

УДК 532.546.2

С.Д. Анферов, О.И. Скульский

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ
ЧЕРЕЗ ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМУЮ ПОРИСТУЮ
СРЕДУ В ПРОЦЕССЕ ЭКСТРУЗИОННОГО ОТЖИМА**

Модели течения жидкости через недеформируемые или упругодеформируемые пористые среды нашли широкое применение. Особенно стоит выделить решение задач подземной гидродинамики и нефтедобычи. Предложенная в работе гидродинамическая модель фильтрационного течения жидкости через пластически деформирующийся пористый скелет находит свое применение при исследовании процесса экструзионного отжима масла из семян рапса. В ходе этого процесса пористый скелет претерпевает значительные необратимые деформации, что требует иного подхода к описанию поведения материала. Исходный продукт в данной работе был представлен двухкомпонентной смесью, состоящей из пластически деформируемой пористой сжимаемой среды и равномерно распределенного в ней масла. Компоненты смеси предполагались не реагирующими между собой. В соответствии с распространенным в теории экструзионной обработки полимеров подходом задача была рассмотрена в обращенном движении, канал шнека был развернут на плоскость, а в качестве определяющего соотношения для составляющих смеси была использована модель вязкой жидкости. Дальнейшая постановка задачи была выполнена в рамках Эйлера подхода к описанию движения в двумерной постановке для среднего сечения развернутого на плоскость канала шнека. Сформулированная в этой модели краевая задача основана на уравнениях баланса количества движения и сохранения массы каждой из составляющих смеси. Независимыми переменными поставленной краевой задачи являются: давление в смеси, давление в масле, скорости движения смеси и масла. Гипотеза пропорциональности скорости отжима давлению фильтрующейся жидкости позволяет получить приближенное аналитическое решение для постоянных коэффициентов фильтрации и сжимаемости среды.

Ключевые слова: математическая модель, пластически деформируемая пористая среда, экструзионный отжим, фильтрация, масло, семена рапса

S.D. Anferov, O.I. Skul'skiy

Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS, Perm, Russian Federation

**MODELLING OF FLUID FILTRATION THROUGH
PLASTICALLY DEFORMED POROUS MEDIUM
IN THE PROCESS OF EXTRUSION**

Mathematical models of fluid flow through non-deformable or elastically deformable porous media have become widely used. Especially they are common in water resources and oil drilling problems. The proposed hydrodynamic model of fluid filtration through plastically deforming porous skeleton, finds

application in the investigation of the rapeseed extrusion extraction process. During this process the porous skeleton undergoes large inelastic deformation, which requires an alternative approach to the material behavior description. The material was presented by a two-component mixture of plastically deformable compressible porous medium saturated by oil. The mixture components were assumed to be nonreactive. According to the polymers extrusion processing theory, the problem was considered in reverse motion, the screw channel was unrolled on the plane, and viscous fluid model was used as governing equation for both mixture components. Further problem formulation was performed in the framework of the Euler motion description approach in a two-dimensional formulation for the plane of screw channel middlesection. Boundary-value problem formulated based on momentum balance and mass conservation equations for each mixture component. The boundary value problem independent variables are the mixture pressure, oil pressure, mixture velocity and oil velocity. The hypothesis of extraction speed proportionality to the oil pressure allows obtaining an approximate analytical solution for a constant filtration and compressibility coefficients.

Keywords: mathematical model, plastically deformed porous medium, extrusion and extraction, filtration, oil, rape seeds.

Введение

Математические модели фильтрации жидкостей через недеформирующиеся пористые среды широко известны и хорошо разработаны [1–7]. Менее изучены процессы фильтрации в упругодеформирующихся средах [8–10]. Для фильтрации жидкостей и газов в условиях развитого пластического движения пористых сред общепринятые математические модели не так многочисленны [11–13], хотя в природе и технологических процессах такие явления существуют, например, при течении расплавленной газонасыщенной лавы при извержении вулканов [14], отжиме масла из масличных зерновых культур и производстве биотоплива [15].

Существующие коммерческие пакеты программ не позволяют моделировать течения неньютоновских жидкостей, осложненные процессами сжимаемости, диффузии и массопереноса.

Целью данного исследования является построение математической модели, позволяющей применять современные математические методы расчета к анализу процесса экструзионного отжима.

Экструзионный отжим через зерную камеру [16–17] является одним из способов получения растительного масла из семян масличных культур. Зерная камера представляет собой часть корпуса шнека и состоит из набора тонких продольных стальных пластин, малые зазоры между которыми препятствуют проникновению измельченной обрабатываемой масличной культуры, но свободно пропускают масло [18]. Вращение шнека-винта внутри корпуса экструдера обеспечивает продвижение смеси по направлению к головке, гидродинамическое сопротивление которой вызывает встречный перепад давления в смеси

по длине канала. Фильтрация масла через пластически деформируемую пористую смесь (жмых) и отжим масла за пределы канала экструдера через зерную камеру вызывают радиальный перепад давления в масле.

Растительное масло, полученное из высококачественных семян рапса, характеризуется высоким содержанием полезных полиненасыщенных жирных кислот, что существенно отличает его от других видов растительных масел. В семенах озимого рапса содержится 35–45% масла. Масло используют в пищу, применяют в полиграфической, лакокрасочной, мыловаренной промышленности и в производстве биотоплива.

1. Постановка задачи

Задача течения материала в винтовом экструдере ставилась в «обращенном движении» (шнек неподвижен, а корпус вращается). Винтовой канал разворачивался на плоскость, и выделялось продольное срединное сечение (рис. 1). Нижняя граница полученного плоского канала оставалась неподвижной, а верхняя двигалась с заданной скоростью под углом к продольной оси. Продольная составляющая потока в этом случае является результатом тянущего движения стенки и встречного градиента давления, возникающего за счет сопротивления головки экструдера [19–23]. Концевая часть верхней подвижной границы развернутого на плоскость канала представляет собой область контакта материала с зерной камерой, через которую происходит отжим масла. Высота канала H соответствует глубине нарезки шнека, длина L соответствует длине образующей винтовой линии в середине глубины нарезки [24, 25].

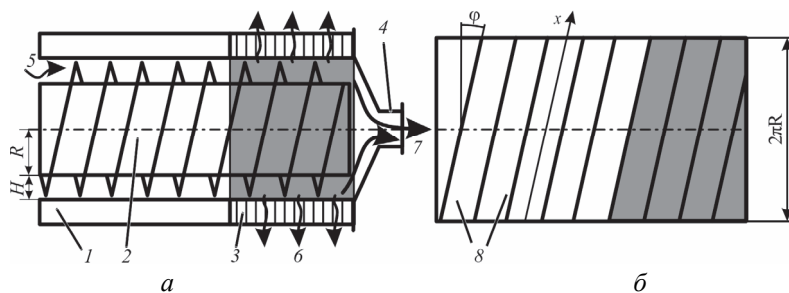


Рис. 1. Схема экструдера для отжима масла (а): 1 – корпус; 2 – шнек; 3 – зерная камера; 4 – головка; 5 – направление течения экструдированного материала; б – направление течения отжимаемого масла; 7 – выход жмых; H – глубина нарезки канала; R – радиус шнека; схема развернутого на плоскость шнека (б); 8 – витки шнека; ϕ – угол нарезки шнека (на а и б серым обозначена область отжима масла)

Экструдруемый продукт представляет собой двухкомпонентную смесь, состоящую из клетчатки, образующей пористую структуру, и распределенного в ее порах масла. Клетчатка и масло имеют практически одинаковую плотность, химически не реагируют между собой. Из-за отжима масла за пределы канала смесь клетчатки и масла проявляет свойство сжимаемости, которое однозначно связано с фильтрационными свойствами пористой среды.

В общем случае система дифференциальных уравнений, описывающих процесс экструзионного отжима масла, состоит из уравнения движения смеси, включающей клетчатку с остаточным содержанием масла,

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

определяющих соотношений для маслосодержащей смеси

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} + \lambda\mathbf{I}(\text{tr}\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^T + \nabla\mathbf{v}), \quad (2)$$

уравнений сохранения масс

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}) = -J, \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{w}) = J, \quad (3)$$

уравнения Дарси движения масла в пористой смеси [26]

$$\mathbf{w} = -K_f \nabla P_w. \quad (4)$$

Поскольку камера проницаема для масла и непроницаема для остальных компонентов смеси, поля давления масла и смеси не совпадают [27]. Комбинация уравнения сохранения и уравнения Дарси приводит к уравнению для определения поля давления для масла

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} - \nabla \cdot [\rho_m K_f \nabla P_w] = J. \quad (5)$$

Скорость изменения элементарного объема отжатого масла определяет скорость изменения элементарного объема смеси.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{w}. \quad (6)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; \mathbf{D} – симметричная часть градиента скорости; \mathbf{v} – вектор скорости смеси; \mathbf{w} – вектор скорости фильтрации

масла; \mathbf{I} – единичный тензор; P – давление в смеси; P_w – давление в масле; μ – динамическая вязкость смеси; ρ_s – плотность смеси; ρ_m – плотность масла; K_f – коэффициент фильтрации; J – скорость отжима масла из смеси.

Двумерная стационарная краевая задача ставилась в декартовой системе координат, в которой ось x направлена по нижней непроницаемой стенке канала, а ось y – по его высоте (рис. 2).

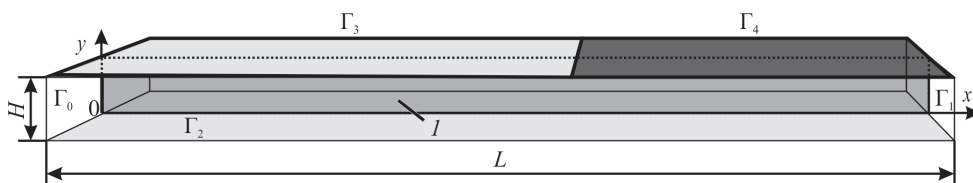


Рис. 2. Схема развернутого на плоскость канала шнека: I – среднее сечение; L – длина канала; H – высота канала. Γ_0 – входное сечение канала; Γ_1 – выходное сечение канала; Γ_2 – нижняя сплошная неподвижная стенка; Γ_3 – сплошная часть верхней подвижной стенки; Γ_4 – проницаемая часть верхней подвижной стенки

Во входном сечении канала Γ_0 давление равно атмосферному, которое принято за отсчетное $\Gamma_0: P=0; P_w=0$. В выходном сечении канала Γ_1 приложена распределенная нагрузка $\Gamma_1: P=P_L(Q_L)$, действующая навстречу тянущему движению стенки, численно равная сопротивлению экструзионной головки (где $P_L(Q_L)$ – расходно-напорная характеристика головки).

На сплошных стенках канала Γ_2 и Γ_3 выполняются условия прилипания для смеси и масла $\Gamma_2: v_x=0; v_y=0; w_y=0 \rightarrow \frac{\partial P_w}{\partial y}=0$;
 $\Gamma_3: v_x=v_0; v_y=0; w_y=0 \rightarrow \frac{\partial P_w}{\partial y}=0$, а на проницаемой верхней стенке Γ_4 – условия прилипания только для смеси $\Gamma_4: v_x=v_0; v_y=0; P_w=0$. Уравнения (1)–(6) с граничными условиями на плоскостях Γ_0 – Γ_4 представляют собой замкнутую краевую задачу.

2. Аналитическое решение

Поскольку напорная зона канала экструдера представляет собой обычный винтовой шнек, для которого методы аналитического и численного моделирования хорошо разработаны, остановим свое внимание на зерной камере, в которой происходит отжим масла. Принимая во внимание большую относительную длину канала зерной камеры, отметим, что единственная ненулевая продольная компонента скорости смеси благодаря сжимаемости из-за оттока масла за границу расчетной области является функцией двух координат $v_x(x, y)$. Давление смеси $P(x)$ одномерное, но из-за нелинейности реологических свойств может быть нелинейным. Давление в масле $P_w(x, y)$ двумерно и отличается от давления смеси [27], а вектор скорости фильтрации масла имеет две компоненты $w_x(x, y)$ и $w_y(x, y)$.

Движение смеси в канале винта экструдера в изотермическом режиме с постоянными коэффициентами сдвиговой и объемной вязкости в рамках принятых допущений описывается системой уравнений

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\tau_{xx}(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{xy}(x, y)]. \quad (7)$$

Вязкость смеси в общем случае является функцией давления, концентрации масла, скорости сдвига и температуры [3, 28]. В первом приближении будем считать динамическую вязкость смеси постоянной. Определяющие соотношения в этом случае имеют вид

$$\tau_{xx}(x, y) = 2\mu \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \mu \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y}. \quad (9)$$

Подстановка определяющих соотношений в уравнение движения приводит с учетом условия Стокса $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ к уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Движение масла через пористую смесь определяется законом Дарси

$$w_x = -K_f \frac{\partial P_w}{\partial x}, \quad w_y = -K_f \frac{\partial P_w}{\partial y}. \quad (11)$$

Условия равенства скорости изменения объемов

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -J, \quad \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = J \quad (12)$$

после подстановки закона Дарси принимают вид

$$-K_f \left(\frac{\partial^2 P_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_w}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial v_x}{\partial x}. \quad (13)$$

Предположив, что скорость отжима масла из элементарного объема пропорциональна давлению в масле, положим

$$J = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \chi P_w, \quad (14)$$

Уравнение движения и уравнение для давления в масле преобразуются к виду

$$\frac{\partial P}{\mu \partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{4}{3} \chi \frac{\partial P_w}{\partial x}, \quad (15)$$

$$-K_f \left(\frac{\partial^2 P_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_w}{\partial y^2} \right) = \chi P_w, \quad (16)$$

где коэффициент χ определяется фильтрационными свойствами пористого скелета. Система уравнений (15) и (16) при заданном распределении давления смеси $P(x)$ совместно с граничными условиями представляют собой замкнутую краевую задачу для независимых переменных P_w, v_x . Неизвестные переменные w_x, w_y являются зависимыми [13, 29] и определяются из уравнений (11).

Будем искать решение для давлений в виде [4, 30]

$$P(x) = P_{in} e^{kx}, \quad P_w(x, y) = P_{in} e^{kx} g(y). \quad (17)$$

Интегрирование (14) с учетом граничных условий дает скорость смеси в виде

$$v_x(x,y) = -\frac{\chi P_{in}}{k} g(y) e^{kx} + v'(y). \quad (18)$$

Подставив (17) и (18) в уравнение движения (15) и приведя подобные, получим

$$\left(\frac{4}{3} k^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) = -\frac{k^2}{\chi \mu}. \quad (19)$$

Подставив (17) в (16), получим еще одно обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\left(k^2 + \frac{\chi}{K_f} \right) g + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) имеют одинаковую структуру

$$\left(A^2 g + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) = B, \quad (21)$$

общее решение имеет вид

$$g = C_1 \cos(Ay) + C_2 \sin(Ay) + \frac{B}{A^2}. \quad (22)$$

Для смеси константы интегрирования определяются из граничных условий $g|_{y=0} = 0$, $g|_{y=H} = V_0$ и равны $C_1 = -\frac{B}{A^2}$,

$$C_2 = \frac{B}{A^2} \frac{\cos((AH)-1)}{\sin(AH)}.$$

Функция $g(y)$ принимает вид

$$g = \frac{B}{A^2} \left(\frac{\sin(Ay)(\cos(AH)-1)}{\sin(AH)} - \cos(Ay) + 1 \right), \quad (23)$$

а профиль скорости смеси определяется формулой

$$v_x = v_0 \frac{y}{H} - \frac{B\chi}{A^2 k} \left(\frac{\sin(Ay)(\cos(AH)-1)}{\sin(AH)} - \cos(Ay) + 1 \right) P_{in} e^{kx}. \quad (24)$$

Объемный расход смеси

$$Q_x^v = \int_0^H v_x(x, y) dy = \frac{v_0 H}{2} - \frac{B\chi}{A^2 k} P_{in} e^{kx} \left(\frac{2(\cos(AH) - 1)}{A \sin(AH)} + H \right), \quad (25)$$

где $A = \frac{2}{\sqrt{3}} k$; $B = -\frac{k^2}{\mu\chi}$; $k = \frac{1}{L} \log\left(\frac{P_0}{P_{in}}\right)$.

Давление смеси в экструдере P_0 создается регулируемым сопротивлением формующей головки и связано с расходом смеси на выходе из шнека.

Для масла константы интегрирования определяются из граничных условий для давления фильтрующейся жидкости, которые позволяют получить следующие выражения для $g(y)$: $\left. \frac{dg}{dy} \right|_{y=0} = 0$, $g|_{y=0} = 1$.

Таким образом, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и функция $g(y)$ принимает вид

$$g = \cos(Ay), \quad (26)$$

а распределение давления для масла определяется формулой

$$P_w = P_{in} e^{kx} \cos(Ay), \quad (27)$$

где $A = \sqrt{\left(k^2 + \frac{\chi}{K_f}\right)}$, $B = 0$.

С другой стороны, условие свободного выхода масла через стенку зерной камеры $g|_{y=H} = 0$ требует, чтобы $A = \frac{\pi}{2H}$. Из условия

$\left(k^2 + \frac{\chi}{K_f}\right) = \frac{\pi^2}{4H^2}$ вычисляется константа $\chi = K_f \left(\frac{\pi^2}{4H^2} - k^2\right)$, определяющая зависимость сжимаемости смеси от коэффициента фильтрации.

Окончательно фильтрационный поток масла определяется следующими выражениями:

$$w_x = -K_f \frac{\partial P_w}{\partial x} = -K_f P_{in} k \cos\left(\frac{\pi y}{2H}\right) e^{kx}, \quad (28)$$

$$w_y = -K_f \frac{\partial P_w}{\partial y} = \frac{K_f P_{in} \pi \sin\left(\frac{\pi y}{2H}\right) e^{kx}}{2H}, \quad (29)$$

где параметр автомодельности определяется выражением $k = \frac{\ln(P_0/P_{in})}{L}$.

Скорость отжима масла через зерную камеру определяется формулой

$$w_y \Big|_{y=H} = \frac{K_f P_{in} \pi e^{kx} \sin\left(\frac{\pi y}{2H}\right)}{2H} \Big|_{y=H} = \frac{K_f P_{in} \pi e^{kx}}{2H}, \quad (30)$$

а объемный выход масла канала зерной камеры после интегрирования (30) и умножения на ширину развернутого канала b принимает вид

$$Q_y^w = b \int_0^x w_y(x, y) dx \Big|_{y=H} = \frac{\pi b}{2kH} K_f P_{in} e^{kx}. \quad (31)$$

Фильтрационный поток масла вдоль канала

$$Q_x^w = b \int_0^H w_x(x, y) dy = -\frac{2bHk}{\pi} K_f P_{in} e^{kx}, \quad (32)$$

пренебрежимо мал по сравнению с радиальным, поскольку обычно отношение $H/L \ll 1$.

3. Результаты расчета

Расчет экструзионного отжима масла проводился для прямоточного шнека с радиусом $R=0,0225$ м, глубиной канала $H=0,008$ м и углом подъема винтовой нарезки $\varphi=17^\circ$. В обратном движении скорость верхней стенки при числе оборотов винта $n=10$ об/мин равна $v_0 = \frac{2\pi Rn}{60\cos(\varphi)}$ м/с. Длина развернутого на плоскость канала зерной камеры составляла 0,5 м и содержит 10 витков шнека. Регулируемое сопротивление экструзионной головки определяет противодавление в канале экструдера и может изменяться от нуля при свободном выходе до максимального значения, соответствующего закрытому выходу.

Гидродинамическое сопротивление экструзионной головки P_0 в данном случае принималось равным 10 МПа, что соответствует средним реальным значениям сопротивления головки при отжиме. Вязкость смеси $\mu=3,5 \times 10^4$ н·с/м² [31], значение эффективного коэффициента фильтрации K_f было принято равным $0,3 \cdot 10^{-11}$ м⁴/нс [32]. Результаты расчета основных характеристик отжима представлены на рис. 3–6.

Распределение скорости смеси по высоте канала почти во всей области близко к линейному (см. рис. 4), за исключением области выхода из экструдера. Следует отметить, что и другие полученные распределения проявляют нелинейность вблизи головки экструдера. В этой области резко возрастает давление смеси (см. рис. 3), а также наблюдается значительный перепад давления масла по высоте канала (см. рис. 5), что приводит к более интенсивному отжиму масла (см. рис. 6). В экспериментах по экструзионному отжиму было замечено подобное поведение отжимаемой жидкости вблизи выхода из шнека.

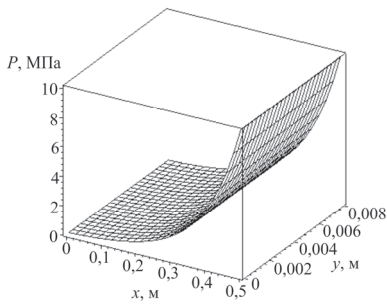


Рис. 3. Распределение давления в смеси

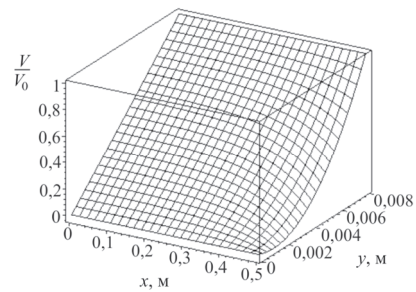


Рис. 4. Распределение обезразмеренной скорости смеси

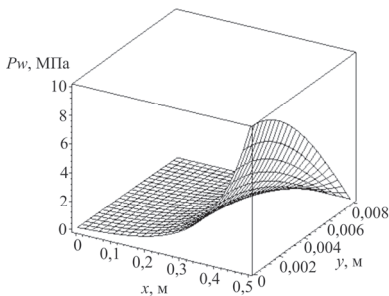


Рис. 5. Распределение давления в масле

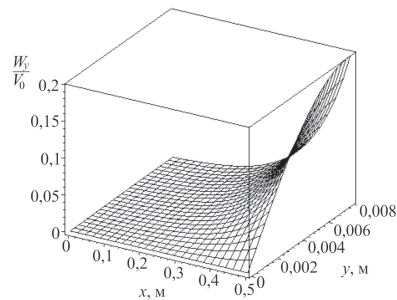


Рис. 6. Распределение обезразмеренной вертикальной скорости фильтрации

4. Обсуждение

Полученное аналитическое решение удовлетворяет системе уравнений поставленной краевой задачи течения бинарной смеси с фильтрацией жидкой фракции с постоянными коэффициентами вязкости и проницаемости. Сравнение результатов расчета распределения скорости отжима и давления для масла по длине канала экструдера с экспериментальными данными показало, что в то время как аналитическое решение предсказывает экспоненциальное возрастание давления в масле и скорости фильтрации по длине канала зерновой камеры, замеренное в реальном процессе отжима распределение массового выхода отжатого масла по длине зерновой камеры имеет максимум [17, 18], что очевидно связано с существенно нелинейной зависимостью вязкости и проницаемости от давления в смеси [31]. Решение краевой задачи с нелинейными свойствами может быть получено численно, что является предметом дальнейшего исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-08-69096р.

Библиографический список

1. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 339 с.
2. Боренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
3. El-Amin M.F., Salama A, Sun S., A Conditionally Stable Scheme for a Transient Flow of a Non-Newtonian Fluid Saturating a Porous Medium // *Procedia Computer Science*. – 2012. – Vol. 9. – P. 651–660. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.070
4. Asgari A., Bagheripour M.H., Mollazadeh M. A generalized analytical solution for a nonlinear infiltration equation using the exp-function method // *Scientia Iranica*. – 2011. – Vol. 18. – Iss. 1. – P. 28–35. doi: 10.1016/j.scient.2011.03.004
5. Меретуков З.А., Косачев В.С., Кошевой Е.П., Решение задачи нелинейной напоропроводности при отжиме // *Известия вузов. Пищевая технология*. – 2011. – Т. 323–324, № 5–6. – С. 62–64.
6. Меретуков З.А., Кошевой Е.П., Косачев В.С. Решение дифференциального уравнения отжима // *Новые технологии*. – 2011. – № 4. – С. 54–57.

7. Model coupling for multiphase flow in porous media / R. Helmig, B. Flemisch, M. Wolff, A. Ebigbo, H. Class // *Advances in Water Resources*. – 2013. – Vol. 51. – P. 52–66. doi: 10.1016/j.advwatres.2012.07.003
8. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика – М.: Недра, 1996. – 446 с.
9. Костерин А.В., Березинский Д.А. Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых пористых сред // *Докл. АН России*. – 1998. – Т. 358, № 3. – С. 343–345.
10. Kondaurov V.I. A non-equilibrium model of a porous medium saturated with immiscible fluids // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2009. – Vol. 73. – Iss. 1. – P. 88–102. doi: 10.1016/j.jappmath-mech.2009.03.004
11. Петров И.А., Славнов Е.В. Моделирование шнек-прессового отжима как совокупности процессов течения вязкой несжимаемой смеси и фильтрации жидкости сквозь пористую среду // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 277–285. doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.31
12. Аптуков В.Н. Модель упруговязкопластического пористого тела // *Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика*. – 2008. – № 4. – С. 77-81.
13. Mixed and Galerkin finite element approximation of flow in a linear viscoelastic porous medium / E. Rohan, S. Shaw, M.F. Wheeler, J.R. Whiteman // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2013. – Vol. 260. – P. 78–91. doi: 10.1016/j.cma.2013.03.003
14. Бармин А.А., Мельник О.Э., Скульский О.И. Модель стационарного неизотермического течения магмы в канале вулкана с учетом скольжения на границе // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 354–358.
15. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1984. – 628 с.
16. Яковлев Д.А. Теоретические исследования процесса отжима сока шнековым рабочим органом с дополнительным дренирующим контуром // *Вестник Дон. гос. техн. ун-та*. – 2011. – Т. 11, № 7. – С. 997–1004.
17. Яковлев Д.А. Рационализация шнекового рабочего органа для отжима сока из зеленых растений // *Вестник Дон. гос. техн. ун-та*. – 2010. – Т. 10, № 4. – С. 556–559.

18. Белобородов В.В. Основные процессы производства растительных масел. – М.: Пищевая промышленность, 1966. – 240 с.

19. Раувендаль К. Экструзия полимеров. – СПб: Профессия, 2006. – 768 с.

20. Скульский О.И. Численное моделирование одночервячных экструдеров // Пластические массы. – 1997. – № 8, – С. 39–43.

21. Savenkova O.V., Skul'skiy O.I., Slavnov Ye.V. Thermal modes existing in screw extruder for thermoplastic materials // Fluid Mechanics-Soviet Research. – 1987. – Vol. 16. – No. 3. – P. 128–133.

22. Skulsky O.I. Numerical solution problems of highly concentrated rod-like makromolecules // Inter J. Polymeric Mater. – 1994. – № 27. – P. 67–75.

23. Скульский О.И., Славнов Е.В. Диффузия влаги при экструзионной переработке увлажненного зерна // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т.1, № 2. – С. 74–81.

24. Анферов С.Д., Скульский О.И., Славнов Е.В. Математическая модель течения вязкой пористой среды в приложении к процессу экструзионного отжима масличных культур // Вестник Перм. ун-та. Математика, механика, информатика. – 2011. – № 3. – С. 55–64.

25. Anferov S.D., Skul'skiy O. I., Slavnov E.V. Mathematical model of rape oil extrusion extraction // Journal of International Scientific Publications: Ecology & Safety. – 2012. – Vol. 6. – Part 2. – P. 81–87.

26. Liu J., Mu L., Ye X. A Comparative Study of Locally Conservative Numerical Methods for Darcy's Flows // Procedia Computer Science. – 2011. – Vol. 4. – P. 974–983. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.103

27. Fučík R., Mikyška J. Discontinuous Galerkin and Mixed-Hybrid Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Different Capillary Pressures // Procedia Computer Science. – 2011. – Vol. 4. – P. 908–917. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.096

28. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1977. – 464 с.

29. Sun S., Salama A., El-Amin M.F. An Equation-Type Approach for the Numerical Solution of the Partial Differential Equations Governing Transport Phenomena in Porous Media // Procedia Computer Science. – 2012. – Vol. 9. – P. 661–669. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.071

30. Choquet C. On a fully coupled nonlinear parabolic problem modelling miscible compressible displacement in porous media // Journal of

Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 339. – Iss. 2. – P. 1112–1133. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.07.037

31. Славнов Е.В., Петров И.А., Анферов С.Д. Изменение вязкости экструдата рапса в процессе отжима масла (влияние давления) // Аграрный вестник Урала. – 2011. – № 9. – С. 16-19.

32. Славнов Е.В. Изменение проницаемости масличных культур в процессе отжима масла на примере экструдата рапса // Доклады Рос. акад. с.-х. наук. –2013. – № 3. – С. 58–60.

References

1. Nikolaevskiy V.N., Basnieva K.S., Gorbunov A.T., Zotov G.A. Mekhanika nasyshchennykh poristyykh sred [Saturated porous media mechanics]. Moscow: Nedra, 1970, 339 p.

2. Borenblat G.I., Entov V.M., Ryzhik V.I. Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh [Movement of liquids and gases in natural formations]. Moscow: Nedra, 1984, 208 p.

3. El-Amin M.F., Salama A, Sun S. A Conditionally Stable Scheme for a Transient Flow of a Non-Newtonian Fluid Saturating a Porous Medium, 2012. *Procedia Computer Science*, vol. 9, pp. 651-660. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.070

4. Asgari A., Bagheripour M.H., Mollazadeh M. A generalized analytical solution for a nonlinear infiltration equation using the exp-function method. *Scientia Iranica*, 2011. vol. 18, iss. 1, pp. 28-35. doi: 10.1016/j.scient.2011.03.004

5. Meretukov Z.A., Kosachev V.S., Koshevoi E.P. Reshenie zadachi nelineinoy naporoprovodnosti pri otzhime [Nonlinear pressure conductivity problem solution under extraction conditions]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Pishchevaia tekhnologiya*, 2011, vol. 323-324, no. 5-6, pp. 62-64.

6. Meretukov Z.A., Koshevoi E.P., Kosachev V.S. Reshenie differentsial'nogo uravneniia otzhima [Extraction differential equation solution]. *Novye tekhnologii*, 2011, no. 4, pp. 54-57.

7. Helmig R., Flemisch B., Wolff M., Ebigbo A., Class H. Model coupling for multiphase flow in porous media. *Advances in Water Resources*, 2013, vol. 51, pp. 52-66. doi: 10.1016/j.advwatres.2012.07.003

8. Nikolaevskiy V.N. Geomekhanika i fluidodinamika [Geomechanics and fluid-dynamics]. Moscow: Nedra, 1996, 446 p.

9. Kosterin A.V., Berezinskii D.A. Nasyshchenno-nenasyshchennyye sostoianiia deformiruemykh poristyykh sred [Saturated-unsaturated state of deformable porous media]. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk*, 1998, vol. 358, no. 3, pp. 343-345.

10. Kondaurov V.I. A non-equilibrium model of a porous medium saturated with immiscible fluids. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, iss. 1, pp. 88-102. doi: 10.1016/j.jappmath-mech.2009.03.004

11. Petrov I.A., Slavnov E.V. Modelirovanie shnek–pressovogo otzhima kak sovokupnosti protsessov techeniia viazkoii neszhimaemoi smesi i fil'tratsii zhidkosti skvoz' poristuiu sredu [Simulation of screw–press oil extraction as a set of two processes: incompressible viscous mixture flow and fluid filtration in porous medium]. *Computational continuum mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 277-285. doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.31

12. Aptukov V.N. Model' uprugo-viazkoplasticheskogo poristogo tela [The model of the elasto-viscoplastic porous body]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2008, no. 4, pp. 77-81.

13. Rohan E., Shaw S., Wheeler M.F., Whiteman J.R. Mixed and Galerkin finite element approximation of flow in a linear viscoelastic porous medium. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, vol. 260, pp. 78-91. doi: 10.1016/j.cma.2013.03.003

14. Barmin A.A., Mel'nik O.E., Skul'skii O.I. Model' statsionarnogo neizotermicheskogo techeniia magmy v kanale vulkana s uchetom skol'zheniia na granitse [Model of steady non-isothermal magma flow in volcano channel with slip on the boundary]. *Computational continuum mechanic*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 354-358.

15. Tadmor Z., Gogos K. Teoreticheskie osnovy pererabotki polimerov [Theoretical bases of polymer processing]. Moscow: Khimiia, 1984, 628 p.

16. Iakovlev D.A. Teoreticheskie issledovaniia protsessa otzhima soka shnekovym rabochim organom s dopolnitel'nym dreniruiushchim konturom [Theoretical investigation of Juice extrusive extraction process with an additional drain circuit]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, vol. 11, no. 7, pp. 997-1004.

17. Iakovlev D.A. Ratsionalizatsiia shnekovogo rabocheho organa dlia otzhima soka iz zelenykh rastenii [Rationalization of the screw-working body for extraction of juice from green plants]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 556-559.

18. Beloborodov V.V. Osnovnye protsessy proizvodstva rastitel'nykh masel [Basic processes of vegetable oil production]. Moscow: Pishchevaia promyshlennost', 1966, 240 p.

19. Rauvendaal' K. Ekstruziia polimerov [Polymer extrusion]. Saint Petersburg: Professiiia, 2006, 768 p.

20. Skul'skiy O.I. Chislennoe modelirovanie odnochervichnykh ekstrudirov [Numerical modeling of single-screw extruders]. *International Polymer Science and Technology*, 1998, vol. 25, no. 4, pp. 91-95.

21. Savenkova O.V., Skul'skiy O.I., Slavnov Ye.V. Thermal modes existing in screw extruder for thermoplastic materials. *Fluid Mechanics-Soviet Research*, 1987, vol. 16, no. 3, pp. 128-133.

22. Skul'skiy O.I. Numerical solution problems of highly concentrated rod-like macromolecules. *Inter J. Polymeric Mater.*, 1994, no. 27, pp. 67-75.

23. Skul'skiy O.I., Slavnov Ye.V. Diffuziia vlagi pri ekstruzionnoi pererabotke uvlazhnennogo zerna [Diffusion of moisture during extrusion processing of wet grain]. *Computational continuum mechanics*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 74-81.

24. Anferov S.D., Skul'skiy O. I., Slavnov Ye.V. Matematicheskaia model' techeniia viazkoi poristoi sredy v prilozhenii k protsessu ekstruzionnogo otzhima maslichnykh kul'tur [Mathematical model of viscous porous medium flow in application to the oilseed extrusive extraction]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2011, no. 3, pp. 55-64.

25. Anferov S.D., Skul'skiy O. I., Slavnov E.V. Mathematical model of rape oil extrusion extraction. *Journal of International Scientific Publications: Ecology & Safety*, 2012, vol. 6, part 2, pp. 81-87.

26. Liu J., Mu L., Ye X., A Comparative Study of Locally Conservative Numerical Methods for Darcy's Flows. *Procedia Computer Science*, 2011, vol. 4. pp. 974-983. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.103

27. Fučík R., Mikyška J. Discontinuous Galerkin and Mixed-Hybrid Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Different Capillary Pressure. *Procedia Computer Science*, 2011, vol. 4, pp. 908-917. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.096

28. Torner R.V. Teoreticheskie osnovy pererabotki polimerov [Theoretical principles of polymer processing]. Moscow: Khimiya, 1977, 464 p.

29. Sun S., Salama A., El-Amin M.F. An Equation-Type Approach for the Numerical Solution of the Partial Differential Equations Governing

Transport Phenomena in Porous Media. *Procedia Computer Science*, 2012, vol. 9, pp. 661-669. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.071

30. Choquet C. On a fully coupled nonlinear parabolic problem modelling miscible compressible displacement in porous media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 339, iss. 2, pp. 1112-1133. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.07.037

31. Slavnov E.V., Petrov I.A., Anferov S.D. Изменение вязкости экструдата рапса в процессе отжима масла (влияние давления) [Rape cake viscosity variation during oilseeds extraction (pressure influence)]. *Аграрный вестник Урала*, 2011, no.10, pp. 16-18.

32. Slavnov E.V. Изменение проницаемости масличных культур в процессе отжима масла на примере экструдата рапса [Oilseeds permeability variation during rape oil extraction]. *Доклады Российской академии сельскохозяйственных наук*, 2013, no. 3, pp. 58-60.

Об авторах

Анферов Сергей Дмитриевич (Пермь, Россия) – инженер-исследователь лаборатории механики термопластов Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: anferov@icmm.ru).

Скульский Олег Иванович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики термопластов Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: skul@icmm.ru).

About the authors

Sergey D. Anferov (Perm, Russian Federation) – Research Engineer of Laboratory of Thermoplastics Mechanics, Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1, Akademik Korolev str., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: anferov@icmm.ru).

Oleg I. Skulskiy (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher of Laboratory of Thermoplastics Mechanics, Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1, Akademik Korolev str., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: skul@icmm.ru).

Получено 22.12.2013

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Анферов С.Д., Скульский О.И. Моделирование фильтрации жидкости через пластически деформируемую пористую среду в процессе экструзионного отжима // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 29–47.

Please cite this article in English as:

Anferov S.D., Skul'skiy O.I. Modelling of fluid filtration through plastically deformed porous medium in the process of extrusion. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 2. P. 29-47.