УДК 519.81

А.Л. Гольдштейн

Пермский государственный технический университет

МЕТОД ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Предлагается подход к решению многокритериальной задачи математического программирования, концептуально близкий к методу минимаксной свертки и методу идеальной точки. В нем в качестве обобщенного критерия используется относительное отклонение от идеальной точки. Приводится пример, иллюстрирующий данный подход.

В задаче многокритериального математического программирования известны модель, описывающая множество допустимых решений $\boldsymbol{D}$, и набор целевых функций $F_i(\mathbf{X})$, $i = 1 \ldots m$, отражающих зависимости частных критериев от искомых решений $\mathbf{X}$. Для решения таких задач предложено много методов, основанных на различных подходах [1–4]. Это метод функции полезности, методы построения обобщенного критерия (свертки, главного критерия, идеальной точки, метрик Чебышева и т.п.), лексикографический подход, целевое программирование, методы построения множества Парето, широкий спектр диалоговых методов.

На практике часто обращаются к методам свертки (линейной или максиминной) и методу идеальной точки как наиболее простым и доступным. На наш взгляд, объединение идей этих методов позволяет построить новый метод, более привлекательный с практической точки зрения. В методе максиминной свертки в качестве обобщенного критерия принимается частный критерий с наименьшим значением среди всех критериев, и он максимизируется. В методе идеальной точки обобщенным критерием является расстояние от идеальной точки, в которой все частные критерии имеют оптимальные значения, до множества достижимости. Для измерения расстояния могут использоваться различные метрики, а решение задачи заключается в минимизации данного расстояния. При необходимости в обобщенные критерии могут быть введены весовые коэффициенты.

В отличие от этих подходов нами предлагается использовать в качестве обобщенного критерия относительное отклонение от идеальной точки (в долевом или процентном измерении). Такой критерий независимо от вида модели является по определению линейным.

В предположении строгой положительности всех критериев $F_i(\mathbf{X})$ на допустимом множестве введем относительные частные критерии:

$$f_i(\mathbf{X}) = F_i(\mathbf{X}) / F_i(\mathbf{X}^*),$$

где $F_i(\mathbf{X}^*)$ – оптимальное значение i-го критерия. Очевидно, что $f_i(\mathbf{X}^*)=1$ для всех i. Тогда относительное отклонение от оптимального значения для максимизируемых критериев ограничим величиной Δ в виде критериального неравенства

$$1 - f_i(\mathbf{X}) \le \Delta,$$

а для минимизируемых критериев – в виде неравенства

$$f_i(\mathbf{X}) - 1 \le \Delta.$$

В итоге многокритериальная задача математического программирования сводится к задаче с одним обобщенным критерием:

$$\Delta \to \min$$

$$f_i(\mathbf{X}) + \Delta \ge 1, \text{ если } F_i(\mathbf{X}) \to \max;$$

$$f_i(\mathbf{X}) - \Delta \le 1, \text{ если } F_i(\mathbf{X}) \to \min;$$

$$\mathbf{X} \in \boldsymbol{D}.$$

Если желательно придать разную значимость отклонениям по частным критериям, то в модель вводятся весовые коэффициенты α_i:

$$\Delta \to \min$$

$$f_i(\mathbf{X}) + \alpha_i \Delta \ge 1, \text{ если } F_i(\mathbf{X}) \to \max;$$

$$f_i(\mathbf{X}) - \alpha_i \Delta \le 1, \text{ если } F_i(\mathbf{X}) \to \min;$$

$$\sum \alpha_i = 1;$$

$$\mathbf{X} \in \boldsymbol{D}.$$

При этом для увеличения значимости критерия следует уменьшать значение соответствующего α_i, поэтому коэффициенты α_i можно трактовать как коэффициенты антизначимости. Величина отклонений по критериям составит $\alpha_i\Delta$. Изменение α_i влечет за собой изменение решения. Очевидно, что если сформулированная задача имеет одно решение, то оно будет эффективным решением исходной многокритериальной задачи.

На практике удобнее использовать отклонения в процентах. Чтобы перейти к процентам, достаточно в правую часть выражения для $f_i(\mathbf{X})$ ввести множитель 100, а в критериальных неравенствах заменить 1 на 100.

В качестве примера рассмотрим линейную двухкритериальную задачу:

$$L_1=9x_1+20x_2\to\max;$$

$$L_2=5x_1+2x_2\to\min;$$

$$9x_1+7x_2\leq 126;$$

$$-5x_1+3x_2\leq 15;$$

$$-7x_1+11x_2\leq 77;$$

$$-x_1+8x_2\geq 16;$$

$$x_1+x_2\geq 7;$$

$$\forall x_j\geq.$$

Допустимое множество задачи показано на рис. 1, а множество достижимости $\boldsymbol{G}$ в критериальном пространстве – на рис. 2.

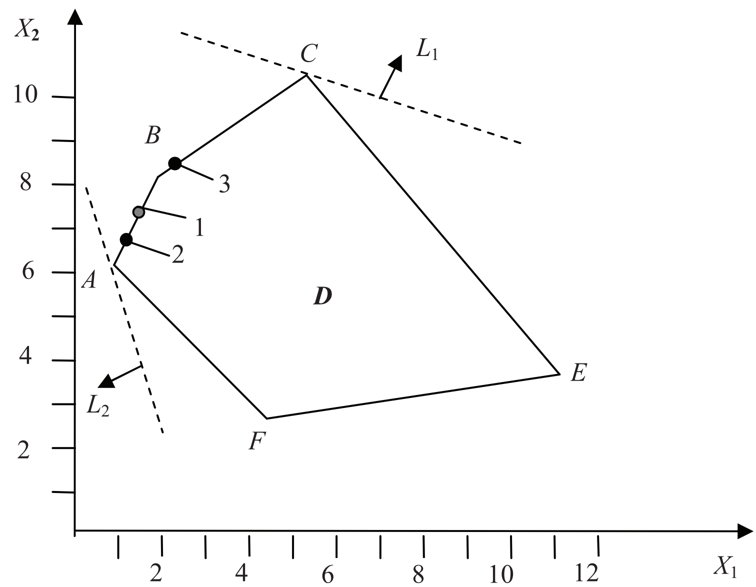

Рис. 1. Допустимое множество решений

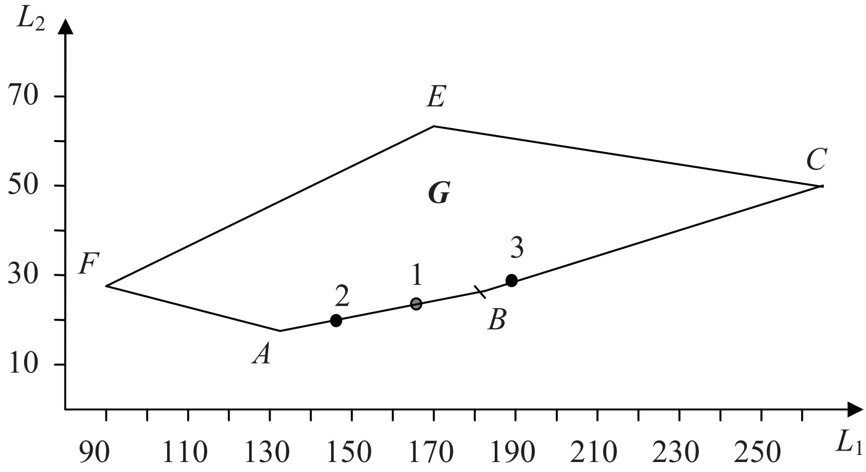

Рис. 2. Множество достижимости

Оптимальные значения критериев L_1^*=264,347, L_2^*=16,25 достигаются в точках C и A соответственно. Решение по обоим критериям одновременно ищем по предложенному подходу, согласно которому получаем модель, представляемую в пакете Lindo в следующем виде:

```
min y
St
3.4046x1+7.5659x2+y>100
30.769x1+12.3077x2-y<100
9x1+7x2<126
-5x1+3x2<15
-7x1+11x2<77
-x1+8x2>16
x1+x2>7
L1-9x1-20x2=0
L2-5x1-2x2=0
end,
```

где y – отклонение в процентах. В результате решения имеем:

```
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      38.22319

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       Y        38.223194          0.000000
      X1         1.495358          0.000000
      X2         7.492263          0.000000
      L1       163.303482          0.000000
      L2        22.461315          0.000000
```

```
ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 2)        0.000000         -0.762031
 3)        0.000000          0.237969
 4)       60.095936          0.000000
 5)        0.000000          0.945532
 6)        5.052611          0.000000
 7)       42.442745          0.000000
 8)        1.987621          0.000000
 9)        0.000000          0.000000
10)        0.000000          0.000000
```

На рисунках соответствующая точка обозначена цифрой *1*. Как видно, получено эффективное решение, при этом оба целевые ограничения выполнены как равенства, а отклонение по обоим критериям одинаково и равно 38,2 %. Решение не изменится, если ввести любые равные значения α_i. Влияние α_i на результат показано в строках 1–7 нижеследующей таблицы.

Влияние α_i на эффективные решения

№	α_1	α_2	L_1	L_2	x_1	x_2	y	$\alpha_1 y$	$\alpha_2 y$	Точка на рис.
1	0,1	0,9	224,4	38,4	3,88	9,47	151,2	15,1	136	
2	0,2	0,8	201,4	31,73	2,83	8,8	119	23,8	95,2	
3	0,3	0,7	186,5	27,4	2,14	8,36	98,2	29,5	68,7	3
4	0,5	0,5	163,3	22,5	1,495	7,49	76,4	38,2	38,2	1
5	0,7	0,3	147,4	19,3	1,12	6,87	63,2	44,2	19	2
6	0,8	0,2	141,4	18,14	0,98	6,63	58,2	46,5	11,7	
7	0,9	0,1	136,2	17,13	0,855	6,43	53,9	48,6	5,3	
8	–	–	143,5	18,6	1,03	6,71	–	–	–	

В предпоследних двух столбцах представлены отклонения в %, сумма которых, естественно, равна y. Из таблицы хорошо виден характер изменения критериев и их отклонений от оптимальных значений в зависимости от значений α_i. Нетрудно понять, что данный метод принципиально позволяет получить все эффективные решения задачи. Отметим, что во всех исследованных точках критериальные ограничения выполняются как равенства. Если к этой задаче применить метод линейной свертки, то мы не получим эффективные решения, лежащие на сторонах *AB* и *BC* (исключая сами вершины), ни при каких значениях весов критериев.

При обращении к методу идеальной точки без весов с использованием евклидовой метрики применительно к расстоянию в относительных величинах критериев (%) приходим к задаче квадратичного программирования (КП) с критерием

$$(3{,}4046x_1+7{,}5659\ x_2-100)^2+(30{,}769x_1+12{,}3077\ x_2-100)^2\to\min.$$

Преобразованная для Lindo модель задачи КП имеет вид

```
min x1+x2+u1+u2+u3+u4+u5
st
 1916.645x1+808.909x2+9u1-5u2-7u3-u4+u5>6834.72
 808.909x1+417.445x2+7u1+3u2+11u3-u4-8u5>3974.72
  9x1+7x2<126
 -5x1+3x2<15
 -7x1+11x2<77
  x1+x2>7
 -x1+8x2>16
end
QCP 4,
```

а результаты решения приведены в 8-й строке таблицы. На рисунках это решение располагается между точками *A* и *2*, оно значительно отличается от решения, полученного предложенным методом без весов. Несмотря на отсутствие весов, метод идеальной точки привел к решению, на которое основное влияние оказал второй критерий.

По нашему мнению, предложенный метод отклонений представляется более удобным и гибким инструментом решения многокритериальных задач, по крайней мере, в сравнении с методами свертки и идеальной точки. Его практичность возрастает при решении многокритериальных линейных задач.

Библиографичекий список

1. Фишберн П.С. Теория полезности для принятия решений/ под. ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Наука, 1978.

2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.

3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.

4. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде. – М.: Физматлит, 2002.

Получено 27.09.2010