальной правой частью, обеспечивающей асимптотическое приближение искомой зависимости к предельным кривым, известным из экспериментов. Коэффициенты в правой части определяются методами приближения, минимизируя невязку аналитического представления к множеству значений, полученных из экспериментов для предельного цикла.

Предложенная модель физических зависимостей гистерезисного типа является аналитической, что является важным для ее включения в модели, описывающие нелинейное поведение механических и иных систем.

В качестве примера выполнено моделирование колебаний гасителя низкочастотных колебаний маятникового типа. Предложен алгоритм анализа эффективности энергорассеяния гасителей колебаний, что позволяет оптимизировать конструкцию гасителей без проведения рутинных экспериментальных работ.

Разработанный подход может быть использован при решении различных задач о нестационарных колебаниях различных конструкций и механизмов с гистерезисным характером рассеяния энергии.



Подход может оказаться полезным и при решении иных задач механики, в том числе об упругопластическом циклическом деформировании различных материалов и конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00471-а), а также гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (код проекта МК-6582.2013.8).

### **Библиографический список**

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 271 с.
2. Рейнер М. Реология: пер с англ. – М.: Наука, 1965. – 224 с.
3. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
4. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях // Журнал техн. физики. – 1938. – Т. 8, № 6. – С. 15–21.
5. Писаренко Г.С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 436 с.
6. Лебедев А.Б. Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // Физ. тв. тела. – 1999. – Т. 41. – Вып. 7. – С. 1214–1222.
7. Плахтиенко Н.П. Методы идентификации нелинейных механических колебательных систем // Прикл. механика. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 38–68.
8. Данилин А.Н., Захаров А.П. Подход к описанию гистерезиса с использованием данных серии типовых экспериментов на примере гасителя «пляски проводов» // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 4. – С. 604–622.
9. Данилин А.Н., Шалашилин В.И. Способ идентификации гистерезиса на примере гасителя «пляски проводов» // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 115–124.
10. Абакумов В.Г., Трапезон К.А. О проектировании акустических концентраторов с учетом внутреннего рассеяния энергии // Акустичний вісник. – 2007. – Т. 10, № 1. – С. 3–16.
11. The investigation on the nonlinearity of plasticine-like magnetorheological material under oscillatory shear rheometry / X. Gong, Ya. Xu,

S. Xuan, C. Guo, L. Zong // *Journal of Rheology*. – 2012. – Vol. 56. – No. 6. – P. 1375–1391, available at: <http://dx.doi.org/10.1122/1.4739263>. (accessed 20 October 2014).

12. Large amplitude oscillatory shear rheology for nonlinear viscoelasticity in Hectorite suspensions containing poly(ethylene glycol) / Z. Tong, W.X. Sun, Y.R. Yang, T. Wang, X.X. Liu, C.Y. Wang // *Polymer*. – 2011. – Vol. 52. – Iss. 6. – P. 1402–1409, available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032386111000693> (accessed 20 October 2014). DOI: 10.1016/j.polymer.2011.01.048

13. Nonlinear viscoelasticity of polymer nanocomposites under large amplitude oscillatory shear flow / H.T. Lim, K.H. Ahn, J.S. Hong, K. Hyun // *Journal of Rheology*. – 2013. – Vol. 57. – Iss. 3. – P. 767–789, available at: <http://dx.doi.org/10.1122/1.4795748> (accessed 20 October 2014).

14. Mielke A., Roubíček T. A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys // *Multiscale model. simul.* – 2003. – Vol. 1. – No. 4. – P. 571–597. DOI:10.1137/S1540345903422860

15. Rieger M.O. Young measure solutions for nonconvex elastodynamics. // *SIAM J. math. anal.* – 2003. – Vol. 34. – No. 6. – P. 1380–1398. DOI: 10.1137/S0036141001392141

16. Rieger M.O. A model for hysteresis in mechanics using local minimizers of Young measures // *Progress in nonlinear differential equations and their applications*. – 2005. – Vol. 63. – P. 403–414. DOI 10.1007/3-7643-7384-9\_39

17. Mielke A. Analysis of energetic models for rate-independent materials // *Proc. of the international congress of mathematicians (Beijing, 2002)*. – 2002. – Vol. III. – P. 817–828.

18. Кинематическая модель реологического поведения неньютоновских жидкостей в условиях нестационарного циклического нагружения / А.Н. Данилин, Ю.Г. Яновский, Н.А. Семенов, А.Д. Шалашин // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 369–383.

19. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2014. – № 2. – С. 125–152.

20. Волков И.А., Гордлеева И.Ю., Тарасов И.С. Моделирование циклического упругопластического деформирования конструкционных

сталей при сложном нагружении // Вестник научно-технического развития. – 2008. – № 6. – Вып. 10. – С. 26-39.

21. Семенов А.С., Мельников Б.Е., Горохов М.Ю. Циклическая неустойчивость при расчетах больших упругопластических деформаций // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2003. – № 3. – Вып. 33. – С. 129–143.

22. Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е. Циклическая неустойчивость при расчетах больших упругопластических деформаций с использованием моделей материала с кинематическим упрочнением // Нелинейные пробл. механики и физики деф. твердого тела. – 2002. – Вып. 6. – С. 79–91.

23. Данилин А.Н., Козлов К.С. Моделирование нестационарных колебаний гасителей вибрации с учетом гистерезиса диссипации энергии // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 34–47.

24. Sauter D., Hagedorn P. On the Hysteresis of Wire Cables in Stockbridge Dampers // Int. J. Non-Linear Mech. – 2002. – Vol. 37. – P. 1453–1459, available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746202000288>. DOI: 10.1016/S0020-7462(02)00028-8

25. Такетоми С., Тикадзуми С. Магнитные жидкости: пер. с яп. – М.: Мир, 1993. – 272 с.

### References

1. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Sistemy s gisterezisom [Systems with gisteresis]. Moscow: Nauka, 1983. 271 p.

2. Reiner M. Reologiya [Rheology]. Moscow: Nauka, 1965. 224 p.

3. Panovko Ia.G. Vnutrennee trenie pri kolebaniakh uprugikh system [Internal friction at the vibrations of elastic systems]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 193 p.

4. Davidenkov N.N. O rasseianii energii pri vibratsiiakh [On the energy dissipation at the vibration]. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 1938, vol. 8, no. 6, pp. 15-21.

5. Pisarenko G.S. Rasseianie energii pri mekhanicheskikh kolebaniakh [The energy dissipation at mechanical vibrations]. Kiev: Akademia nauk Ukrainskoi sovetskoi sotsialisticheskoi respubliki, 1962. 436 p.

6. Lebedev A.B. Amplitudno-zavisimyi defekt modulia uprugosti v osnovnykh modeliakh dislokatsionnogo gisterezisa [Amplitude-dependent defect in the elastic modulus in the basic models of dislocation hysteresis]. *Fizika tverdogo tela*, 1999, vol. 41, iss. 7, pp. 1214-1222.

7. Plakhtienko N.P. Metody identifikatsii nelineinykh mekhanicheskikh kolebatel'nykh system [Identification methods of nonlinear mechanical systems]. *Prikladnaia mekhanika*, 2000, vol. 36, no. 12, pp. 38-68.

8. Danilin A.N., Zakharov A.P. Podkhod k opisaniiu gisterezisa s ispol'zovaniem dannykh serii tipovykh eksperimentov na primere gasitelia pliaski provodov [Approach to the description of hysteresis using data from a series of model experiments on the example of an antigalloping damper]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 604-622.

9. Danilin A.N., Shalashilin V.I. A method to identify hysteresis by an example of an antigalloping device. *International Applied Mechanics*. 2010, vol. 46, no. 5, pp. 588-595. DOI 10.1007/s10778-010-0345-x (<http://link.springer.com/article/10.1007/s10778-010-0345-x>) (accessed 10 October 2014).

10. Abakumov V.G., Trapezon K.A. O proektirovanii akusticheskikh kontsentratorov s uchetom vnutrennego rasseianiia energii [On designing acoustic concentrators with regard to the internal energy dissipation]. *Akustichnii visnik*, 2007, vol. 10, no. 1, pp. 3-16.

11. Gong X., Xu Ya., Xuan S., Guo C., Zong L. The investigation on the nonlinearity of plasticine-like magnetorheological material under oscillatory shear rheometry. *Journal of Rheology*, 2012, vol. 56, no. 6, pp. 1375-1391. (<http://dx.doi.org/10.1122/1.4739263>) (accessed 10 October 2014).

12. Tong Z., Sun W.X., Yang Y.R., Wang T., Liu X.X., Wang C.Y. Large amplitude oscillatory shear rheology for nonlinear viscoelasticity in Hectorite suspensions containing poly(ethylene glycol). *Polymer*, 2011, vol. 52, iss. 6, pp. 1402-1409. DOI: 10.1016/j.polymer.2011.01.048 (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032386111000693>) (accessed 10 October 2014).

13. Lim H.T., Ahn K.H., Hong J.S., Hyun K. Nonlinear viscoelasticity of polymer nanocomposites under large amplitude oscillatory shear flow. *Journal of Rheology*, 2013, vol. 57, iss. 3, pp. 767-789 (<http://dx.doi.org/10.1122/1.4795748>) (accessed 10 October 2014).

14. Mielke A., Roubíček T. A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys. *Multiscale model. simul.*, 2003, vol. 1, no. 4, pp. 571-597. DOI:10.1137/S1540345903422860

15. Rieger M.O. Young measure solutions for nonconvex elastodynamics. *SIAM J. math. anal.*, 2003, vol. 34, no. 6, pp. 1380-1398. DOI: 10.1137/S0036141001392141

16. Rieger M.O. A model for hysteresis in mechanics using local minimizers of Young measures. *Progress in nonlinear differential equations and their applications*, 2005, vol. 63, pp. 403-414. DOI 10.1007/3-7643-7384-9\_39

17. Mielke A. Analysis of energetic models for rate-independent materials. *Proc. of the international congress of mathematicians* (Beijing, 2002), 2002, vol. III, pp. 817-828.

18. Danilin A.N., Yanovsky Yu.G., Semenov N.A., Shalashilin A.D. Kinematic model of the rheological behavior of non-newtonian fluids in condition of nonstationary cyclic loading. *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal*, 2012, vol. 3, no. 4, pp. 1-15. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v3.i4.30 (<http://dl.begellhouse.com/journals/36ff4a142dec9609,4de539355e0ede5a,533be30457c9a0ea.html>) (accessed 10 October 2014).

19. Bondar' V.S., Danshin V.V., Makarov D.A. Matematicheskoe modelirovanie protsessov deformirovaniia i nakopleniia povrezhdenii pri tsiklicheskih nagruzheniiakh [Mathematical modeling of deformation and damage accumulation under cyclic loading]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 2. pp. 125-152.

20. Volkov I.A., Gordleeva I.Iu., Tarasov I.S. Modelirovanie tsiklicheskogo uprugoplasticheskogo deformirovaniia konstruktsionnykh stali pri slozhnom nagruzhenii [Modeling of cyclic elastic-plastic deformation of structural steels under complex loading]. *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiia*. 2008, No. 6, iss. 10, pp. 26-39.

21. Semenov A.S., Mel'nikov B.E., Gorokhov M.Iu. Tsiklicheskaia nestabil'nost' pri raschetakh bol'shikh uprugo-plasticheskikh deformatsii [Cyclical instability in the calculations of large elastoplastic deformations]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*, 2003, no. 3, iss. 33, pp. 129-143.

22. Gorokhov M.Iu., Semenov A.S., Mel'nikov B.E. Tsiklicheskaia nestabil'nost' pri raschetakh bol'shikh uprugo-plasticheskikh deformatsii

s ispol'zovaniem modelei materiala s kinematicallym uprochneniem [Cyclical instability in the calculations of large elastoplastic deformations using material models with kinematic hardening]. *Nelineinye probl. mekhaniki i fiziki def. tverdogo tela*, 2002, iss. 6, pp. 79-91.

23. Danilin A.N., Kozlov K.S. Modelirovanie nestatsionarnykh kolebaniy gasitelei vibratsii s uchetom gisterezisa dissipatsii energii [Modelling of unsteady oscillation vibration dampers, taking into account the hysteresis energy dissipation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 34-47.

24. Sauter, D.; Hagedorn, P.: On the Hysteresis of Wire Cables in Stockbridge Dampers. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2002, vol. 37, pp. 1453–1459, available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746202000288>. DOI: 10.1016/S0020-7462(02)00028-8

25. Taketomi S., Tikadzumi S. Magnitnye zhidkosti [Magnetic fluids]. Moscow: Mir, 1993. 272 p.

### **Об авторах**

**Данилин Александр Николаевич** (Москва, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института прикладной механики РАН, профессор кафедры строительной механики и прочности Московского авиационного института (125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4, e-mail: [andanilin@yandex.ru](mailto:andanilin@yandex.ru)).

**Кузнецова Елена Львовна** (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов Московского авиационного института (125993, г. Москва, Волоколамский шоссе, 4: e-mail: [vida\\_ku@mail.ru](mailto:vida_ku@mail.ru))

**Рабинский Лев Наумович** (Москва, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета прикладной механики Московского авиационного института, заведующий кафедрой материаловедения Московского авиационного института, профессор кафедры сопротивления материалов Московского авиационного института (125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4, e-mail: [rabinskiy@mail.ru](mailto:rabinskiy@mail.ru)).

### **About the authors**

**Alexander N. Danilin** (Moscow, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principle Researcher of Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences; Professor, De-

partment of Structural Mechanics and Strength, Moscow Aviation Institute (4, Volokolamsk av., 125993, Moscow, Russian Federation, e-mail: andanilin@yandex.ru).

**Elena L. Kuznetsova** (Moscow, Russian Federation) – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Department of Strength of Materials, Moscow Aviation Institute (4, Volokolamsk av., 125993, Moscow, Russian Federation, e-mail: vida\_ku@mail.ru).

**Lev N. Rabinsky** (Moscow, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Dean of Applied Mechanics Faculty, Head of Materials Department, Professor of Strength of Materials Department, Moscow Aviation Institute (4, Volokolamsk av., 125993, Moscow, Russian Federation, e-mail: rabinskiy@mail.ru).

Получено 15.10.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н. Модель гистерезиса энергорассеяния при колебаниях механических систем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 4. – С. 45–67. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.02

Please cite this article in English as:

Danilin A.N., Kuznetsova E.L., Rabinsky L.N. Modelling hysteresis of energy dissipation at vibration of mechanical systems. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 4. Pp. 45-67. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.02