



УДК 521.1, 681.51.011

## О РЕГУЛЯРНОЙ ХОДЬБЕ ЭКСОСКЕЛЕТОНА НИЖНИХ КОНЕЧНОСТЕЙ ПРИ ДЕФИЦИТЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Э.К. Лавровский, Е.В. Письменная

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1, e-mail: Lavrov@imec.msu.ru, Epismen@yandex.ru

**Аннотация.** Рассматривается ходьба человека-оператора с надетым на него экзоскелетом нижних конечностей, нагруженного дополнительным весом. Предполагается, что экзоскелет снабжен четырьмя движителями – в коленных и тазобедренных суставах. В стопах установлены крутильные пружины с известными упругими свойствами, которые также оказывают воздействие на данную человеко-машинную систему. В статье рассмотрены режимы плоской комфортабельной ходьбы. Сначала рассмотрен режим одноопорной ходьбы. С учетом выбранного типа движения синтезированы в аналитической форме алгоритмы управления, обеспечивающие желаемое качество движения. Показано, что существует широкий диапазон жесткостей пружин в стопах, который позволяет достичь высокой точности исполнения условий периодичности походки при разных дополнительных нагрузках на экзоскелет. Причем при изменении веса дополнительной нагрузки требуется незначительная корректировка средних значений пружин. Далее рассматривается совместный режим одноопоры и двуопоры. Как известно, исследование двуопорной фазы сопряжено с неоднозначностью определения сил реакций и моментов в сочленениях при решении обратной задачи динамики. Предложены дополнительные соотношения, устраняющие эту неопределенность на основе задания линейных по времени функций распределения реакций в стопах обеих ног. Исследовано влияние желаемого угла наклона корпуса на точность построения периодического решения при формировании алгоритма управления. Для обеспечения периодичности режима ходьбы, сочетающего одно- и двуопорные фазы, исследовались два подхода: первый основан на линеаризации динамических уравнений и предположении о невесомости ног. В итоге был сформулирован первый вид желаемого закона изменения угла наклона корпуса, при этом были получены практически приемлемые по точности результаты. Далее было проведено исследование, направленное на улучшение достигнутой точности периодического движения; в рамках нелинейных уравнений был найден другой закон угла наклона корпуса, обеспечивающий большую точность движения. Результатом работы является аналитический синтез законов управления, обеспечивающий естественные локомоции человека и не требующий от него значительных мышечных усилий, кроме как на поддержание равновесия.

**Ключевые слова:** экзоскелетон, мобильные роботы, нелинейное управление, дефицит управляющих воздействий.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование усилительных систем типа экзоскелетона впервые было инициировано компанией *General Electric* в конце 1960-х гг. в рамках полноразмерного экзоскелетона с 30 степенями свободы, называемого «Хардимен» [9]. «Хардимен» был разработан с целью увеличения способностей солдат по переноске и подъему грузов. Однако проект не был успешным из-за большой массы экзоскелетона и несовершенной системы управления. В последние десятилетия интерес исследователей к организации двуногой ходьбы постоянно возрастал как в области биомеханики, так и в области робототехники. Научный анализ двуногой ходьбы позволяет лучше понять особенности человеческой походки и ее объективные свойства, а также вносит потенциальный вклад в проектирование и разработку экзоскелетонов – мобильных устройств, помогающих перемещаться человеку. Такие устройства необходимы и для организации движения ног человека, потерявшего полную или частичную способность двигаться самостоятельно в результате травм, а также они необходимы для обеспечения перемещения груза по сложной пространственной траектории.

Наиболее сложной и важной является проблема разработки системы управления экзоскелетомом нижних конечностей, который способен обеспечить перемещение по заданной траектории. Экзоскелетоны, как правило, описываются и моделируются как двуногие роботы, управляемые человеком. Двуногий робот, перемещающийся в сагиттальной плоскости, может рассматриваться как плоская кинематическая цепочка, состоящая из двух ног и туловища. Ноги одинаковы и симметричны и соединены с туловищем в бедре. Каждая нога состоит из двух звеньев – верхнего (бедро) и нижнего (голень), соединенных посредством колена. Стопа обычно рассматривается как третье безмассовое звено. Таким образом, рассматриваемый механизм является семизвенным. Цикл ходьбы состоит из одноопорной и двуопорной фаз. На одноопорной фазе движения, называемой также фазой переноса конечности, только одна стопа находится в контакте с землей. В этом случае математическая модель представляет собой кинематическую цепь с пятью степенями свободы, в каждой степени которой формируется некоторый момент. Если на земле находятся обе ноги, то число степеней свободы уменьшается до трех, но возникают дополнительные кинематические соотношения. Движение робота представлено на рис. 1.

Целью настоящего исследования является аналитический синтез законов управления движением человека, интегрированного с экзоскелетомом посредством двигателей, расположенных в тазобедренном и коленном шарнирах, которые позволяют реализовать желаемое движение человека в сагиттальной плоскости как в одно-, так и в двуопорной фазах. Синтез строится на основе динамических уравнений механизма, моментные двигатели считаются идеальными.

## ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается задача управления биомеханизмом – человеком, интегрированным с экзоскелетом, при перемещении его по ровной горизонтальной поверхности в режиме плоской ходьбы. На рис. 1 показана схема тела человека с аппаратом и введены обозначения углов и моментов  $M_{i,j}$  ( $i = 1; 2; j = 1; 2; 3$ ) в суставах; в стопах ног в точках  $(x_{1p}, y_{1p})$  и  $(x_{2p}, y_{2p})$  точно приложены силы реакции  $R$ . Определяющими координатами динамической системы являются  $(x, y)$  – координаты тазобедренного сустава, а также углы звеньев экзоскелетона с вертикалью  $(\psi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ .

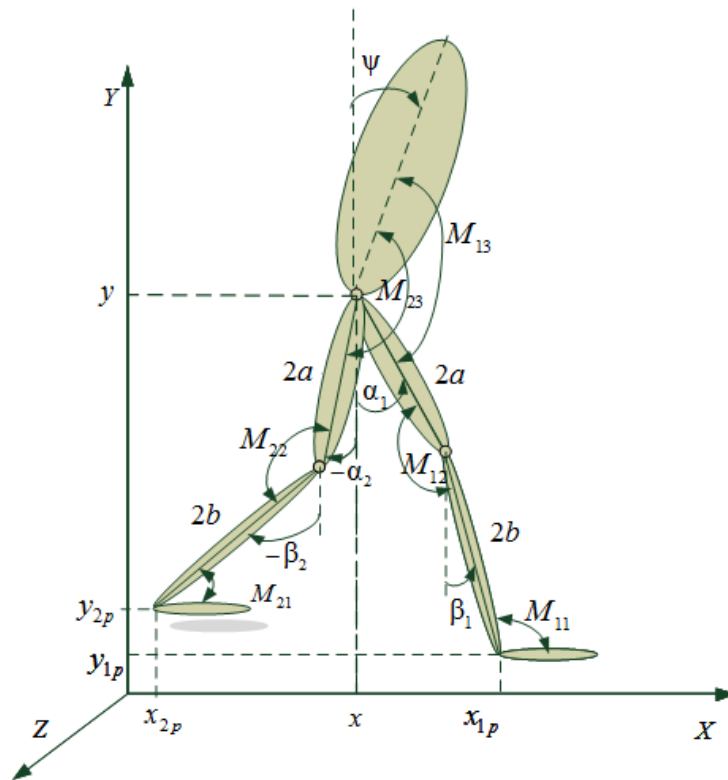


Рис. 1. Схема человека с экзоскелетом в движении

Используя метод Лагранжа, получим следующую систему уравнений [1, 2], описывающую движение аппарата:

$$M\ddot{x} + K_r (\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi) + \sum_{i=1}^2 \{ K_a (\ddot{\alpha}_i \cos \alpha_i - \dot{\alpha}_i^2 \sin \alpha_i) + K_b (\ddot{\beta}_i \cos \beta_i - \dot{\beta}_i^2 \sin \beta_i) \} = Q_x, \quad (1)$$

$$M\ddot{y} - K_r (\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) + \sum_{i=1}^2 \{ K_a (\ddot{\alpha}_i \sin \alpha_i + \dot{\alpha}_i^2 \cos \alpha_i) + K_b (\ddot{\beta}_i \sin \beta_i + \dot{\beta}_i^2 \cos \beta_i) \} = Q_y - Mg, \quad (2)$$

$$J\ddot{\psi} - K_r (j \sin \psi - \ddot{x} \cos \psi) - gK_r \sin \psi = Q_\psi, \quad (3)$$

$$J_a^* \ddot{\alpha}_i + J_{ab} \ddot{\beta}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + K_a (\ddot{x} \cos \alpha_i + \ddot{y} \sin \alpha_i) + J_{ab} \dot{\beta}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) + gK_a \sin \alpha_i = Q_{\alpha_i}, \quad i = 1; 2, \quad (4)$$

$$J_b \ddot{\beta}_i + J_{ab} \ddot{\alpha}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + K_b (\ddot{x} \cos \beta_i + \ddot{y} \sin \beta_i) - J_{ab} \dot{\alpha}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i) + gK_b \sin \beta_i = Q_{\beta_i}, \quad i = 1; 2. \quad (5)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{i=1}^2 R_{ix}, \\ Q_y &= \sum_{i=1}^2 R_{iy}, \\ Q_\psi &= -\sum_{i=1}^2 M_{i3}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q_{\alpha_i} = -M_{i2} - M_{i3} + 2a(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i),$$

$$Q_{\beta_i} = M_{i2} + 2b(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i) + M_{i1},$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести;  $R_{ix}, R_{iy}$  – силы реакций опоры;  $2a$  и  $2b$  соответственно длины бедер и голеней;  $m_a, m_b$  – их массы;  $m_t$  – масса корпуса;  $r$  – расстояние центра масс корпуса от таза;  $a_*, b_*$  – соответственно расстояния центров масс бедра и голени от таза и коленей ног;  $J$  и  $J_a$  – моменты инерции соответственно корпуса и бедра относительно точки таза;  $J_b$  – момент инерции голени относительно колена.

Обозначим также

$$M = m_t + 2m_a + 2m_b,$$

$$J_a^* = J_a + 4m_b a^2,$$

$$K_a = m_a a_* + 2m_b a,$$

$$K_b = m_b b_*, \quad J_{ab} = 2m_b a b_*, \quad K_r = m_t r.$$

Уравнения (1)–(6) пригодны для описания движения как с одноопорной (с мгновенной двуопорной фазой), так и с протяженной двуопорной фазой, а также для режима, где сочетаются обе фазы. В дальнейшем под номером один всегда будет пониматься передняя опорная, а под номером два – задняя (переносимая) нога.

Если рассматривается одноопорная ходьба, то количество переменных переопределено, так как координаты таза могут быть выражены через углы опорной ноги:

$$\begin{aligned} x_{1p} - x &= 2a \sin \alpha_1 + 2b \sin \beta_1, \\ y - y_{1p} &= 2a \cos \alpha_1 + 2b \cos \beta_1, \end{aligned} \quad (7)$$

причем можно считать, что  $x_{1p} = y_{1p} = 0$ . Дифференцируя соотношения (7), нетрудно получить выражения для первых и вторых производных по координатам  $x$  и  $y$ . Используя формулы (7), можно также в случае одноопорной ходьбы заменить выражения  $\ddot{x}$  и  $\ddot{y}$  через первые и вторые производные углов  $\alpha_1, \beta_1$ , выразить через них силы реакции в опорной ноге  $R_{1x}, R_{1y}$  и, подставив все это в соотношения (3)–(5), получить замкнутую систему из пяти дифференциальных уравнений. В компактной форме эта система уравнений имеет вид [8]

$$B(z) \|\ddot{z}\| + D(z) \|\dot{z}^2\| + Ag \|\sin z\| = C \|M_{13}, M_{23}, M_{12}, M_{22}, M_{11}\|^T, \quad (8)$$

где  $\|z\| = \|\psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\|^T$ , а  $B(z), D(z), A, C$  – некоторые матрицы, зависящие от масс-инерционных характеристик человека и экзоскелетона. Пусть все звенья тела человека и, соответственно, экзоскелетона весомы за исключением стоп. Считается, что моменты  $M_{i,j}$  ( $i = 1; 2; j = 2; 3$ ) вырабатываются двигателями

экзоскелетона, а человек поддерживает только вертикальную позу. Величины масс-инерциальных характеристик тела человека и экзоскелетона, используемые в численных экспериментах, указаны в прил. 1.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Под действием управляющих моментов  $M_{i,j}$  ( $i=1,2; j=2,3$ ) механизм совершает предписанное движение. Построим систему управления экзоскелетом, используя только четыре двигателя, развивающие управляющие моменты  $M_{13}, M_{23}, M_{12}, M_{22}$ . Что касается стопных моментов  $M_{11}, M_{12}$ , то они приняты пассивными, т.е. реализуются в фазе опоры соответствующих ног с помощью идентичных крутильных пружин с подбираемой жесткостью и нейтральной угловой длиной; в фазе переноса ноги пружина в стопе фиксируется и  $M_{12} = 0$ . Такая схема управления технически более выгодна, поскольку позволяет иметь меньшее число управляющих моментов. Оценим, к каким погрешностям в конце одного шага регулярной ходьбы приведет синтезируемый алгоритм управления на примере «желаемого», комфортабельного движения [1, 2] с известным периодом шага  $T$ , длиной шага  $L$  и высотой перемещения точки таза  $h$ .

Проведенные исследования [6] показали, что зависимость момента в голеностопе от угла между голенью и стопой приближенно носит кусочно-линейный характер. На рис. 2 приведен график этой зависимости  $M_{11}(\beta_1)$  при параметрах  $L = 50$  см,  $h = 86$  см,  $T = 0,7$  с в случае одноопорной ходьбы. Угол с горизонтом в опорной стопе также определяется углом  $\beta_1$ , он равен  $\beta_1 + \pi / 2$ .

Из рис. 2 видно, что за исключением короткого начального отрезка фазы опоры ноги (с точки зрения реальной ходьбы человека это, скорее, фаза двуопоры) при  $\beta_1 \leq -5^\circ$  управляющий момент  $M_{11}$  растет, в то время как угол  $\beta_1$  убывает. Отметим, что такая общая тенденция отвечает пружине с отрицательным коэффициентом жесткости.

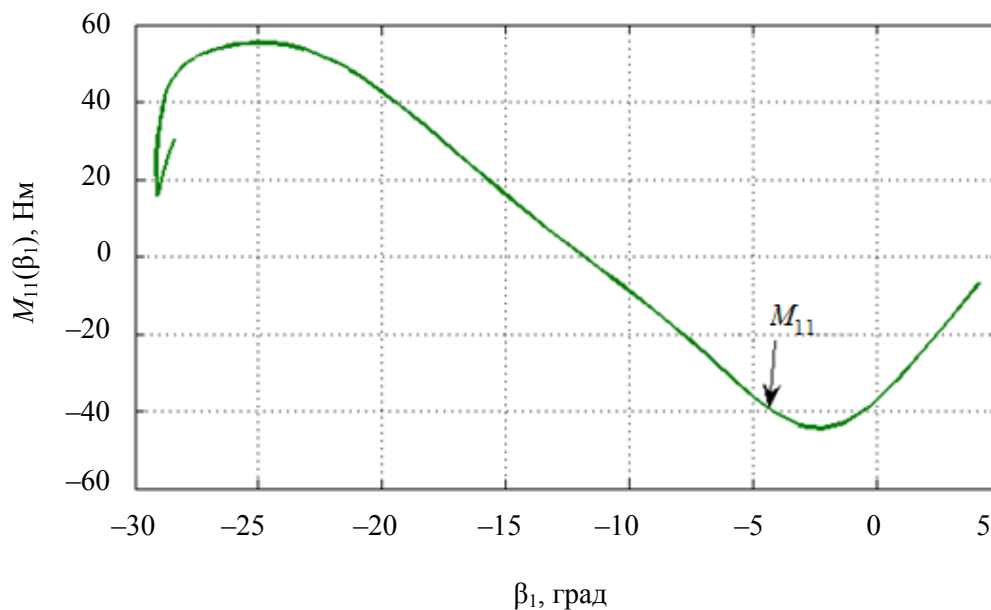


Рис. 2. График зависимости  $M_{11}(\beta_1)$

### СЛУЧАЙ ОДНООПОРНОЙ ХОДЬБЫ

Поскольку остальные степени свободы, кроме стопы опорной ноги, управляемы, примем для них следующий закон управления [6]:

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon}_{1\alpha}(t) &= \ddot{\alpha}_1(t) - \ddot{\alpha}_1^*(t) = (\lambda_{11} + \lambda_{12})(\dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_1^*(t)) - \lambda_{11}\lambda_{12}(\alpha_1(t) - \alpha_1^*(t)), \\ \ddot{\epsilon}_{2\alpha}(t) &= \ddot{\alpha}_2(t) - \ddot{\alpha}_2^*(t) = (\lambda_{31} + \lambda_{32})(\dot{\alpha}_2(t) - \dot{\alpha}_2^*(t)) - \lambda_{31}\lambda_{32}(\alpha_2(t) - \alpha_2^*(t)), \\ \ddot{\epsilon}_{2\beta}(t) &= \ddot{\beta}_2(t) - \ddot{\beta}_2^*(t) = (\lambda_{41} + \lambda_{42})(\dot{\beta}_2(t) - \dot{\beta}_2^*(t)) - \lambda_{41}\lambda_{42}(\beta_2(t) - \beta_2^*(t)), \\ \ddot{\epsilon}_{\psi}(t) &= \ddot{\psi}(t) - \ddot{\psi}^*(t) = (\gamma_1 + \gamma_2)(\dot{\psi}(t) - \dot{\psi}^*(t)) - \gamma_1\gamma_2(\psi(t) - \psi^*(t)).\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь  $\lambda, \gamma$  – отрицательные константы; углы с верхним индексом «\*» отвечают желаемому комфортабельному типу движения, определяемому следующими выражениями: по углам  $\alpha_1, \beta_1$  соотношениями (7) при

$$x^* = Vt - \sigma, \quad y^* = h, \quad V = L/T, \quad \sigma = L/2; \quad x_{1p} = y_{1p} = 0,\tag{10}$$

по углам  $\alpha_2, \beta_2$  [3, 4]

$$x_{2p}^* = -L \cos(\Omega t), \quad y_{2p}^* = \delta^2 \sin^2(\Omega t), \quad \Omega = \pi/T,\tag{11}$$

где  $\delta$  – некоторая константа, задающая высоту траектории переносимой ноги (обычно  $\delta^2 = 0,02$  м) и, наконец, по углу  $\psi$  [2]

$$\psi^*(t) = -\frac{ML}{2K_r} \left[ \text{ch}\omega t - \frac{1 + \text{ch}\omega T}{\text{sh}\omega T} \text{sh}\omega t \right] - \frac{Mx^*}{K_r}, \quad \sigma = \frac{L}{2}, \quad \omega^2 = \frac{K_r g}{J + K_r h}.\tag{12}$$

Приведем явные формулы, определяющие поведение углов  $\alpha_1^*, \beta_1^*$  при заданной «желаемой» кинематике таза [1, 3, 4]:

$$\begin{aligned}\alpha_1^* &= -\arctg \frac{x^* - x_{p1}}{y^* - y_{p1}} + \arctg \sqrt{\left( \frac{4ad}{4(b^2 - a^2) - d^2} \right)^2} - 1, \\ \beta_1^* &= -\arctg \frac{x^* - x_{p1}}{y^* - y_{p1}} - \arctg \sqrt{\left( \frac{4bd}{4(a^2 - b^2) - d^2} \right)^2} - 1,\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$d = \sqrt{(x^* - x_{1p})^2 + (y^* - y_{1p})^2}.$$

Формулы (13) легко могут быть получены из условий (7).

Для синтеза закона управления определим, какой информацией располагает система управления. Будем считать, что в шарнирах экзоскелетона установлены сенсоры, определяющие углы и угловые скорости  $\psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \dot{\psi}, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$  экзоскелетона. Углы в шарнирах экзоскелетона и их угловые скорости могут быть определены с помощью инкрементных или абсолютных датчиков, а также инклинометров и акселерометров. Примем, что углы и угловые скорости в суставах человека совпадают с соответствующими переменными экзоскелетона, так как положение человека жестко фиксировано относительно экзоскелетона.

Определим величины потребных моментов, которые должны развивать приводы экзоскелетона, используя уравнения динамики (8) одноопорного движения и управляющие соотношения (9). Поскольку стопный момент  $M_{11}$  известен:

$$M_{11} = c(\beta_1 - \beta_1^0),\tag{14}$$

где  $c$  – жесткость пружины;  $\beta_1^0$  – ее нейтральная угловая длина, и, наоборот, величина  $\dot{\beta}_1$  неизвестна, то уравнения (8) можно переписать в следующей форме:

$$\tilde{B}(z)\|w\| + \tilde{D}(z)\|\dot{z}^2\| + \tilde{A}g\|\sin z\| = \tilde{C}\|M_{12}, M_{22}, M_{13}, M_{23}, \ddot{\beta}_1\|^T.$$

Откуда находим

$$\|M_{12}, M_{22}, M_{13}, M_{23}, \ddot{\beta}_1\|^T = \tilde{C}^{-1}[\tilde{B}(z)\|w\| + \tilde{D}(z)\|\dot{z}^2\| + \tilde{A}g\|\sin z\|]. \quad (15)$$

Здесь  $\|w\| = \|\ddot{\psi}, \ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, M_{11}, \ddot{\beta}_2\|^T$  и, по-прежнему,  $\|z\| = \|\psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\|^T$ .

Подставляя эти векторы и их производные в правую часть соотношений (15), получаем явный вид неизвестных моментов и второй производной  $\ddot{\beta}_1$  как функций времени.

Конкретный вид матриц  $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{B}(z), \tilde{D}(z)$  приведен в прил. 2.

Построенный алгоритм был промоделирован для различных вариантов кинематики комфортабельного движения в широком диапазоне величин жесткостей  $c$  и нейтральных длин  $\beta_1^0$  пружины, отвечающей развиваемому моменту  $M_{11}$ . В приведенной ниже табл. 1 детально проанализированы различные варианты этих расчетов, относящиеся к случаю крутильной жесткости стопной пружины  $c = -100$  Нм. Согласно рис. 1 положительный момент  $M_{11}$  является распирающим, т.е. он отталкивает голень от стопы опорной ноги, покоящейся на поверхности перемещения. При принятых величинах параметров походки  $h, L, T$  подбирались угловые значения ненагруженной пружины  $\beta_1^0$  для обеспечения наилучшей точности в конце шага. В качестве критерия точности  $\rho$  было выбрано выражение

$$\rho = \sqrt{[x(T) - L/2]^2 + [y(T) - h]^2 + [x_{p2}(T) - L]^2 + [y_{p2}(T)]^2}, \quad (16)$$

представляющее собой точность реализации требуемого положения таза и переносной ноги в конце одиночного шага при периодической ходьбе. Аппарат считался нагруженным дополнительным грузом в 100 кг.

Таблица 1

Таблица выбора величины  $\beta_1^0$  и отвечающего ей критерия качества  $\rho$

$h$	$L$	$T$	$\beta_1^0$	$\rho$	$h$	$L$	$T$	$\beta_1^0$	$\rho$
86,5	50	0,7	-0,177	0,0015	82	60	0,7	-0,228	0,0205
85	-	-	-0,197	0,005	80	-	-	-0,248	0,009
84	-	-	-0,207	0,023	86,5	50	0,75	-0,16	-0,012
82	-	-	-0,228	0,0205	85	-	-	-0,18	0,0018
80	-	-	-0,248	0,02	84	-	-	-0,19	0,026
86,5	40	-	-0,171	0,0205	82	-	-	-0,21	0,032
85	-	-	-0,189	0,002	80	-	-	-0,247	0,0008
84	-	-	-0,2	0,0012	86,5	-	0,65	-0,195	0,014
82	-	-	-0,22	0,004	85	-	-	-0,217	0,0028
80	-	-	-0,239	0,009	84	-	-	-0,229	0,0005
86,5	55	-	-0,17	0,007	82	-	-	-0,25	0,0178
85	60	-	-0,188	0,0009	80	-	-	-0,268	0,0064
84	-	-	-0,204	0,014	-	-	-	-	-

Значения  $h, L, \rho$  здесь даны в сантиметрах, величина  $T$  – в секундах,  $\beta_1^0$  – в радианах. Заметим, что высота таза аппарата над поверхностью перемещения при полностью распрямленных ногах составляет 91,6 см. Наименьшее из указанных значений  $h$  отвечает состоянию легкого приседа (характерному для человека, несущего достаточно большой дополнительный груз).

Критерий  $\rho$  показывает точность достижения конечного положения таза и переносимой ноги. Ниже приведены графики угла наклона корпуса  $\psi$  и траектория переносимой ноги (рис. 3, 4), соответствующие параметрам, приведенным в первой строке табл. 1.

Представленные выше результаты вычислений говорят о возможности отработки алгоритмом управления желаемой кинематики с весьма высокой степенью точности, в частности поэтому на рис. 3 и 4 представленные графики желаемой и реальной траекторий совпадают.

При той же величине жесткости пружины алгоритм позволяет обеспечить с высокой точностью конечное положение таза и переносимой ноги и в случае нагрузки механизма меньшим весом, о чем говорят результаты, представленные в табл. 2.

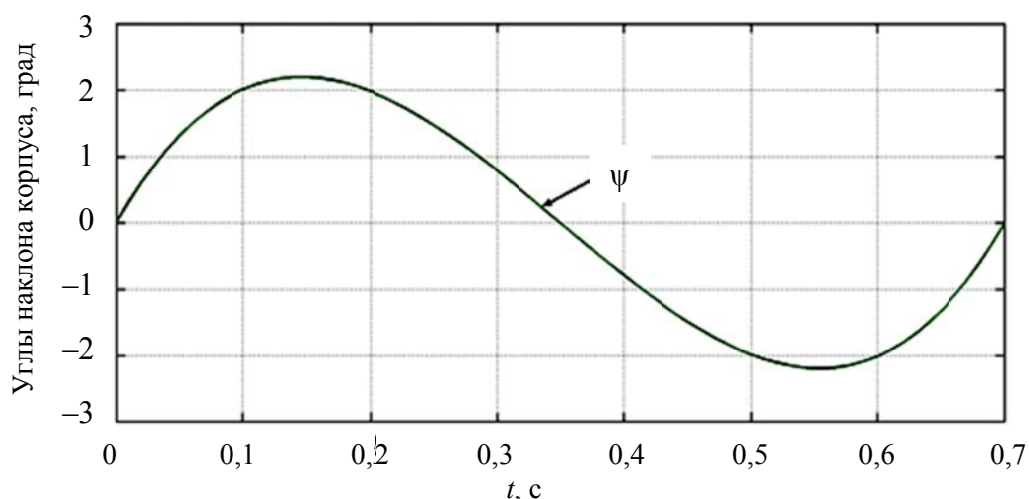


Рис. 3. График зависимости угла наклона корпуса от времени

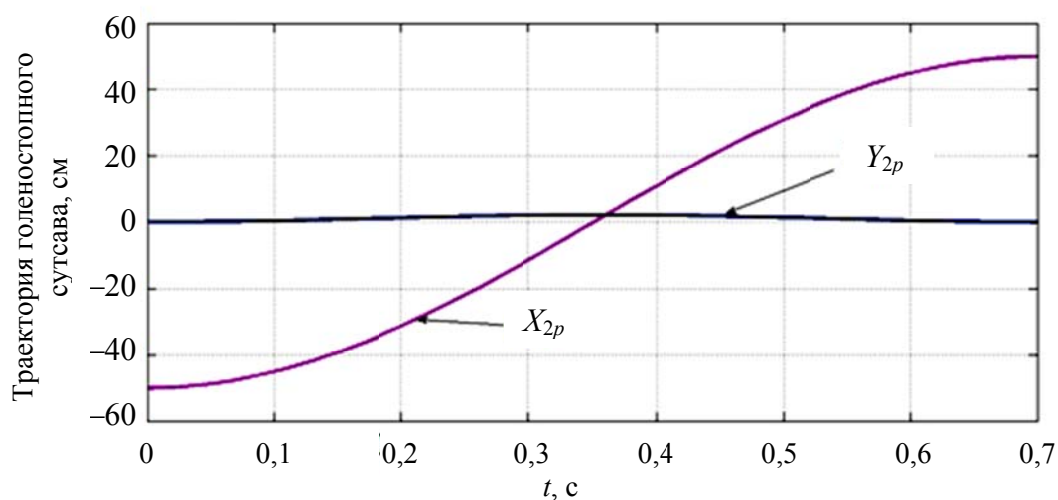


Рис. 4. График траектории переносимой ноги



Таблица 2

Таблица выбора величины  $\beta_1^0$  и отвечающего ей критерия качества  $\rho$  при разных значениях переносимого груза

Нагрузка, кг	$h$	$L$	$T$	$\beta_1^0$	$\rho$
75	86,5	50	0,7	-0,196	0,0016
–	84	–	–	-0,229	0,0008
–	82	–	–	-0,249	0,0038
50	86,5	–	–	-0,196	0,0054
–	84	–	–	-0,2287	0,0037
–	82	–	–	-0,249	0,0051

Обращает на себя внимание, что в сходных вариантах расчетов при разных нагрузках от 100 до 50 кг величины  $\beta_1^0$ , реализующие указанные в последних столбцах обеих таблиц малые значения  $\rho$ , практически неизменны. Таким образом, в широком диапазоне нагрузок можно использовать пружину постоянной жесткости, например  $c = -100$  Нм, немного подстраивая только параметр  $\beta_1^0$  по мере изменения кинематических параметров  $h$ ,  $L$ ,  $T$ . Отметим, что исследование выявило также высокую достижимую степень точности и в широком диапазоне величин жесткости от  $c = -200$  Нм до  $c = 100$  Нм, исключая случай полного отсутствия пружины, т.е. при жесткости  $c = 0$  и в окрестности этого значения. При  $c = 0$  и тех же величинах нагрузок и параметров  $h$ ,  $L$ ,  $T$  соответствующие значения  $\rho$  колеблются в полосе от 0,044 до 5,2 см, причем наименьшие значения  $\rho$ , как правило, отвечают только высоте  $h = 86,5$  см, т.е. когда движение осуществляется при достаточно высоком положении таза.

Несколько слов о диапазоне подстраиваемых величин  $\beta_1^0$ , при которых достигается хорошая точность реализации конечного положения. Согласно табл. 1 и 2 он равен  $[-0,2675; -0,16]$  рад, т.е. его ширина (разброс) при  $c = -100$  Нм порядка  $6^\circ$ . Однако высокая точность отработки реализуется в довольно узкой полосе величин  $\beta_1^0$  вблизи тех значений, которые указаны в вышеприведенных таблицах. Например, при реализации кинематических условий из верхней левой строки в табл. 1, значения  $\rho$  меньше условного «барьера», который примем в 0,25 см, только в полосе порядка  $1,8^\circ$  ( $0,031$  рад) вблизи указанного в таблице значения  $\beta_1^0 = 0,1768$ . Отметим также, что разброс при положительных значениях жесткостей  $c$  заметно больше, а полоса диапазона «барьера» несколько меньше, чем в случае отрицательных величин  $c$ . Так, например, при  $c = 100$  Нм разброс составляет около  $15^\circ$  ( $0,26$  рад), а ширина, отвечающая «барьеру», примерно  $1,6^\circ$  ( $0,028$  рад). Причина этого кроется, видимо, в том, что согласно графику управляющего стопного момента опорной ноги на номинале (см. рис. 2) отрицательные жесткости способны отразить его желаемое поведение заметно лучше, нежели положительные.

### СЛУЧАЙ СОВМЕСТНОЙ ДВУОПОРНОЙ И ОДНООПОРНОЙ ФАЗ ХОДЬБЫ

Рассмотрим один шаг аппарата, в котором сочетаются и двуопорная, и одноопорная фазы движения, точнее, будем считать, что при  $t \leq \tau$  обе ноги находятся на поверхности перемещения, а при  $\tau < t \leq T$  на опоре находится передняя нога, а задняя участвует в переносе.

Построение алгоритма управления на двуопорной фазе при наличии ненулевых воздействий  $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, R_{x1}, R_{y1}, R_{x2}, R_{y2}$  заметно сложнее, чем на одноопорной. Существенным изменениям по разным причинам подвергаются формулы (9) и (13). Поскольку теперь обе ноги находятся на поверхности перемещения, то соотношения (7) при  $x_{2p} = -L, y_{2p} = 0$  применимы и ко второй ноге, а формулы типа (13) описывают также и поведение углов  $\alpha_2, \beta_2$ . В связи с этим система соотношений (9), описывающая управление аппарата, изменяется и формально становится короче:

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}_{1\alpha}(t) &= \ddot{\alpha}_1(t) - \ddot{\alpha}_1^*(t) = (\lambda_{11} + \lambda_{12})(\dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_1^*(t)) - \lambda_{11}\lambda_{12}(\alpha_1(t) - \alpha_1^*(t)), \\ \ddot{\epsilon}_\psi(t) &= \ddot{\psi}(t) - \ddot{\psi}^*(t) = (\gamma_1 + \gamma_2)(\dot{\psi}(t) - \dot{\psi}^*(t)) - \gamma_1\gamma_2(\psi(t) - \psi^*(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

Хотя желаемые величины по углам  $\alpha_2^*, \beta_2^*$  определяются условиями двуопоры, их реальные значения теперь зависят от реальных  $\alpha_1, \beta_1$ , за формирование которых отвечают первое уравнение в (17) и момент в стопе первой опорной ноги  $M_{11}$ . Иными словами, достаточно точная реализация величин  $\alpha_2^*, \beta_2^*$  не является гарантией соблюдения двуопорной фазы. Требование строгого соблюдения двуопорной фазы говорит о необходимости построения более сложного алгоритма управления.

Воспользуемся уравнениями системы (1)–(6). Это семь соотношений относительно 17 переменных, коими являются вторые производные от  $x, y, \psi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  (всего семь) и  $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$  (всего десять). Для того чтобы найти все эти величины, необходимы еще десять дополнительных соотношений. Два из них даны в (17), еще два – это формулы для стопных пружин типа (14).

$$M_{11} = c(\beta_1 - \beta_1^0), \quad M_{21} = c(\beta_2 - \beta_2^0), \quad \beta_1^0 = \beta_2^0 = \beta_0. \quad (18)$$

Еще четыре соотношения можно получить, дважды дифференцируя соотношения типа (7) в случае неподвижных голеностопных суставов обеих ног:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{ip} &= \ddot{x} + 2a(\ddot{\alpha}_i \cos \alpha_i - \dot{\alpha}_i^2 \sin \alpha_i) + 2b(\ddot{\beta}_i \cos \beta_i - \dot{\beta}_i^2 \sin \beta_i) = 0, \\ \ddot{y}_{ip} &= \ddot{y} + 2a(\ddot{\alpha}_i \sin \alpha_i + \dot{\alpha}_i^2 \cos \alpha_i) + 2b(\ddot{\beta}_i \sin \beta_i + \dot{\beta}_i^2 \cos \beta_i) = 0, \quad i = 1; 2. \end{aligned} \quad (19)$$

В сумме условия (17)–(19) дают восемь дополнительных соотношений. Наконец, устраним динамическую неопределенность в системе (1)–(6) за счет предположения о постепенной загрузке передней ноги и, соответственно, разгрузке задней. Обозначим через  $R_x^\Sigma, R_y^\Sigma$  суммарные силы реакции опоры, действующие на аппарат в точка контакта с поверхностью. Введем коэффициенты распределения нагрузки  $\chi_1, \chi_2$ , меняющиеся на интервале  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \chi_1(t) &= (\tau - t) / \tau, \\ \chi_2 &= 1, 2\chi_1, \\ R_{2x} &= \chi_2 R_x^\Sigma, \\ R_{1x} &= (1 - \chi_2) R_x^\Sigma, \\ R_{2y} &= \chi_1 R_y^\Sigma, \\ R_{1y} &= (1 - \chi_1) R_y^\Sigma. \end{aligned} \quad (20)$$

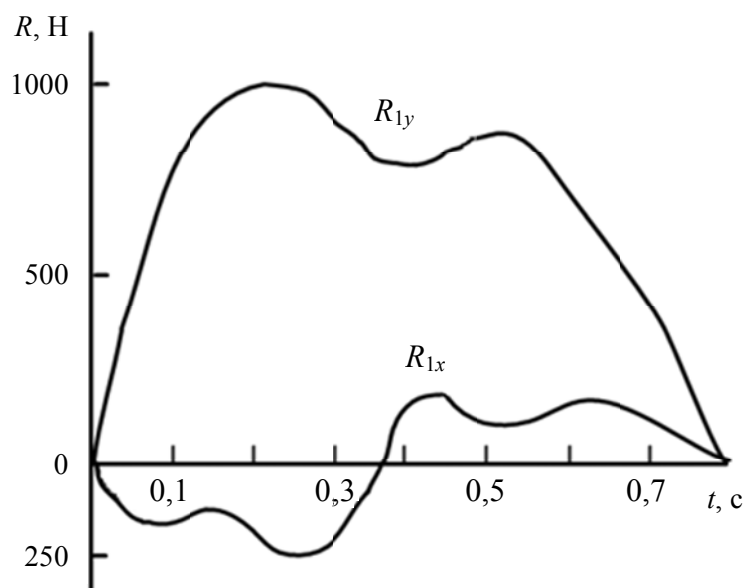


Рис. 5. Графики сил реакций в опорной ноге

Соотношения (20) показывают, что реакции  $R_x$ ,  $R_y$  в голеностопах ног распределены по линейному закону во времени, однако этот закон один по горизонтальной оси и другой – по вертикальной. Причина различия законов кроется в физиологической неодинаковости поведения по осям  $x$  и  $y$  реакций, например, в передней ноге: при ее постановке на поверхность горизонтальная реакция оказывает тормозящее действие и становится даже отрицательной, в то время как вертикальная реакция строго неотрицательна. На рис. 5 приведены графики [7] поведения вертикальной и горизонтальной реакции при ходьбе человека без груза.

Из рассмотрения этих графиков вытекает, что в момент постановки опорной ноги суммарные вертикальная и горизонтальная реакции положительны, в то время как горизонтальная реакция на опорной ноге отрицательна. Этот факт и был учтен при конструировании функций  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  в формуле (20).

В сумме соотношения (17)–(20) дают десять требуемых дополнительных соотношений, чем полностью замыкается весь алгоритм управления, а именно при задании констант  $c$ ,  $\beta_0$  система приведенных выше соотношений позволяет найти все управляющие моменты  $M_{i,j}$  ( $i=1;2$ ;  $j=2;3$ ).

Проведенные предварительные расчеты по представленной модели указывают на необходимость определенного уточнения модели углового движения корпуса в (12) при рассмотрении шага аппарата, на котором совмещаются одно- и двуопорная фазы. Угловое движение корпуса в этом случае оказывает, как выяснилось, сильное влияние на результаты расчетов.

Формула изменения во времени угла  $\psi$  (12) была получена в работе [1] при следующих предположениях: движение аппарата комфортабельное, одноопорное, ноги его невесомы, стопы отсутствуют. В результате в линейном приближении было проинтегрировано дифференциальное уравнение для  $\psi$  и найдено его периодическое с периодом  $T$  решение. Предполагая аналогично, что ноги аппарата невесомы, в линейном приближении из (1)–(6) имеем (значок «\*» ради краткости далее отброшен)

$$\begin{aligned}
 R_x^\Sigma &= K_r(\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi) \approx K_r \ddot{\psi}, \\
 R_y^\Sigma &= Mg - k_r(\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) \approx Mg, \\
 J\ddot{\psi} - gK_r \psi &= -M_{13} - M_{23}, M_{11} - M_{i3} + \\
 + R_{ix}(2a \cos \alpha_i + 2b \cos \beta_i) + R_{iy}(2a \sin \alpha_i + 2b \sin \beta_i) &= 0 \quad (i=1;2).
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

При  $0 \leq t \leq \tau$  на двуопорной фазе шага, ввиду  $x_{2p} = -L = -2\sigma$ ,  $y_{2p} = 0$ , имеем

$$\begin{aligned}
 2a \sin \alpha_1 + 2b \sin \beta_1 &= -x, \\
 2a \sin \alpha_2 + 2b \sin \beta_2 &= -x - 2\sigma, \\
 2a \cos \alpha_i + 2b \cos \beta_i &= y, \quad (i=1;2).
 \end{aligned}$$

Поэтому из последнего соотношения в системе (21) вытекает, что

$$M_{11} + M_{21} + hR_x^\Sigma - xR_y^\Sigma - 2\sigma\chi_1(t)R_y^\Sigma = M_{13} + M_{23}$$

или

$$(J + K_r h)\ddot{\psi} - gK_r \psi = -(M_{11} + M_{21}) + Mg(Vt + \sigma) - 2M\sigma g t / \tau. \tag{22}$$

В случае одноопорной фазы, когда  $\tau < t \leq T$ , данное выражение упрощается:

$$(J + K_r h)\ddot{\psi} - gK_r \psi = -(M_{11} + M_{21}) + Mg(Vt - \sigma). \tag{23}$$

Заметим, что в правых частях формул (22) и (23) стоят одновременно линейные функции времени и углов  $\beta_1, \beta_2$ . Это обстоятельство неудобно для аналитического исследования. Однако двуопорная фаза при ходьбе человека составляет малую часть общего времени шага и, кроме того, физиологические исследования говорят, что поведение каждого из углов  $\beta_1, \beta_2$  на ней носит почти линейный характер по времени. Будем считать поэтому, что сумма стопных моментов (а на одноопорной фазе это просто момент  $M_{11}$ , о приближенной линейности по времени которого говорилось выше) носит кусочно-линейный характер. Формулы (22) и (23) тогда можно объединить, записав

$$(J + K_r h)\ddot{\psi} - gK_r \psi = -Mg \begin{cases} -(Vt + \sigma) + 2t \frac{\sigma}{\tau} + (\tilde{\xi}_d t + \tilde{\eta}_d) / Mg, & t \leq \tau, \\ -(Vt - \sigma) + [\tilde{\xi}_s (t - \tau) + \tilde{\eta}_s] / Mg, & T \geq t > \tau, \end{cases} \tag{24}$$

где  $\tilde{\xi}_d, \tilde{\eta}_d$ , относящиеся к фазе двойной (*double*) опоры, и  $\tilde{\xi}_s, \tilde{\eta}_s$ , относящиеся к фазе одноопоры (*single*), косвенно характеризуют интенсивность суммарного стопного момента вместе со скоростью роста углов  $\beta_1, \beta_2$ ; по физической сути они являются параметрами алгоритма управления, поскольку отвечают за поведение «желаемого» угла  $\psi^*$ . Введем в рассмотрение величины

$$\omega^2 = \frac{gK_r}{J + hK_r}, \quad \mu = \frac{M\sigma}{K_r}, \quad v = \omega\tau$$

и обозначим

$$\begin{aligned}
 \xi_d &= \tilde{\xi}_d / Mg\sigma, \\
 \eta_d &= \tilde{\eta}_d / Mg\sigma, \\
 \xi_s &= \tilde{\xi}_s / Mg\sigma, \\
 \eta_s &= \tilde{\eta}_s / Mg\sigma.
 \end{aligned}$$

Тогда решение системы (24) на интервале двуопоры имеет вид

$$\psi = C_1 \operatorname{ch} \omega t + C_2 \operatorname{sh} \omega t - \mu \left[ \left( \frac{V}{\sigma} - \frac{2}{\tau} - \xi_d \right) t + 1 - \eta_d \right],$$

$$\dot{\psi} = \omega (C_1 \operatorname{sh} \omega t + C_2 \operatorname{ch} \omega t) - \mu \left( \frac{V}{\sigma} - \frac{2}{\tau} - \xi_d \right),$$

а в фазе одноопоры

$$\psi = D_1 \operatorname{ch} \omega t + D_2 \operatorname{sh} \omega t - \mu \left[ \left( \frac{V}{\sigma} t - 1 \right) - \xi_s (t - \tau) - \eta_s \right],$$

$$\dot{\psi} = \omega (D_1 \operatorname{sh} \omega t + D_2 \operatorname{ch} \omega t) - \mu \left( \frac{V}{\sigma} - \xi_s \right),$$

где  $C$  и  $D$  – произвольные постоянные. При  $t = \tau$  эти решения должны быть согласованы. Поэтому получаем

$$D_1 \operatorname{ch} \omega \tau + D_2 \operatorname{sh} \omega \tau = C_1 \operatorname{ch} \omega \tau + C_2 \operatorname{sh} \omega \tau + \mu (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s),$$

$$D_1 \operatorname{sh} \omega \tau + D_2 \operatorname{ch} \omega \tau = C_1 \operatorname{sh} \omega \tau + C_2 \operatorname{ch} \omega \tau + \mu \left( \frac{2}{\tau \omega} + \frac{\xi_d - \xi_s}{\omega} \right),$$

или

$$D_1 = C_1 - \mu \left( \frac{2}{v} + \frac{\xi_d - \xi_s}{\omega} \right) \operatorname{sh} v + \mu (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s) \operatorname{ch} v,$$

$$D_2 = C_2 + \mu \left( \frac{2}{v} + \frac{\xi_d - \xi_s}{\omega} \right) \operatorname{ch} v - \mu (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s) \operatorname{sh} v.$$

В итоге строящееся решение приобретает вид при  $t \leq \tau$

$$\psi(t) = C_1 \operatorname{ch} \omega t + C_2 \operatorname{sh} \omega t - \mu \left[ \left( \frac{V}{\sigma} - \frac{2}{\tau} - \xi_d \right) t + 1 - \eta_d \right],$$

при  $t > \tau$

$$\psi = C_1 \operatorname{ch} \omega t + C_2 \operatorname{sh} \omega t - \mu \left( \frac{2}{v} + \frac{\xi_d - \xi_s}{\omega} \right) (\operatorname{sh} v \cdot \operatorname{ch} \omega t - \operatorname{ch} v \cdot \operatorname{sh} \omega t) - \quad (25)$$

$$- \mu (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s) (\operatorname{sh} v \cdot \operatorname{sh} \omega t - \operatorname{ch} v \cdot \operatorname{ch} \omega t) - \mu \left[ \frac{V}{\sigma} t - 1 \right] + \mu [\xi_s (t - \tau) + \eta_s],$$

причем коэффициенты  $C_1, C_2$  должны определяться из условия его периодичности. Окончательно получаем следующие формулы для  $C_1$ , отвечающие условиям периодичности:

$$C_1 = \left\{ -\mu \left( \frac{1}{v} + \frac{\xi_d - \xi_s}{2\omega} \right) (\operatorname{sh} v \cdot \operatorname{ch} \omega T - \operatorname{ch} v \cdot \operatorname{sh} \omega T) - \frac{\mu}{2} (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s) (\operatorname{sh} v \cdot \operatorname{sh} \omega T - \operatorname{ch} v \cdot \operatorname{ch} \omega T) - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{2} \left[ \frac{V}{\sigma} T - 2 + \eta_d \right] + \frac{1}{2} \mu [\xi_s (T - \tau) + \eta_s] \right\} + \frac{\operatorname{sh} \omega T}{1 - \operatorname{ch} \omega T} \cdot \left\{ -\mu \left( \frac{1}{v} + \frac{\xi_d - \xi_s}{2\omega} \right) \cdot (\operatorname{sh} v \cdot \operatorname{sh} \omega T - \right. \\ \left. - \operatorname{ch} v \cdot \operatorname{ch} \omega T) - \frac{\mu}{2} (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s) \cdot (\operatorname{sh} v \cdot \operatorname{ch} \omega T - \operatorname{ch} v \cdot \operatorname{sh} \omega T) - \frac{\mu}{2\omega} \left( \frac{2}{\tau} + \xi_d - \xi_s \right) \right\}.$$

Аналогично для  $C_2$ :

$$C_2 = \left\{ -\mu \left( \frac{1}{v} + \frac{\xi_d - \xi_s}{2\omega} \right) (\text{shv} \cdot \text{ch}\omega T - \text{chv} \cdot \text{sh}\omega T) - \frac{\mu}{2} (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s) (\text{shv} \cdot \text{sh}\omega T - \text{chv} \cdot \text{ch}\omega T) - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{2} \left[ \frac{V}{\sigma} T - 2 + \eta_d \right] + \frac{1}{2} \mu [\xi_s (T - \tau) + \eta_s] \right\} \cdot \frac{\text{sh}\omega T}{1 - \text{ch}\omega T} + \left\{ -\mu \left( \frac{1}{v} + \frac{\xi_d - \xi_s}{2\omega} \right) \times \right. \\ \left. \times (\text{shv} \cdot \text{sh}\omega T - \text{chv} \cdot \text{ch}\omega T) - \frac{\mu}{2} (\xi_d \tau + \eta_d - \eta_s) (\text{shv} \cdot \text{ch}\omega T - \text{chv} \cdot \text{sh}\omega T) - \frac{\mu}{2\omega} \left( \frac{2}{\tau} + \xi_d - \xi_s \right) \right\}.$$

Данные соотношения являются заменой формулы (13) для случая совмещения одно- и двухопорной фаз движения. Параметры  $\xi_s$ ,  $\eta_s$ ,  $\xi_d$ ,  $\eta_d$ , используемые в модели (25) и отражающие приближенную физическую линейность во времени стопных моментов, могут рассматриваться одновременно как свободные коэффициенты настройки модели.

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА НА ШАГЕ С ОДНО- И ДВУОПОРОЙ

При численном исследовании данного режима ходьбы величина  $\tau$  полагалась  $\tau = 0,17$  с, что составляет приблизительно четвертую часть периода шага. Двухопорная фаза подразделялась на «чистую» двухопорную и «критическую», когда расстояние между голеностопом задней ноги и тазом превышало длину распрямленной ноги (или было близко к этому). Следует отметить, что при таком подходе «критическая» фаза заметно превышает по времени «чистую» двухопору, этот факт наблюдается и при физиологических исследованиях человека. В реальности «критическая» фаза предполагает сгибание стопы в плюснефаланговом суставе, что моделировалось подъемом по вертикали с переменной скоростью голеностопного сустава. При этом действие стопного момента на этой фазе в задней ноге сохраняется; на одноопорной фазе и стопный момент, и силы реакции опоры, естественно, считались равными нулю.

Исследование показало, что точность реализации алгоритмом, использующим четыре движителя, в смысле критерия (16) комфортабельного движения аппарата, существенно зависит от вида углового движения корпуса по  $\psi$ . Так, на модели углового движения (12) добиться приемлемых результатов не удалось. Модель же (25) дает заметно лучшие, технически приемлемые результаты. Так, например, в случае

$$h = 86,5 \text{ см}, \quad L = 50 \text{ см}, \quad T = 0,7 \text{ с}, \quad c = -100 \text{ Нм}, \quad \beta_0 = -0,21,$$

$$\xi_d = 0 \text{ с}^{-1}, \quad \eta_d = 160, \quad \xi_s = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \eta_s = 94$$

значение  $\rho$  составляет технически приемлемую величину 0,44 см. График функции  $\psi$  показан на рис. 6, корпус аппарата раскачивается вперед-назад в пределах порядка  $2^\circ$ , график периодичен. На пружинах другой жесткости при незначительном изменении параметров  $\beta_0$ ,  $\eta_s$  удается получить величины  $\rho$  такого же порядка: при  $c = -150$  Нм, когда  $\eta_s = 165$ ,  $\beta_0 = -0,223$ , величина  $\rho$  составляет 0,43 см, при  $c = -200$  Нм, когда  $\eta_s = 170$ ,  $\beta_0 = -0,23$ ,  $\rho$  составляет 0,425 см. Достаточно точно реализуется и периодическое движение корпуса по углу  $\psi$ . Сам угол  $\psi$  на данных решениях меняется в пределах  $\psi \in [-0,037; 0,033]$  рад.

Заметно лучшую точность реализации обеспечивает другая модель по углу  $\psi$ , также основанная на системе уравнений (1)–(6). От указанного выше подхода она отличается прежде всего модифицированной формой соотношений (17) на двухопорной фазе, вместо которых рассматривается

$$\ddot{\epsilon}_{1\alpha}(t) = \ddot{\alpha}_1(t) - \ddot{\alpha}_1^*(t) = (\lambda_{11} + \lambda_{12})(\dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_1^*(t)) - \lambda_{11}\lambda_{12}(\alpha_1(t) - \alpha_1^*(t)), \\ \ddot{\epsilon}_{1\beta}(t) = \ddot{\beta}_1(t) - \ddot{\beta}_1^*(t) = (\lambda_{11} + \lambda_{12})(\dot{\beta}_1(t) - \dot{\beta}_1^*(t)) - \lambda_{11}\lambda_{12}(\beta_1(t) - \beta_1^*(t)). \quad (26)$$

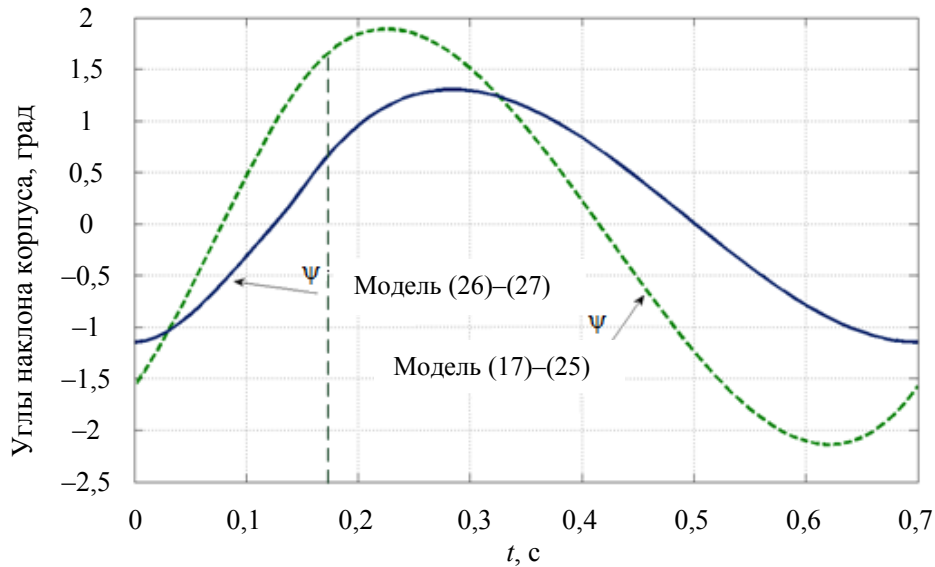


Рис. 6. Графики поведения угла наклона корпуса при разных моделях двуопоры

Тогда из дважды продифференцированных соотношений (7) мы имеем  $\ddot{x}, \ddot{y}$ . Поскольку аналогичные связи справедливы и для задней ноги, то известны и  $\ddot{\alpha}_2, \ddot{\beta}_2$ , а значит, и левые части в уравнениях (4), (5).

Пусть сумма их левых частей, распространенная на обе ноги, есть  $P$ . Складывая эти соотношения почленно, приходим к следующему условию:

$$P = (M_{11} + M_{12}) - (M_{13} + M_{23}) + yR_x^\Sigma - xR_y^\Sigma - \chi_1 LR_y^\Sigma. \quad (27)$$

В соотношении (27) члены суммарной реакции  $R_x^\Sigma, R_y^\Sigma$ , а также  $M_{13} + M_{23}$  (с учетом условия (3)) известны с точностью до членов, содержащих линейную зависимость от второй производной  $\ddot{\psi}$ . Сумма  $M_{11} + M_{21}$  задается формулой (19). Таким образом, условие (27) можно рассматривать как линейную связь между  $\ddot{\psi}$  и  $\chi_1$ . Если величину  $\chi_1$  задать в виде линейной зависимости от времени, например, согласно формуле (20), то это определит некоторую величину  $\ddot{\psi}$ , а затем по цепочке уравнений (1)–(6) можно найти как функции времени и все остальные неизвестные переменные данной системы, в том числе и все управляющие моменты. Для этого надо только задать начальные условия  $\psi_0, \dot{\psi}_0$ .

При переходе из фазы двуопоры в фазу одноопоры при  $t = \tau$  теперь приходится, опираясь на достигнутые к данному моменту значения  $\psi(\tau), \dot{\psi}(\tau)$ , строить прогнозирующую траекторию для фазы одноопоры, обеспечивающую периодичность колебаний корпуса. При численном исследовании задачи она задавалась формулой со свободными, подбираемыми коэффициентами  $A, B, C, D$ :

$$\psi = A \sin \omega(t - \tau) + B \cos \omega(t - \tau) + C(t - \tau) + D.$$

Приведем некоторые результаты численного исследования такого алгоритма. При тех же параметрах комфортабельного движения  $h, L, T$ , что и ранее, при  $c = -100$  Нм,  $\beta_0 = 0,3$  величина  $\rho$  составляет 0,157 см; график соответствующей функции  $\psi$  показан на рис. 6, ему отвечают следующие начальные значения (в радианах и радианах в секунду):  $\psi_0 = 0,02, \dot{\psi}_0 = 0$ . При  $c = -150$  Нм,  $\beta_0 = 0,11$  имеем  $\rho = 0,078$  см и примерно тот же диапазон колебаний по углу  $\psi$ ; при  $c = -200$  Нм,  $\beta_0 = 0,01$  имеем  $\rho = 0,036$  см, а  $\psi \in [-0,02; 0,024]$  рад. Из сказанного выше можно

сделать вывод, что наличие внутри периода шага еще и фазы двуопоры не сказывается существенно на точности предлагаемого алгоритма, найденного для случая одноопорной ходьбы, рассмотренного выше. Наличие двуопоры предоставляет человеку-оператору при известной тренированности определенный выбор угловых движений корпуса, при которых его воздействие на процесс движения может быть сведено к минимуму.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00800-а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. – М.: Наука, 1984. – 286 с.
2. Белецкий В.В. Плоские линейные модели двуногого шагания. – М., 1984. – (Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, № 95).
3. Белецкий В.В., Чудинов П.С. Нелинейные модели двуногой ходьбы. – М., 1975. – (Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, № 19).
4. Белецкий В.В., Чудинов П.С. Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы // Механика твердого тела. – 1977. – № 1. – С. 25–35.
5. Лавровский Э.К., Воронов А.В. Определение масс-инерциальных характеристик ноги человека // Физиология человека. – 1998. – № 2. – С. 91–101.
6. Лавровский Э.К., Письменная Е.В. Алгоритмы управления экзоскелетом нижних конечностей в режиме одноопорной ходьбы по ровной и ступенчатой поверхностям // Мехатроника, Автоматизация, Управление. – 2014. – № 1. – С. 44–51.
7. Уткин В.Л. Биомеханика физических упражнений. – М.: Просвещение, 1989. – 207 с.
8. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
9. Mosher R. Handyman to Hardiman. – Detroit, 1967.

## ON THE LOWER LIMB EXOSKELETON REGULAR LOCOMOTION UNDER INPUT CONTROL DEFICIT

**E.K. Lavrovsky, E.V. Pismennaya (Moscow, Russia)**

The locomotion of the operator in lower limb exoskeleton that carries additional weight is a subject of the present paper. It is presumed that the exoskeleton works with 4 motors: in knee and hip joints. The foot joints are equipped with torsional springs with determined elastic behavior that influences the operation of the above-mentioned human-mechanical system. The regimes of the flat comfortable locomotion are examined herein. At first, the focus is made on the regime of single support walking. Taking into account the motion of the selected type, control algorithms that provide the desired quality of movement are synthesized in an analytical form. It is shown that there is a wide range of spring stiffness in the feet, which allows us with a high precision of performance to obtain the gait periodicity conditions at different additional loads on exoskeleton. If the additional load weight is modified, the slight adjustment of average values of the springs is required. Then, the combined regime of single support and double support phases is taken under consideration. It is well known that the studies on double support phase are associated with ambiguity of determining the reaction forces and moments at the joints of the inverse problem of dynamics. Additional relations to eliminate this uncertainty are suggested, based on the task of linear time distribution reaction functions in the feet of both legs. The influence of the needed angle on the accuracy of torso inclination in the formation of periodic solutions of the control algorithm is investigated. The two approaches to



ensure periodicity of walking mode, the combinations of single and double support phases have been investigated: the first one is based on the linearization of the dynamic equations and the assumption of weightlessness of legs. This desired law of tilting body got practically acceptable accuracy results. Further, study was carried out to improve the accuracy of the periodic motion, within the non-linear equations there was found another law describing angle of the torso, providing more accurate movements. The present work results in analytical synthesis of control laws with a natural human locomotion that does not require considerable muscular effort, except to maintain balance.

**Key words:** exoskeleton, mobile robots, nonlinear control, input control actions deficit.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

При численном исследовании задачи в качестве модели тела человека была рассмотрена следующая среднестатистическая модель [5]: рост 174,7 см, вес 73,4 кг; длины бедер, голени и корпуса соответственно равны 51,4; 40,2 и 74,1 см; их веса соответственно 9; 2,9 и 47,6 кг (вес стоп – каждая по 1 кг, высота голеностопного сустава над поверхностью 9 см);  $a_* = 24,5$  и  $b_* = 16,1$  см. Корпус человека считался равномерно распределенным по весу, исходя из этого подсчитывались величины  $K_r$  и  $J$ . Значения других моментов инерции: центральный момент инерции бедра  $0,1662 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , центральный момент инерции голени  $0,0357 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Масса экзоскелетона была принята равной 15 кг: 5 кг – вес корпуса, по 2,5 кг – вес каждого из бедер и голени, причем их масса всюду распределена равномерно. Считалось дополнительно, что на корпусе экзоскелетона на высоте 45 см от таза закреплен груз весом от 50 до 100 кг. При исследовании использовались также следующие величины параметров математической модели:  $\delta^2 = 2 \text{ см}$ ,  $\lambda_1 = \gamma_1 = -7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\lambda_2 = \gamma_2 = -5 \text{ с}^{-1}$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Ниже приведен вид матриц  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}(z)$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}(z)$ :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -K_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_a - 2aM & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_b - 2bM & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_b \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} J & -2aK_r \cos(\alpha_1 + \psi) & 0 & \dots \\ 2aK_r r \cos(\alpha_1 + \psi) & 4a(aM - K_a) + J_a^* & -2aK_a \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & \dots \\ 0 & -2aK_a \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & J_a^* & \dots \\ 2bK_r \cos(\beta_1 + \psi) & \cos(\alpha_1 - \beta_1)(4abM - 2aK_b - 2bK_a + J_{ab}) & -2bK_a \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \dots \\ 0 & -2aK_b \cos(\alpha_1 - \beta_2) & J_{ab} \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -2aK_b \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots \\ \dots & 0 & J_{ab} \cos[\alpha_2 - \beta_2] & \dots \\ \dots & -1 & -2bK_b \cos(\beta_1 - \beta_2) & \dots \\ \dots & 0 & J_b & \dots \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2bK_r \cos(\beta_1 + \psi) \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -\cos(\alpha_1 - \beta_1)(4abM - 2aK_b - 2bK_a + J_{ab}) \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2bK_a \cos(\alpha_2 - \beta_1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4b(bM - K_b) - J_b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2bK_b \cos(\beta_1 - \beta_2) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 2aK_r \sin(\psi + \alpha_1) & 0 & \dots \\ 2aK_r \sin(\alpha_1 + \psi) & 0 & -2aK_a \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & \dots \\ 0 & 2aK_a \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & 0 & \dots \\ 2bK_r \sin(\beta_1 + \psi) & -\sin(\alpha_1 - \beta_1)(4abM - 2aK_b - 2bK_a + J_{ab}) & 2bK_a \sin(\alpha_2 - \beta_1) & \dots \\ 0 & 2aK_b \sin(\alpha_1 - \beta_2) & -J_{ab} \sin(\alpha_2 - \beta_2) & \dots \\ \dots & 2bK_r \sin(\psi + \beta_1) & 0 & \dots \\ \dots & \sin(\alpha_1 - \beta_1)(4abM - 2aK_b - 2bK_a + J_{ab}) & -2aK_b \sin(\alpha_1 - \beta_2) & \dots \\ \dots & -2bK_a \sin(\alpha_2 - \beta_1) & J_{ab} \sin(\alpha_2 - \beta_2) & \dots \\ \dots & 0 & -2bK_b \sin(\beta_1 - \beta_2) & \dots \\ \dots & 2bK_b \sin(\beta_1 - \beta_2) & 0 & \dots \end{bmatrix}.$$

Получено 27 декабря 2013