

УДК 531/534: [57+61]

## О СООТНОШЕНИИ ПОНЯТИЙ «ЦЕНТР СОПРОТИВЛЕНИЯ ЗУБА» И «ЦЕНТР ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ БАЛКИ»

М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин, М.Ю. Няшин

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

**Аннотация.** Рассмотрена взаимосвязь понятий центра сопротивления зуба и центра жесткости сечения балки, применяемых соответственно в стоматологической биомеханике и в теории сопротивления материалов. Установлено, что эти понятия являются качественно родственными, однако простой и точной аналогии между ними провести не удастся. Кроме того, понятие центра жесткости является математически гораздо менее строгим, чем понятие центра сопротивления.

**Ключевые слова:** центр сопротивления зуба, центр жесткости, центр изгиба.

### ЦЕНТР СОПРОТИВЛЕНИЯ ЗУБА

Понятие «центр сопротивления зуба» используется в стоматологической биомеханике [5–8]. Общий смысл этого понятия следующий. К зубу на непродолжительное время прикладывается сосредоточенная сила  $\mathbf{F}$ , под действием которой зуб перемещается в новое положение равновесия (рис. 1, *a*). Центром сопротивления зуба называется жестко связанная с зубом точка  $C_{res}$ , имеющая следующее свойство: если линия действия силы проходит через эту точку, то зуб перемещается поступательно (рис. 1, *b*). Точный смысл понятия «центр сопротивления зуба» устанавливается только в рамках определенной математической модели [7].

Пусть зуб является абсолютно твердым телом, периодонт является линейно-упругой средой, и перемещения зуба малы. Далее, пусть зуб и окружающий его периодонт имеют плоскость симметрии ( $Oxy$ ), и приложенная к зубу сила лежит в этой плоскости. Тогда перемещение зуба будет плоским и достаточно рассмотреть только сечение зуба в плоскости симметрии. Можно показать [7], что угол поворота зуба

$$\varphi = \beta \left( (x_F - x_*) F_y - (y_F - y_*) F_x \right), \quad (1)$$

где  $\beta > 0$ ,  $x_*$ ,  $y_*$  – величины, определяемые формой корня зуба и упругими свойствами периодонта;  $(F_x, F_y)$  – приложенная к зубу сила;  $(x_F, y_F)$  – точка приложения силы. Из (1) следует, что если линия действия силы проходит через точку  $(x_*, y_*)$ , то  $\varphi = 0$ ; следовательно,  $(x_*, y_*) = C_{res}$ .

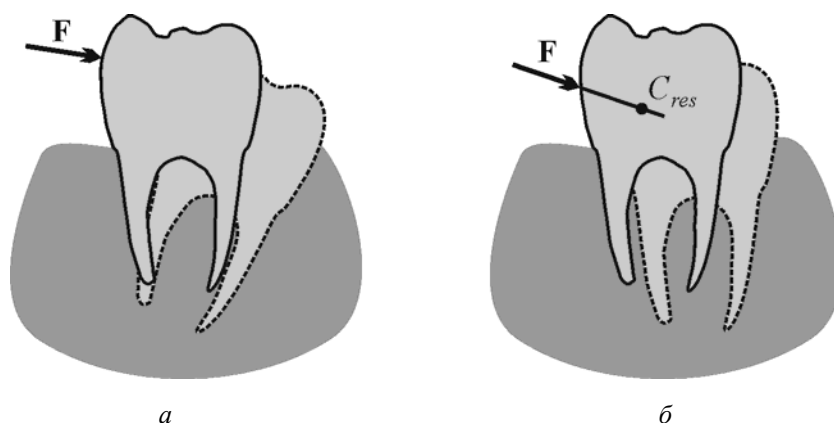


Рис. 1. Перемещение зуба под действием силы: *a* – не поступательное; *б* – поступательное

Координаты центра сопротивления можно найти, решив плоскую задачу теории упругости о перемещении абсолютно твердого тела в упругой среде. Это, как правило, можно сделать только численно, ввиду сложной формы сечения корня зуба. На рис. 2 показан найденный в работе [6] центр сопротивления для изображенного сечения в предположении однородного и изотропного периодонта.

### ЦЕНТР ЖЕСТКОСТИ СЕЧЕНИЯ БАЛКИ

Понятие «центр жесткости сечения балки» используется в теории сопротивления материалов [1, 3, 4]. Обычно для него применяется эквивалентный термин «центр изгиба». Общая схема введения этого понятия следующая. Рассматривается слабый изгиб консольной балки, к свободному краю которой приложена поперечная сила  $F$  (рис. 3). Точка приложения силы не конкретизируется. Для такой балки приближенно вычисляются касательные (по отношению к поперечному сечению) напряжения  $\sigma_{zx}$  и  $\sigma_{zy}$ . Соответствующие формулы различны для сплошного и тонкостенного сечений.

Для сплошного сечения (плоская область  $D$ )

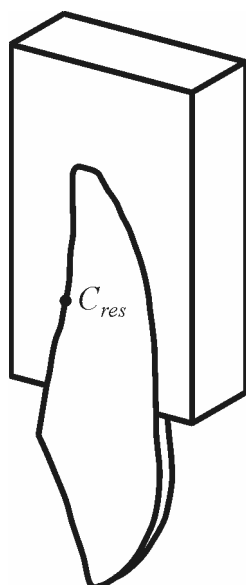


Рис. 2. Численно найденный центр сопротивления зуба

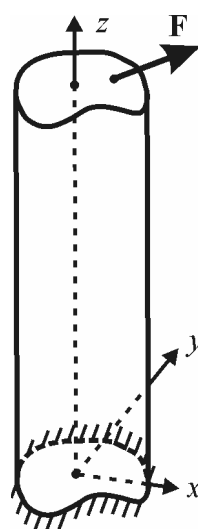


Рис. 3. Слабый изгиб консольной балки

$$\sigma_{zx}(x) = \frac{F_x S_y(x)}{J_y b_y(x)}, \quad \sigma_{zy}(y) = \frac{F_y S_x(y)}{J_x b_x(y)}, \quad (2)$$

где  $F_x, F_y$  – компоненты силы  $\mathbf{F}$ ,

$$S_x(\eta) = \iint_{D \cap \{y \geq \eta\}} y \, dx \, dy, \quad S_y(\xi) = \iint_{D \cap \{x \geq \xi\}} x \, dx \, dy, \quad J_x = \iint_D y^2 \, dx \, dy, \quad J_y = \iint_D x^2 \, dx \, dy, \\ b_x(\eta) = \text{mes}(D \cap \{y = \eta\}), \quad b_y(\xi) = \text{mes}(D \cap \{x = \xi\}),$$

оси  $x$  и  $y$  должны быть главными центральными осями области  $D$ .

Для тонкостенного сечения (кривая  $L = AB$  геометрически пренебрежимо малой ширины  $\delta$ )

$$\sigma_{zx}(M) = \sigma(M)\tau_x(M), \quad \sigma_{zy}(M) = \sigma(M)\tau_y(M), \quad (3)$$

где  $M = (x, y)$  – точка кривой  $L$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный касательный вектор к кривой  $L$ ,

$$\sigma(M) = \frac{F_x S_y(M)}{J_y \delta} + \frac{F_y S_x(M)}{J_x \delta},$$

$$S_x(M) = \int_{MB} y \, dl, \quad S_y(M) = \int_{MB} x \, dl, \quad J_x = \int_L y^2 \, dl, \quad J_y = \int_L x^2 \, dl,$$

оси  $x$  и  $y$  должны быть главными центральными осями кривой  $L$ .

Далее касательные напряжения  $\sigma_{zx}$  и  $\sigma_{zy}$  рассматриваются как плоская система распределенных по сечению сил. Нетрудно показать, что а) эта система сил, как в случае сплошного, так и в случае тонкостенного сечения, приводится к равнодействующей; б) существует точка  $C_{flex}$  такая, что линия действия равнодействующей проходит через эту точку, независимо от величины и направления силы  $\mathbf{F}$ . Точка  $C_{flex}$  называется центром изгиба сечения.

Используя (2) и (3), можно получить выражения для координат центра изгиба. Для сплошного сечения

$$x_{C_{flex}} = \frac{1}{J_x} \iint_D \frac{S_x(y)x \, dx \, dy}{b_x(y)}, \quad y_{C_{flex}} = \frac{1}{J_y} \iint_D \frac{S_y(x)y \, dx \, dy}{b_y(x)}. \quad (4)$$

Для тонкостенного сечения

$$x_{C_{flex}} = (2/J_x) \int_L \Omega(M)y \, dl, \quad y_{C_{flex}} = -(2/J_y) \int_L \Omega(M)x \, dl, \quad (5)$$

где  $\Omega(M)$  – площадь криволинейного треугольника  $OAM$  ( $O$  – начало системы координат в плоскости сечения). На рис. 4 показаны найденные из (4) и (5) центры изгиба сплошного полукруглого сечения и тонкостенного сечения, имеющего форму полуокружности.

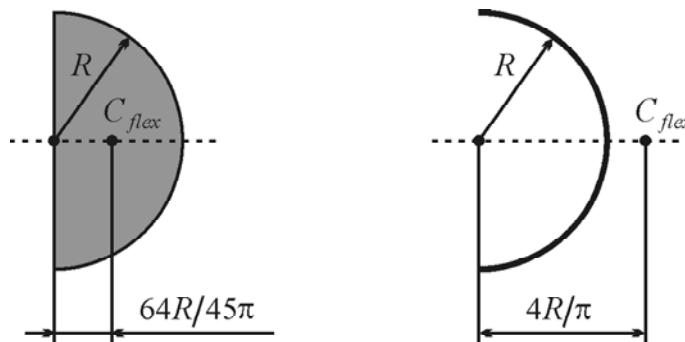


Рис. 4. Центры жесткости некоторых сечений

В работах [1, 3, 4] проводятся качественные рассуждения о связи точки приложения силы  $F$  (которая до сих пор не конкретизировалась) с возможным закручиванием балки. Если линия действия силы  $F$  проходит через центр изгиба, то «как момент внешних сил, так и момент внутренних касательных усилий относительно центра изгиба будут равны нулю, т.е. кручение балки не произойдет» [1]. Если провести ось через центры изгиба сечений, то «силы, действующие в любой проходящей через эту ось плоскости, не вызывают кручения» [3]. Момент силы  $F$  «относительно центра изгиба должен быть равен нулю, иначе в стержне будут возникать деформации, свойственные не только поперечному изгибу, но и кручению» [4]. Следует заметить, что эти рассуждения являются нестрогими. Действительно, при нахождении касательных напряжений предполагалось, что кручение отсутствует (рассматривался только изгиб), а затем с помощью полученных в этом предположении результатов устанавливается условие отсутствия кручения. Кроме того, само понятие кручения балки вводится в [1, 3, 4] в предположении, что к свободному сечению балки приложена пара сил (а не одна сила).

### Выводы

Сопоставляя понятия «центр сопротивления зуба» (ЦС) и «центр жесткости (изгиба) сечения балки» (ЦЖ), можно сделать следующие выводы.

Данные понятия являются качественно родственными, так как оба относятся к ситуации, где к некоторому объекту прикладывается сила, под действием которой может произойти «кручение» объекта. При этом существует точка, имеющая свойство: если линия действия силы проходит через эту точку, то «кручения» не происходит. Вместе с тем между этими понятиями имеется ряд существенных различий, состоящих в следующем.

Понятие ЦС вводится весьма строго в рамках определенной математической модели с небольшим числом явно сформулированных предположений. Понятие ЦЖ вводится нестрого как один из элементов обширного конгломерата разнородных понятий, теорий и методов.

Понятие ЦС относится к абсолютно твердому телу, помещенному в деформируемую среду. Понятие ЦЖ относится к деформируемому твердому телу, не помещенному в какую-либо среду.

Для нахождения ЦС следует решить краевую задачу для системы уравнений в частных производных. Для нахождения ЦЖ имеются простые аналитические формулы.

Не удастся провести простую, хотя бы формальную, но математически точную аналогию между понятиями ЦС и ЦЖ. Действительно, наиболее простая аналогия состояла бы в рассмотрении сечения балки как абсолютно твердого плоского тела, которое соответствовало бы сечению зуба плоскостью симметрии. Далее можно было бы исследовать условия, при которых угол поворота этого плоского тела равен нулю. Однако сечение балки нельзя рассматривать как абсолютно твердое тело: в рамках даже простейшей теории изгиба форма сечения при изгибе меняется [2].

Вышеуказанные существенные различия между понятиями ЦС и ЦЖ не исключают принципиальной возможности установления некоторой точной математической взаимосвязи этих понятий. Такая взаимосвязь может обнаружиться, если «поднять» всю изложенную в работах [1, 3, 4] теорию изгиба и кручения балок хотя бы на «физический» уровень строгости.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев, Н.М.* Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976.
2. *Ландау, Л.Д.* Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965.

3. *Работнов, Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979.
4. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
5. *Bulcke, M.M.* The center of resistance of anterior teeth during intrusion using the laser reflection technique and holographic interferometry / M.M. Bulcke, L.R. Dermaut, R.C.L. Sachdeva, C.J. Burstone // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 1986. – No. 90. – P. 211–220.
6. *Nyashin, Y.I.* Centre of resistance and centre of rotation of a tooth: theoretical background of a procedure for their experimental determination / Y.I. Nyashin, M.Y. Nyashin, M.A. Osipenko, F.G. Rammerstorfer // (в печати).
7. *Osipenko, M.A.* Center of resistance and center of rotation of a tooth: the definitions, conditions of existence, properties / M.A. Osipenko, M.Y. Nyashin, Y.I. Nyashin // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3, No. 1. – P. 5–15.
8. *Vollmer, D.* Determination of the centre of resistance in an upper human canine and idealized tooth model / D. Vollmer, C. Bourauel, K. Maier, A. Jäger // European Journal of Orthodontics. – 1999. – No. 21. – P. 633–648.

## ON THE RELATIONSHIP BETWEEN THE CONCEPTS OF THE CENTRE OF RESISTANCE OF A TOOTH AND THE CENTRE OF RIGIDITY OF A BEAM CROSS-SECTION

**M.A. Osipenko, Y.I. Nyashin, M.Y. Nyashin (Perm, Russia)**

The interrelation between the concepts of the centre of resistance of a tooth and the centre of rigidity of a beam cross-section is considered. These concepts are used in the dental biomechanics and in the theory of strength of materials, respectively. The concepts are found to be qualitatively allied. However, the attempts to draw the simple and exact analogy between these concepts have been unsuccessful. Besides, the concept of the centre of rigidity is much less rigorous mathematically than the concept of the centre of resistance.

**Key words:** centre of resistance of a tooth, centre of rigidity, flexural centre.

*Получено 26 августа 2009*