



УДК 531/534: [57+61]

УТОЧНЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ТРАБЕКУЛЯРНОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ ОТ ОБЪЕМНОГО СОДЕРЖАНИЯ МАТРИКСА

Ю.В. Акулич¹, А.Ю. Акулич², А.С. Денисов³, П.С. Шайманов¹, А.Ф. Шулятьев¹

¹ Кафедра теоретической механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: a.u.v@theormech.pstu.ac.ru

² Отделение травматологии, «Медсанчасть № 9 им. М.А. Тверье», Россия, 614990, Пермь, ул. Братьев Игнатовых, 2, e-mail: akulichanton@perm.raid.ru

³ Кафедра травматологии, ортопедии и военно-полевой хирургии Пермской государственной медицинской академии имени акад. Е.А. Вагнера, Россия, 614990, Пермь, ул. Петропавловская, 26, e-mail: rector@psma.com

Аннотация. Зависимость модуля упругости трабекулярной костной ткани от объемного содержания матрикса используется при моделировании процесса адаптации костной ткани как изотропной среды, поскольку устанавливает связь механических свойств с параметрами структуры. Известные зависимости имеют вид степенной функции модуля упругости материала трабекулы и объемного содержания матрикса. Они чувствительны к локализации губчатой костной ткани и удовлетворяют определяющему соотношению Ковина (*Cowin*, 1976). Однако они обладают неопределенной погрешностью, поскольку не учитывают ориентацию трабекул, влияющую на выбор модуля упругости материала трабекулы, а также свойство минимальности структуры (Бэрджери – Ру, *Berjery – Roux*, 1895), согласно которому максимальная прочность достигается при минимальных затратах материала, т.е. плотности. Цель настоящего исследования – уточнение данной зависимости, основанное на учете этих фундаментальных свойств строения трабекулярной костной ткани. В соответствии с законом Вольфа (*Wolff*, 1892) трабекулы костной ткани в результате структурной адаптации ориентированы продольной осью вдоль траектории первого главного напряжения. Этим обеспечивается наибольшая прочность структуры, и, следовательно, модуль упругости материала трабекулы равен модулю упругости трабекулы в направлении ее продольной оси. Для учета свойства минимальности показатель степенной функции в соотношении для упругого модуля материала представляется линейной функцией от объемного содержания матрикса, где коэффициент, стоящий перед объемным содержанием матрикса, находится из условия предполагаемой (в силу завершенности эволюции) однородности критерия оптимальности для минимальной структуры в рассматриваемой области костной ткани. Критерий оптимальности заключается в стремлении к максимуму отношения предела прочности к плотности (Образцов, 1989). Учет строения трабекулярной структуры приводит к возрастанию локального и среднего по области проксимального отдела бедра модуля упругости (на 84%) и уменьшению относительного стандартного отклонения (на 40%), не изменяя характер распределения.

Ключевые слова: проксимальный отдел бедра, модуль упругости, трабекулярная костная ткань, структура, объемное содержание матрикса, критерий минимальности.

© Акулич Ю.В., Акулич А.Ю., Денисов А.С., Шайманов П.С., Шулятьев А.Ф., 2014

Акулич Юрий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермь

Акулич Антон Юрьевич, к.м.н., травматолог клиники травматологии и ортопедии, Пермь

Денисов Александр Сергеевич, д.м.н., заведующий кафедрой травматологии, ортопедии и военно-полевой хирургии, Пермь

Шайманов Павел Сергеевич, магистрант кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермь

Шулятьев Андрей Федорович, аспирант кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермь

ВВЕДЕНИЕ

Указанная в заголовке статьи зависимость является необходимой при моделировании процесса адаптации костной ткани, поскольку устанавливает связь механических свойств с параметрами структуры. Известные зависимости, полученные путем решения обратных задач теории упругости для моделей трабекулярной костной ткани, имеют вид степенной функции [5, 6]

$$E = E_m \xi_m^p, \quad (1)$$

где E_m , ξ_m – модуль упругости материала трабекулы и объемное содержание матрикса соответственно; p – константа, подбираемая экспериментально. Равенство (1) удовлетворяет определяющему соотношению [4], однако не учитывает фундаментальные свойства трабекулярной структуры: 1) ориентацию трабекул (закон Вольфа [12]), влияющую на выбор величины E_m ; 2) принцип минимальности структуры (минимальная плотность при наибольшей прочности [9]). Это обстоятельство является причиной неопределенной методической погрешности равенства (1).

Целью настоящего исследования является уточнение зависимости (1), основанное на учете фундаментальных положений о свойствах структуры живой трабекулярной костной ткани.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В соответствии с законом Вольфа в результате структурной адаптации к изменяющейся нагрузке трабекулы костной ткани ориентируются продольной осью вдоль траектории первого главного напряжения. Этим обеспечивается наибольшая прочность структуры, и, следовательно, после завершения процесса адаптации модуль упругости E_m равен модулю упругости трабекулы в продольном направлении E_1 , тогда как в течение процесса адаптации величина модуля E_m определяется средним значением $E_m = E_c = (E_1 + E_2 + E_3)/3$, где E_2 , E_3 – модули упругости матрикса в поперечных направлениях трабекулы. Модуль упругости E_1 материала трабекулы (матрикса) в направлении ее продольной оси, определенный измерением твердости сухих образцов, равен 19,4 ГПа, а в поперечном направлении – 15 ГПа [8]. Поскольку влажность снижает жесткость сухого матрикса костной трабекулы не менее чем в 1,2 раза [10], то величины модулей упругости влажной трабекулы в продольном и поперечном направлениях принимаются равными 16,2 и 12,5 ГПа соответственно. Следовательно, получим $E_c = (E_1 + 2E_2)/3 = 13,7$ ГПа.

В то же время согласно принципу минимальности структуры трабекулярной костной ткани (*Berjery – Roux*) необходимая наибольшая прочность достигается при ее минимальной массе. Критерий оптимальности, следующий из данного принципа, формулируется следующим образом: «...в эволюционном процессе структура костей приближается к оптимальной с точки зрения критерия

$$z(\vec{x}) = \frac{\sigma^*(\vec{x})}{\rho(\vec{x})} \rightarrow z_{\max}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \quad (2)$$

где σ^* , ρ – предел прочности и плотность соответственно [2]». При этом, по нашему мнению, эволюция осуществляется путем изменения клетками таких параметров структуры, как: а) угол между продольной осью трабекулы и направлением касательной к траектории первого главного напряжения; б) объемное содержание матрикса.

Ввиду завершенности эволюции величина z_{\max} в соотношении (2) принимается одинаковой в каждой точке рассматриваемой области Ω трабекулярной костной ткани и может быть обозначена как $z_{\max} = \bar{z}$.

Однако в силу погрешностей используемых расчетных моделей структуры и плотности костной ткани критерий z_{\max} имеет разные значения в различных точках области Ω , т.е. $z_{\max} = z_{\max}(\vec{x})$. В этом случае величина \bar{z} определяется приближенно как среднее по рассматриваемой области значение

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_{\max}(\vec{x}_j), \quad (3)$$

где N – число исследуемых точек в области Ω (рис. 1), а разброс значений $z_{\max}(\vec{x}_j), j = \overline{1, N}$ относительно \bar{z} оценивается величиной стандартного отклонения

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (z_{\max}(\vec{x}_j) - \bar{z})^2}. \quad (4)$$

Материалом данного исследования является аутопсийный фрагмент проксимального отдела бедра взрослого мужчины. Очевидно, что формирование трабекулярной структуры фрагмента завершено, и она является минимальной, поэтому предполагается, что в любой точке фрагмента (см. рис. 1) критерий минимальности имеет максимальное среднее по объему фрагмента значение \bar{z} .

Формулировка критерия $z_{\max} = z_{\max}(\vec{x})$ осуществляется на основании экспериментальных исследований прочности при сжатии образцов губчатой костной ткани, взятых из различных участков проксимального отдела бедра взрослого человека, которые показали, что предел прочности пропорционален локальному модулю упругости костной ткани [3]:

$$\sigma^*(\vec{x}_j) = k E(\vec{x}_j), j = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где коэффициент пропорциональности k находится из условия того, что при среднем значении модуля упругости губчатой костной ткани 500 МПа предел прочности на сжатие равен 5,5 МПа [11], т.е. $k = 0,011$.

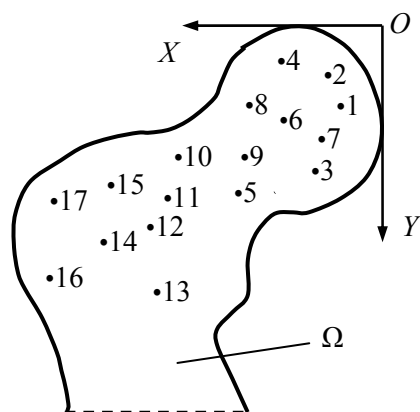


Рис. 1. Схематичное расположение 17 точек, в которых измерялись объемная оптическая плотность, физическая плотность и объемное содержание матрикса трабекулярной костной ткани аутопсийного фрагмента проксимального отдела бедра (рассматриваемая область Ω)

Как отмечалось выше, величина показателя p в равенстве (1) зависит от места отбора образцов из кости (или скелета), поскольку функциональные нагрузки неодинаковы в различных участках кости и стимулируют различные структурные характеристики костной ткани. В связи с этим логично предположить, что показатель p в соотношении (1) является функцией объемного содержания матрикса, например линейной:

$$p = a\xi_m + b, \quad (6)$$

где a – константа, подлежащая определению, а константа $b = 1$ в силу определяющего соотношения для напряжения [4]

$$\tilde{\sigma} = \xi_m \tilde{C}(\xi_m) \cdot \tilde{\varepsilon}, \quad (7)$$

где $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{C}(\xi_m)$ – тензоры напряжений, деформации и жесткости костной ткани соответственно.

Из соотношений (5), (6) следует выражение

$$\sigma^* = k E_1(\xi_m)^{a\xi_m + b}, \quad (8)$$

где σ^* , ξ_m – функции $\bar{x}_j, j = \overline{1, N}$.

Объемное содержание матрикса в равенстве (8) определим, полагая костную ткань двухфазной средой, состоящей из твердого матрикса и внутритканевой жидкости. В соответствии с правилом смеси плотность костной ткани

$$\rho(\bar{x}_j) = \xi_m(\bar{x}_j)\rho_m + (1 - \xi_m(\bar{x}_j))\rho_{ж}, \quad (9)$$

где $\rho_m, \rho_{ж}$ – плотность матрикса (1,78 г/см³) и воды (1,0 г/см³) соответственно [7]. Из (9) следует равенство

$$\xi_m(\bar{x}_j) = \frac{\rho(\bar{x}_j) - \rho_{ж}}{\rho_m - \rho_{ж}}, \quad (10)$$

где плотность $\rho(\bar{x}_j)$ костной ткани представляется линейной функцией объемной оптической плотности $\rho_{\text{опт}}(\bar{x}_j)$, определяемой по уровню яркости белого цвета в точке \bar{x}_j рентгенограммы [1], в виде

$$\rho(\bar{x}_j) = 0,779 + 1,337\rho_{\text{опт}}(\bar{x}_j), \quad j = \overline{1, N}, \quad (11)$$

здесь плотность измеряется в г/см³.

Уровни белого и объемная оптическая плотность $\rho_{\text{опт}}(\bar{x}_j), j = \overline{1, 17}$ в точках рентгенограммы фрагмента бедра (см. рис. 1) представлены в табл. 1.

Неизвестная константа a линейного представления (6) ввиду равенств (2) и (8) входит в выражения (3), (4). Следовательно, коэффициент вариации величин $z_{\text{max}}(\bar{x}_j), j = \overline{1, N}$ является функцией a :

$$C(a) = \frac{S(a)}{\bar{z}(a)}. \quad (12)$$

Таблица 1

Характеристики рентгенограммы фрагмента бедра в исследуемых точках

Номер точки	X, мм	Y, мм	Уровень белого	$\rho_{\text{опт}}$, кг/м ³	ρ , кг/м ³	ξ_m
1	39	41	122	0,5	1,45	0,45
2	42	34	172	0,59	1,57	0,57
3	51	50	119	0,5	1,45	0,45
4	57	21	170	0,63	1,62	0,62
5	51	51	106	0,42	1,34	0,34
6	67	32	136	0,38	1,29	0,29
7	46	44	163	0,48	1,42	0,42
8	68	27	125	0,32	1,21	0,21
9	73	45	118	0,5	1,45	0,45
10	77	48	90	0,34	1,23	0,23
11	82	53	91	0,38	1,29	0,29
12	89	57	129	0,57	1,54	0,54
13	91	77	133	0,57	1,54	0,54
14	96	64	132	0,57	1,54	0,54
15	102	54	138	0,57	1,54	0,54
16	104	76	140	0,57	1,54	0,54
17	109	68	152	0,62	1,61	0,61

Поскольку коэффициент вариации характеризует относительную величину стандартного отклонения, константу a целесообразно определить как величину оптимальную $a_{\text{опт}}$, при которой функция (12) достигает минимума, т.е. при $a = a_{\text{опт}}$ критерий минимальности структуры $z_{\text{max}}(\vec{x})$ имеет наименьшее отклонение от среднего значения \bar{z} .

Из физических соображений ясно, что с ростом величины объемного содержания матрикса модуль упругости костной ткани должен возрастать, поэтому из соотношения (6) следует условие, ограничивающее область поиска $a_{\text{опт}}$ строго положительными значениями вида

$$a \xi_m(x_j) > 0, j = \overline{1, N}. \quad (13)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Из графика (рис. 2) влияния величины константы a на величину коэффициента вариации $C(a)$ (12) распределения критериев минимальности $z_{\text{max}}(\vec{x}_j), j = \overline{1, N}$ в рассматриваемых точках аутопсийного фрагмента бедра следует, что минимальное значение коэффициента вариации достигается на нижней границе диапазона возможного изменения константы a (0,07–2,07), заданного условием (13), следовательно, $a_{\text{опт}} = 0,07$.

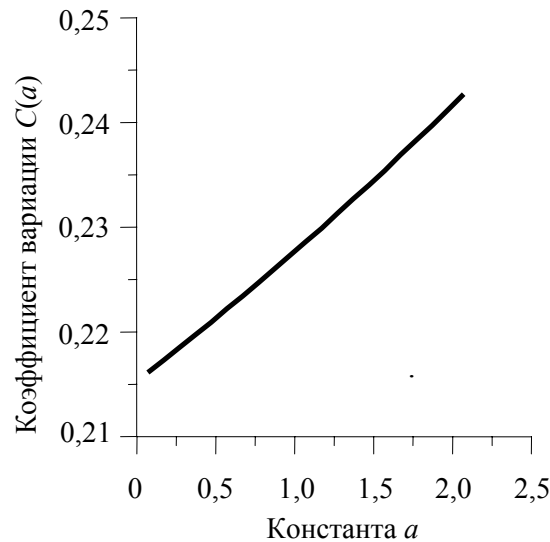


Рис. 2. Зависимость коэффициента вариации распределения критерия минимальности трабекулярной структуры в аутопсийном фрагменте проксимального отдела бедра от величины константы a степенной функции (7). Минимальное значение коэффициента вариации, равное 0,216, достигается при $a_{\text{опт}} = 0,07$

Вычисленные при $a_{\text{опт}}$ значения критерия минимальности структуры костной ткани $z_{\text{max}}(\bar{x}_j), j = \overline{1, N}$ в исследуемом фрагменте бедра представлены на диаграмме (рис. 3) и характеризуют уровень и неоднородность распределения величины критерия $z_{\text{max}}(\bar{x})$. Интересно отметить, что характер неоднородности критерия $z_{\text{max}}(\bar{x})$ в исследуемом фрагменте кости совпадает с характером неоднородности объемного содержания матрикса (см. табл. 1) в нем.

Среднее значение критерия минимальности структуры \bar{z} равняется 0,053 МНм/кг, а стандартное отклонение $S = 0,011$ МНм/кг, что составляет ~21% от среднего значения.

Важно подчеркнуть, что при вычислении распределения критерия минимальности z_{max} , представленного на диаграмме (см. рис. 3), показатель p согласно соотношению (6) изменяется в интервале 1,014–1,043, т.е. оказывается на ~40% меньшим, чем экспериментально установленная (без учета специфических свойств структуры) величина 1,7 [5]. К тому же величина $p = 1,7$ реализуется при изменении константы a в интервале 1,1–2,5, т.е. при существенно больших значениях, чем $a_{\text{опт}} = 0,07$. Как видно из графика (см. рис. 2), в данном интервале изменения константы a относительное стандартное отклонение превышает 22,5% и более. Следовательно, оптимальное значение $a_{\text{опт}} = 0,07$ обеспечивает наилучшее приближение к \bar{z} , что обосновывает принятую выше гипотезу об однородности распределения критерия минимальности трабекулярной структуры.

Для оценки влияния учета базовых свойств трабекулярной структуры (*Wolff, Berjery – Roux*) на величину и распределение модуля упругости в аутопсийном фрагменте проксимального отдела бедра выполнялись вычисления при $a_{\text{опт}} = 0,07$ по трем формулам: 1 – $E = E_c \xi_{\Sigma_M}^{1,7}$; 2 – $E = E_c \xi_{\Sigma_M}^{0,07 \xi_{\Sigma_M}}$; 3 – $E = E_1 \xi_{\Sigma_M}^{0,07 \xi_{\Sigma_M}}$ (рис. 4).

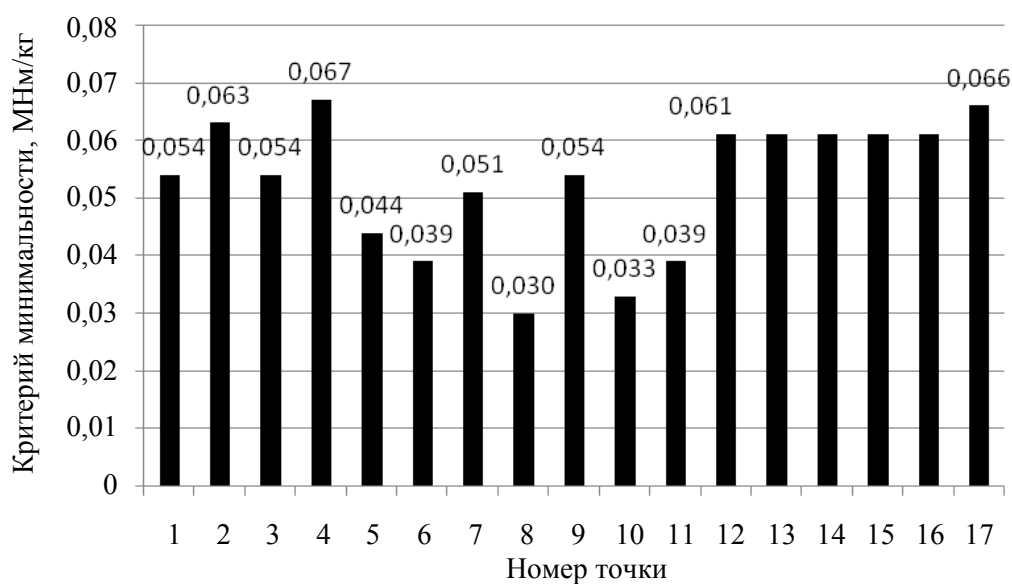


Рис. 3. Значения максимального критерия минимальности трабекулярной структуры z_{\max} в выбранных точках аутопсийного фрагмента проксимального отдела бедра при минимизирующем неоднородность поля критерии z_{\max} и значении константы $a_{\text{опт}} = 0,07$. Среднее значение критерия $\bar{z} = 0,053$ МНм/кг, стандартное отклонение $S = 0,011$ МНм/кг

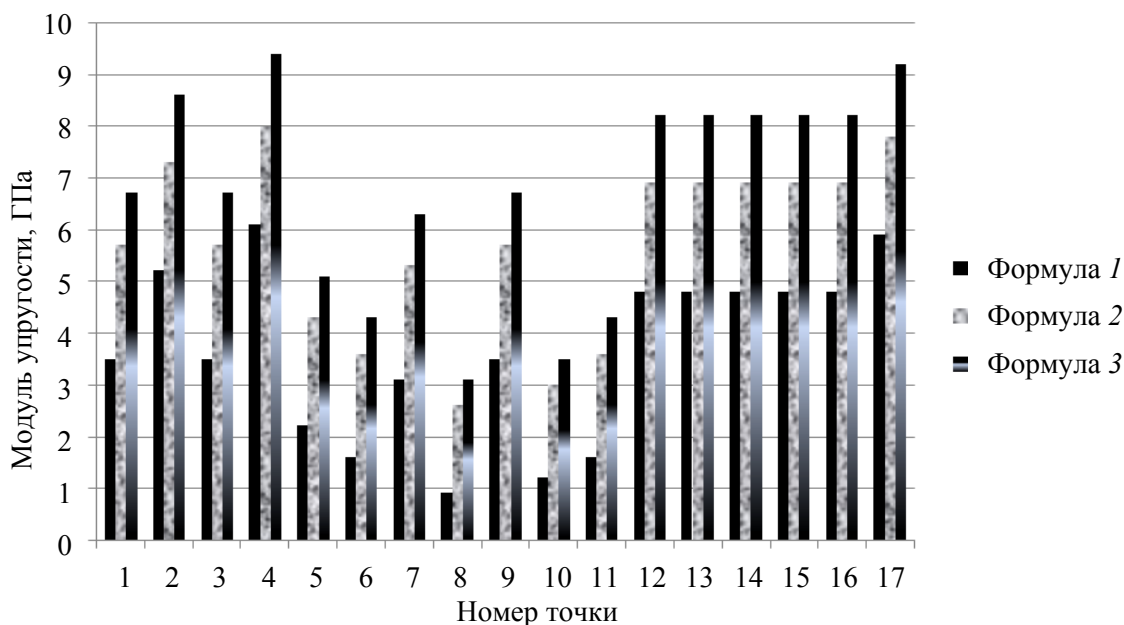


Рис. 4. Распределение модуля упругости в аутопсийном фрагменте проксимального отдела бедра вычислялись при $a_{\text{опт}} = 0,07$ по трем формулам: 1 – $E = E_c \xi_M^{1,7}$; 2 – $E = E_c \xi_M^{0,07 \xi_M}$; 3 – $E = E_1 \xi_M^{0,07 \xi_M}$

Таблица 2

Средние значения \bar{E} и стандартные отклонения (абсолютные S и в процентах по отношению к среднему) распределений модуля упругости, представленных на диаграмме (рис. 4)

Формула	\bar{E} , ГПа	S , ГПа	%
$1 - E = E_c \xi_m^{1,7}$	3,7	1,6	43,0
$2 - E = E_c \xi_m^{0,07 \xi_m}$	5,7	1,7	29,8
$3 - E = E_1 \xi_m^{0,07 \xi_m}$	6,8	2,0	29,4

Данные диаграммы (см. рис. 4) показывают одинаковый характер распределения модуля упругости, вычисленного по всем трем формулам. Однако локальная величина модуля упругости существенно зависит от используемой формулы. Из сравнения результатов расчета по формулам 1 и 2 следует, что учет только свойства минимальности трабекулярной структуры 2 приводит к росту уровня локального модуля упругости в интервале $\sim 1,3 \dots 2,9$ раза в зависимости от величины ξ_m в данной точке. Большим значениям из этого диапазона (например, точка 8) соответствуют меньшие значения локального модуля упругости из данного диапазона (для точки 8 в 2,9 раза). Учет ориентации трабекул вдоль траектории главного напряжения 3 увеличивает величину локального модуля упругости, вычисленного по 2, в E_1 / E_c раз. Сравнение случаев 2 и 3 со случаем 1 отражает более сильное влияние ξ_m в 2 и 3 ввиду меньшей величины показателя $a_{\text{онт}} \xi_m + 1$ (не превышает величины 1,043) у основания $\xi_m < 1,0$ по сравнению с величиной показателя, равного 1,7 в 1.

Средние значения \bar{E} и стандартные отклонения (абсолютные S и в процентах по отношению к среднему) распределений модуля упругости (см. рис. 4) представлены в табл. 2.

Из сравнения данных первых двух столбцов табл. 2 следует, что учет только свойства минимальности трабекулярной структуры приводит к увеличению среднего значения модуля упругости \bar{E} с 3,7 до 6,4 ГПа (в $\sim 1,7$ раза) и уменьшению относительного стандартного отклонения с 43,0 до 29,8% (в $\sim 1,4$ раза). Рост величины \bar{E} объясняется ростом локального модуля упругости во фрагменте кости. Существенное снижение стандартного отклонения достигается за счет минимизации относительного стандартного отклонения $C(a)$ и применения $a_{\text{онт}}$.

Из сравнения данных второй и третьей строк табл. 2 видно, что учет ориентации продольной оси трабекул вдоль траектории главных напряжений приводит к росту величины среднего по области модуля упругости \bar{E} с 5,7 до 6,8 ГПа (в $\sim 1,19$ раза). Такое увеличение обусловлено отношением E_1 / E_c , поскольку $E_1 / E_c = 16,2 / 13,7 \approx 1,19$. При этом стандартное отклонение также возрастает при измерении в абсолютных величинах в $\sim 1,2$ раза, а при измерении в относительных величинах (в процентах) незначительно уменьшается.

Таким образом, учет фундаментальных свойств трабекулярной костной ткани как изотропной среды приводит к существенному уточнению экспериментальной зависимости ее модуля упругости от объемного содержания матрикса. Наиболее сильное уточняющее влияние оказывает учет свойства минимальности трабекулярной структуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статья посвящена проблеме влияния структуры трабекулярной костной ткани на ее механические свойства. На примере костной ткани аутопсийного фрагмента проксимального отдела бедра изучается влияние базовых свойств структуры на модуль упругости. Костная ткань предполагается изотропным биоматериалом. К базовым свойствам относятся: 1) ориентация продольной оси трабекул вдоль траектории главных напряжений (*Wolff*); 2) свойство минимальности трабекулярной структуры (*Berjery – Roux*).

Результаты выполненных исследований приводят к следующим выводам:

1. Используемые в настоящее время зависимости модуля упругости от объемного содержания матрикса не учитывают влияние базовых свойств структуры, вследствие чего они не обладают достаточной точностью (методическая ошибка вычисления среднего по области значения модуля упругости \bar{E} составляет не менее 80%).

2. Учет ориентации продольной оси трабекул вдоль траектории главных напряжений приводит к росту величины среднего по области фрагмента модуля упругости на 18%, при этом стандартное отклонение также возрастает (на 10%).

3. Обоснована гипотеза об однородности распределения в костной ткани исследуемой области кости (или скелета) максимального значения критерия минимальности трабекулярной структуры $z_{\max}(\bar{x})$, достигнутого в результате эволюции.

4. Наиболее сильное уточняющее влияние оказывает учет свойства минимальности трабекулярной структуры – приводит к значительному увеличению среднего значения модуля упругости (не менее 54%) и существенному уменьшению относительного стандартного отклонения с 43 до 29,8 ГПа (в 1,4 раза).

5. Уточненная зависимость модуля упругости от объемного содержания матрикса при физиологической нагрузке имеет вид $E = E_1 \xi_M^{a_{\text{онт}} \xi_M}$, где константа $a_{\text{онт}}$ определяется для каждой локализации трабекулярной костной ткани.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич Ю.В., Акулич А.Ю., Денисов А.С. Предоперационное определение индивидуальных физических характеристик губчатой костной ткани проксимального отдела бедра человека // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 1. – С. 33–41.
2. Образцов И.Ф., Ханин М.А. Оптимальные биомеханические системы. – М.: Медицина, 1989. – 272 с.
3. Brown T.D., Ferguson A.B. Jr. Mechanical property distribution in the cancellous bone of the human proximal femur // Acta Orthop. Scand. – 1980. – Vol. 51, № 3. – P. 429–437.
4. Hegedus D.H., Cowin S.C. Bone remodeling II: small strain adaptive elasticity // Journal of Elasticity. – 1976. – Vol. 6, № 4. – P. 337–352.
5. Homminga J., McCreadie B.R., Weinans H., Huiskes R. The dependence of the elastic properties of osteoporotic cancellous bone on volume fraction and fabric // Journal of Biomechanics. – 2003. – Vol. 36, № 10. – P. 1461–1467.
6. Martin R.B., Burr D.B. and Sharkey N.A. Skeletal tissue mechanics. – New York: Springer, 1998. – 392 p.
7. McElhaney J.H., Roberts V.L. Mechanical properties of cancellous bone // AIAA Paper. – 1971. – № 71–111. – P. 1–8.
8. Rho J.Y., Roy M.E., Tsui T.Y., Pharr G.M. Elastic properties of microstructural components of human bone tissue as measured by indentation // J. Biomed. Mater. Res. – 1999. – Vol. 45. – P. 45–48.
9. Roux W. Gesammelte Abhandlungen uber Entwicklungsmechanik der Organismen. – Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1895. – Bd. 1–2. – 1891 S.
10. Townsend P.R., Rose R.M., Radin E.L. Buckling studies of single human trabeculae // J. Biomech. – 1975. – Vol. 8. – P. 199.
11. Whitehouse W.J., Dyson E.D. Scanning electron microscope studies of trabecular bone in the proximal end of the human femur // Journal of Anatomy. – 1974. – Vol. 118, № 3. – P. 417–444.
12. Wolff J. Das Gesetz der Transformation der Knochen. – Berlin: A Hirschwild, 1892. – 152 S.

CORRECTION OF TRABECULAR BONE TISSUE INDIVIDUAL RELATION BETWEEN YOUNG'S MODULUS AND VOLUME BONE FRACTION

**Yu.V. Akulich, A.Yu. Akulich, A.S. Denisov, P.S. Shaimanov, A.F. Shulyatev
(Perm, Russia)**

The mathematical relation between the elastic modulus and matrix volumetric fraction of trabecular bone tissue is used in the adaptive process simulation of bone tissue as an isotropic medium, since it establishes the connection of the mechanical properties with the structural parameters. The known relations have the form of power function of the elastic modulus of the trabecular material and the matrix volume fraction. These relations are sensitive to the localization of the cancellous bone and satisfy to the constitutive relation by Cowin (1976). However, they have an undefined error because do not take into account the orientation of the trabeculae influencing on the choice of value of the elastic modulus of the trabecular material as well as the minimal structure property by Berjery – Roux (1895), in accordance to which the maximal strength is achieved under minimal material consumption, i.e. density. The aim of the presented study is correction of the power function based on the account of the above mentioned fundamental properties of the trabecular bone structure. In accordance with the Wolff's law (1892), bone trabeculae as the structural adaptation result are oriented by longitudinal axis along the first principal stress trajectory. It ensures maximal strength of the structure, and therefore the elastic modulus of the trabecular material is equal to the elastic modulus of the trabecula in direction of longitudinal axis. To account for the minimality property, the parameter is represented by a linear function. The optimality criterion implies that the ratio of ultimate strength and density tends to a maximum (Obraztsov, 1989). The accounting of the trabecular structure leads to the significant increase of the local and the average for the proximal femur region of the elastic modulus (84%) and the significant decrease in the relative standard deviation (40%) without changing of the distribution character.

Key words: proximal femur, elastic modulus, trabecular bone tissue, structure, matrix volumetric fraction, minimality criterion.

Получено 19 июня 2014