ISSN 1812-5123. Российский журнал биомеханики. 2014. Т. 18, № 2: 140–146

Российский
Журнал
Биомеханики
www.biomech.ru

УДК 531/534: [57+61]

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЖИВЫХ СИСТЕМАХ

В.А. Лохов

Кафедра теоретической механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: valeriy.lokhov@yandex.ru

Аннотация. В работе использован метод декомпозиции собственной деформации в линейно-упругом теле, позволяющий разложить собственную деформацию на две части: первая часть не вызывает напряжений в системе, а вторая часть не вызывает деформаций системы. Показано применение данного подхода в решении задач независимого управления собственными деформациями, дана постановка задачи моделирования систем с собственными деформациями. Под собственной деформацией понимается неупругая деформация любой природы, например температурная деформация, деформация фазовых переходов, деформация роста и перестройки живой ткани, пьезоэлектрическая деформация и т.д. Предложенный подход применен для моделирования ростовых деформаций при лечении врожденной расщелины твердого нёба. Данная патология при неудачном лечении может приводить к серьезным косметическим дефектам, а также к отставанию умственного развития ребенка. Получено определяющее соотношение для ростовой деформации, проведен его анализ и показано, что при определенных граничных условиях рост не будет вызывать напряжений в системе, что существенно упрощает процедуру решения задачи о накоплении ростовой деформации с течением времени. Этот результат важен для планирования оптимального ортопедического лечения данной патологии, которое приводит к задаче независимого управления деформациями системы посредством ростовых деформаций. Определяющее соотношение получено для изотропного однородного тела, так как костная ткань ребенка не имеет сформированной структуры и изотропна. Использование свойств изотропии дает возможность задействовать в определяющем соотношении для ростовых деформаций только два скалярных параметра. Это позволяет учесть основные особенности роста и провести эксперименты по определению этих параметров.

Ключевые слова: управление формой, ростовая деформация, врожденная расщелина твердого нёба.

Введение

Проблемы создания желаемого распределения напряжений или формы имеют ключевое значение в научной литературе и широко обсуждаются на научных конференциях, в частности в медицине. Оптимальные распределения напряжений могут значительно уменьшить время заживления переломов и вызвать требуемый рост и перестройку живой ткани.

Вывод единой теории для решения таких задач может помочь в разработке новых методов медицинского лечения. В работе предлагается подход к решению таких задач на основе концепции собственной деформации. Это общий термин для неупругих

Лохов Валерий Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической механики и биомеханики, Пермь

деформаций любой природы: деформаций теплового расширения, пьезоэлектрических деформаций, деформаций из-за фазовых переходов в сплавах с памятью формы, деформаций роста и перестройки в живых тканях и т.д. Концепция собственной деформации была первоначально введена Рейсснером и Эшелби [10, 18] и подробно обсуждается в книге [13]. Предполагается, что распределение собственной деформации можно отдельно вычислить с помощью решения соответствующей краевой задачи, например, температурная деформация зависит от найденного температурного поля, деформация фазовых переходов зависит от нагрузки и истории нагрева, пьезоэлектрическая деформация зависит от приложенного электрического напряжения и т.д. Следовательно, собственная деформация предполагается известной, и тензор полной деформации $\tilde{\varepsilon}$ является суммой тензоров упругой деформации $\tilde{\varepsilon}^e$ и собственной деформации $\tilde{\varepsilon}^*$:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^*, \; \vec{r} \in \Omega, \tag{1}$$

где $\Omega \subset E^3$ – область пространства, занимаемая линейно упругим телом.

Упругая деформация в рамках линейной теории связана с напряжениями $\tilde{\sigma}$ законом Гука:

$$\tilde{\varepsilon}^e = \tilde{\tilde{C}}^{-1} \cdot\cdot \tilde{\sigma}, \; \vec{r} \in \Omega, \tag{2}$$

где $\tilde{\tilde{C}}^{-1}$ – тензор четвертого ранга упругой податливости.

Проблемы, связанные с определением собственной деформации, не обсуждаются в данной работе, так как есть огромное количество работ, затрагивающих эту проблему. Тем не менее оказывается, что существуют значительные свойства полученных напряжений и деформаций, не зависящие от происхождения собственных деформаций. В качестве примера будет рассмотрено определяющее соотношение для ростовой деформации.

Данный подход позволяет сформулировать и решать задачи двух весьма важных классов: 1) создание благоприятного распределения напряжений без деформации; 2) управление формой структуры без изменений поля напряжений.

Постановка краевой задачи

Пусть исследуемое тело занимает ограниченную область Ω трехмерного евклидова пространства E^3. Замыкание области обозначим $\bar{\Omega}$, границу (которая считается достаточно гладкой) – через S ($\bar{\Omega} = \Omega \cup S$). Граница области S делится на две взаимно не пересекающиеся части ($S = S_u \cup S_\sigma$):

$$\vec{u} = 0, \; \vec{r} \in S_u; \; \vec{n} \cdot \tilde{\sigma} = \vec{p}, \; \vec{r} \in S_\sigma, \tag{3}$$

где $\vec{p}$ – заданный вектор поверхностных сил.

Кроме того, заданы объемные силы $\vec{q}$ и собственная деформация $\tilde{\varepsilon}^*$. Нахождение напряжений, деформаций и перемещений требует решения соответствующей краевой задачи механики континуума. Дифференциальная постановка краевой задачи для среды с собственными деформациями приведена в различных работах (например, [14, 15]). Во многих случаях краевые задачи решаются приближенно с использованием дискретизации, например методом конечных элементов. В связи с этим для дискретных и дискретизированных систем используют обобщенную формулировку краевой задачи.

Назовем обобщенным решением задачи симметричный тензор $\tilde{\sigma}$, который определяется законом Гука при наличии собственной деформации:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{C}}^{-1}\left(\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) - \tilde{\varepsilon}^*\right), \tag{4}$$

где $\vec{u} \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^3$; $\vec{u} = 0,\ \vec{r} \in S_u$, и для которого имеет место соотношение (равенство работ внешних и внутренних сил)

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} \tilde{\sigma} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}\left(\vec{w}\right) dV - \int\limits_{S_\sigma} \vec{p} \cdot \vec{w}\, dS - \int\limits_{\Omega} \vec{q} \cdot \vec{w}\, dV = 0, \\ \forall \vec{w} \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^3,\ \vec{w} = 0,\ \vec{r} \in S_u. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь W_2^1 – функциональное пространство Соболева. Деформации $\tilde{\varepsilon}\left(\vec{u}\right)$ и $\tilde{\varepsilon}\left(\vec{w}\right)$ определяются геометрическим соотношением Коши, где производные понимаются в обобщенном смысле. В постановке считается, что $\vec{p} \in \left(L_2\left(S_\sigma\right)\right)^3$, $\vec{q} \in \left(L_2(\Omega)\right)^3$, $\tilde{\varepsilon}^* \in \left(L_2(\Omega)\right)^6$, компоненты $C_{ijkl}\left(i, j, k, l = 1, 2, 3\right)$ тензора четвертого ранга упругих констант $\tilde{\tilde{C}}$ считаются кусочно-непрерывными функциями координат.

Обобщенная постановка дает возможность анализа дискретных систем, для которых несправедлива дифференциальная постановка краевой задачи. В работе [1] доказана теорема, из которой следует, что для решаемой задачи обобщенное решение существует и единственно.

Из соотношений (3), (4) следует, что рассматриваемая задача моделирования распадается на две части: задача линейной теории упругости с известными объемными силами $\vec{q}$ и поверхностными силами $\vec{p}$; задача линейной теории упругости с собственной деформацией $\tilde{\varepsilon}^*$.

Заметим, что напряжения в системе, вызванные собственными деформациями, называют собственными напряжениями (*eigenstresses*) $\tilde{\sigma}^*$. В случае, если они самоуравновешенные ($S_u = \varnothing$), их называют также остаточными напряжениями (*residual stresses*). Собственные напряжения отличаются от остаточных тем, что они создаются, в том числе, давлением неподвижных опор. Напряжения, вызванные только действием объемных и поверхностных сил, будем называть силовыми напряжениями $\tilde{\sigma}^f$. Можно показать, что если в теле существует собственная деформация и на тело действуют объемные и поверхностные силы, то напряжения в теле будут суммироваться:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^f + \tilde{\sigma}^*, \quad \vec{r} \in \Omega. \tag{6}$$

Если произвести разгрузку тела, т.е. снять внешние и поверхностные силы, то в теле останутся только собственные напряжения, а силовые напряжения будут равны нулю. В некоторых случаях собственная деформация может при разгрузке измениться, например, в задачах пластичности при появлении вторичной пластической деформации.

Собственные деформации, свободные от напряжений

Большое значение для дальнейшего изложения имеет понятие собственной деформации, свободной от напряжений (*stress-free eigenstrain*), которое было введено Эшелби [10].

Собственная деформация называется свободной от напряжений и обозначается $\tilde{\varepsilon}_u^*$, если при наложении этой деформации на упругое тело напряжения в любой точке тела равны нулю:

$$\tilde{\varepsilon}_u^* \Rightarrow \tilde{\sigma} = 0, \quad \vec{r} \in \Omega. \tag{7}$$

Свойства и примеры таких распределений широко обсуждаются в литературе, например в работах [2, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 14, 15]. Классическим примером такой деформации может служить однородный нагрев свободного стержня.

Для того чтобы собственная деформация $\tilde{\varepsilon}$ не вызывала напряжений в любой точке тела, необходимо и достаточно, чтобы: 1) собственная деформация была совместной, т.е. для нее существует поле перемещений $\exists \vec{u}\left(u_1, u_2, u_3\right)\left(\vec{r}\right)$ – такое, что $\tilde{\varepsilon}^* = (\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla})/2$; 2) перемещения равны нулю на опорах, $\vec{u}\left(\vec{r}\right) = 0$ при $\vec{r} \in S_u$. Это утверждение доказано в работах [14, 15].

Также доказана теорема, позволяющая определять поля собственных деформаций, свободных от напряжений. Соответствующая теорема доказана в работе [16].

<u>Теорема</u>. Тензор собственной деформации $\tilde{\varepsilon}^*$ не создает напряжений в любой точке данного тела, $\vec{r} \in \overline{\Omega}$, тогда и только тогда, когда существуют объемные силы $\vec{q} \in \left(L_2\left(\Omega\right)\right)^3$ и поверхностное натяжение $\vec{p} \in \left(L_2\left(S_\sigma\right)\right)^3$, которые производят такую же упругую деформацию $\tilde{\varepsilon}$, $\vec{r} \in \overline{\Omega}$ в линейно-упругом теле, т.е. $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^*$, $\vec{x} \in \overline{\Omega}$.

Описанные условия позволяют определить свойства собственной деформации без решения краевой задачи.

Анализ определяющих соотношений для деформации роста

Рост характерен для живых тканей и сопровождается изменениями в структуре и размерах тела, притоком массы. Изменение размеров тела можно описать с помощью тензора ростовой деформации $\tilde{\varepsilon}^g$ и тензора скорости ростовой деформации $\tilde{\xi}^g$.

В технике рост, как правило, вызван присоединением частиц на поверхности тела, например в задаче о намотке. В живых тканях рост происходит за счет внутренних источников массы, связанных с движением крови.

Существует множество моделей роста живой ткани, учитывающих различные эффекты и массоперенос, но основная сложность в их использовании – недостаток экспериментальных данных для верификации параметров моделей. Есть и модели, феноменологически описывающие изменения растущей ткани, например, деформацию, которые содержат в себе намного меньше параметров, для которых можно найти экспериментальные данные. В качестве такой модели во многих работах выбрана модель, обсуждаемая в работах Хсю, Регирера, Штейна [3, 6, 9, 11]:

$$\tilde{\xi}^g = \tilde{A} + \tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\sigma}, \tag{8}$$

где $\tilde{A}$ – тензор второго ранга, описывающий генетически заложенный рост, $\tilde{\tilde{B}}$ – тензор четвертого ранга, отражающий влияние напряжений в теле $\tilde{\sigma}$ на деформацию скорости роста $\tilde{\xi}^g$.

Соотношение (8) позволяет описать изменение размеров растущего тела, но не может описать приток массы. Однако для решения ряда задач этого достаточно, например, в задаче ортопедического лечения врожденной расщелины твердого нёба главную роль играет форма формируемого нёба.

Далее мы рассмотрим вопрос о влиянии ростовых деформаций на напряжения. Отметим, что наличие слагаемого $\tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\sigma}$ дает нам возможность, меняя напряжения в теле, управлять скоростью роста. В медицинской практике для создания напряжений используются ортопедические аппараты. С течением времени ростовая деформация, вычисленная по формуле (8), может вызывать собственные напряжения, которые останутся в теле после снятия ортопедического аппарата и могут дать отрицательные эффекты. Однако анализ работ [3, 9] показывает, что в аналогичных задачах на макроуровне напряжения в процессах роста не меняются.

Рассмотрим изотропный материал, для которого тензор $\tilde{A}$ является шаровым тензором:

$$\tilde{\xi}^g = A\tilde{I} + \tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\sigma}, \tag{9}$$

где $\tilde{I}$ – единичный тензор второго ранга.

При малом приращении времени dt ростовая деформация $\tilde{\varepsilon}^g$ может быть найдена путем умножения (9) на время dt:

$$\tilde{\varepsilon}^g = \tilde{\xi}^g dt = \left(A\tilde{I} + \tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\sigma} \right) dt. \tag{10}$$

Если ростовая деформация (10) удовлетворяет условиям, указанным выше, то она не будет вызывать собственных напряжений. Мы можем увидеть, что слагаемое $A\tilde{I}dt$ аналогично температурной деформации для однородного нагрева и при определенных граничных условиях не вызовет собственных напряжений. Слагаемое $\tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\sigma} dt$ требует более детального анализа.

Воспользуемся теоремой, приведенной выше, для этого перепишем слагаемое $\tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\sigma} dt$ в следующей форме:

$$\tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\tilde{C}} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}^e = \tilde{\tilde{M}} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}^e, \tag{11}$$

где $\tilde{\tilde{M}}$ – тензор четвертого ранга, $\tilde{\tilde{M}} = \tilde{\tilde{B}} \cdot\cdot \tilde{\tilde{C}}.$

Далее мы упростим соотношение (11), учитывая изотропию материала. Существует три линейно-независимых изотропных тензора четвертого ранга:

$$M_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl},\ M_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \pm \delta_{il}\delta_{jk}\ .$$

Поэтому запишем тензор M в виде линейной комбинации трех тензоров:

$$M_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \mu_1\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right).$$

Теперь вычислим свертку тензора M и тензора упругой деформации $\tilde{\varepsilon}^e$:

$$\left(\tilde{\tilde{M}} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}^e\right)_{ij} = M_{ijkl}\varepsilon^e_{kl} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon^e_{kk} + \mu\left(\varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^e_{ji}\right) + \mu_1\left(\varepsilon^e_{ij} - \varepsilon^e_{ji}\right).$$

Учитывая симметрию тензора деформации и обозначая $2\mu = M$, получим

$$\left(\tilde{\tilde{M}} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}^e\right)_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon^e_{kk} + M\varepsilon^e_{ij}. \tag{12}$$

Ввиду сложности экспериментального определения параметров модели в соотношении (12) делается упрощение, аналогичное тому, что сделано в работе [17]: $\lambda = 0$.

Тогда уравнения (9) и (12) дают следующую модель для ростовой деформации:

$$\tilde{\xi}^g = A\tilde{I} + M\tilde{\varepsilon}^e. \tag{13}$$

Тогда, если применить теорему, приведенную выше, то видно, что слагаемое $M\,\tilde{\varepsilon}^e dt$ не вызывает напряжений.

Таким образом, при определенных граничных условиях ростовая деформация не вызывает собственных напряжений. Если объемные $\vec{q} \in \left(L_2\left(\Omega\right)\right)^3$ и поверхностные $\vec{p} \in \left(L_2\left(S_\sigma\right)\right)^3$ силы не зависят от времени, то напряжения и скорость ростовой деформации также будут стационарными. Тогда для случая малых деформаций ростовую деформацию можно вычислять путем умножения на время лечения T:

$$\tilde{\varepsilon}^g = \tilde{\xi}^g T. \tag{14}$$

Заключение

Использование формулы (14) позволяет решать задачу о ростовых деформациях в перемещениях, а не в приращениях, что существенно сокращает затраты на решение. Кроме того, это упрощает задачу о создании заданной ростовой деформации и заданной формы растущего нёба. Данные свойства позволят биомеханикам упростить процедуру подбора ортопедических аппаратов при лечении врожденной расщелины твердого нёба и повысить эффективность проводимого лечения.

Отметим, что для применения формулы (14) нужно обращать внимание на граничные условия, иначе ростовая деформация, соответствующая слагаемому $A\tilde{I}dt$, будет вызывать давление на опоры и собственные напряжения в системе.

Список литературы

1. Дюво Г., Лионс Х.-Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 480 с.
2. Кучумов А.Г., Лохов В.А., Няшин Ю.И., Менар М., Селянинов А.А. Численное решение задачи оптимизации для определения параметров установки фиксаторов спамятью формы // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 1. – С. 18–28.
3. Кизилова Н.Н., Логвенков С.А., Штейн А.А. Математическое моделирование транспортно-ростовых процессов в многофазных биологических сплошных средах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 1. – С. 3–13.
4. Лохов В.А., Кучумов А.Г. Создание заданных усилий в фиксаторах, изготовленных из сплавов с эффектом памяти формы // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 3. – С. 41–52.
5. Лохов В.А., Няшин Ю.И., Кучумов А.Г., Менар М., Гачкевич А.Р., Будз С.Ф., Онышко А.Е. Применение материалов с эффектом памяти формы к лечению патологий зубочелюстной системы // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т. 12, № 4. – С. 7–17.
6. Лохов В.А., Долганова О.Ю., Няшин Ю.И. Биомеханическое моделирование эффекта сближения фрагментов твердого неба при ортопедическом лечении // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 1. – С. 38–45.
7. Туктамышев В.С., Лохов В.А., Няшин Ю.И. Независимое управление напряжениями и деформациями в живых системах // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 12, № 2. – С. 69–76.
8. Федоров А.Е., Лохов В.А. О применении теории вязкоупругости в эстетической хирургии // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 4. – С. 34–46.
9. Штейн А.А., Юдина Е.Н. Математическая модель растущей растительной ткани как трехфазной деформируемой среды // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 1. – С. 42–51.
10. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proceedings of the Royal Society of London. – 1957. – Vol. 241. – P. 376–396.

11. Hsu F.-H. The influences of mechanical loads on the form of a growing elastic body // Journal of Biomechanics. – 1968. – Vol. 1. – P. 303–311.
12. Irschik H., Ziegler F. Eigenstrain without stress and static shape control of structures // AIAA Journal. – 2001. – Vol. 39. – P. 1985–1990.
13. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. – 2nd ed. – Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991. – 587 p.
14. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – Vol. 85. – P. 557–570.
15. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Stress-free displacement control of structures // Acta Mechanica. – 2005. – Vol. 175. – P. 45–56.
16. Lokhov V., Nyashin Y., Kiryukhin V., Ziegler F. Theorem on stress-free eigenstrain and Duhamel's analogy // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 36, № 3. – P. 35–46.
17. Masich A.G., Nyashin Y.I. Mathematical modelling of orthopedic reconstruction of childrens congenital maxillary anomaly // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3, № 1. – P. 101–109.
18. Reissner H. Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen // Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – Vol. 11. – P. 1–8.

MODELLING OF GROWTH STRAIN IN LIVING SYSTEMS

V.A. Lokhov (Perm, Russia)

In this paper, we use the method of decomposition of the eigenstrain in a linear elastic body allowing decompose eigenstrain into two parts: the first part does not cause stress in the system, and the second part does not cause deformation of the system. The paper illustrates the application of this approach in solving the problems of independent shape control and gives the formulation of the boundary value problem for modelling systems with eigenstrains. In this framework, we consider eigenstrain as inelastic strain of any nature, for example, thermal strain, strain due to phase transitions, growth and remodelling strains of living tissues, piezoelectric strain, etc. The proposed approach opens the way to simulate the growth strains at the treatment of congenital cleft of the palate. This pathology in case of failed treatment can lead to serious cosmetic defects and also can block mental development of children. The conducted analysis of obtained governing equation for the growth strain shows that under certain boundary conditions, the growth does not induce stresses in the system, which simplifies the solving process of the problem of the growth strain accumulation with time. This result is important for the optimal planning of orthopedic treatment of the disease, which leads to the problem of independent shape control by growth strains. The constitutive relation assumes isotropic homogeneous body since the bone of a child has no structure and isotropic. Considering the properties of isotropy allows us to use in constitutive relation for growth strains only two scalar parameters, and thus to describe the basic features of growth and to conduct experiments on the determination of these parameters.

Key words: shape control, growth strain, congenital cleft of the hard palate.

Получено 30 апреля 2014