

УДК 531/534: [57+61]

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ТРАБЕКУЛЯРНОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ С УЧЁТОМ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА

А.Н. Натали, Э.Л. Карниель, Ч. Вентурато, П.Д. Паван

Centre of Mechanics of Biological Materials, University of Padova, Via Marzolo 9, I-35131, Padova, Italy,
e-mail:arturo.natali@unipd.it
Центр механики биологических материалов, Университет Падуя, Италия

Аннотация. В работе представлена упругопластическая модель для изучения механического неупругого поведения трабекулярной кости. Вязкоупругий отклик ткани определяется с помощью линейной вязкоупругой модели. Упругопластическая модель с законом упрочнения используется для описания отклика ткани после предела упругости. При минимизации разности между результатами модели и экспериментальными данными находятся параметры, входящие в определяющее соотношение. В качестве экспериментальных данных используются результаты испытаний на костных образцах животных. Нахождение вязких параметров проводится с использованием данных экспериментов на сжатие при ползучести и пластичности с постоянной скоростью деформации. Для нахождения параметров пластичности проводились монотонные испытания на сжатие при уровне деформаций выше предела текучести. На диаграммах показаны графики, полученные по модели, и экспериментальные данные, что может служить оценкой надежности проведенного анализа.

Ключевые слова: трабекулярная кость, механическое поведение, определяющие соотношения, вязкоупругопластичность, вычислительная биомеханика.

ВВЕДЕНИЕ

Построение определяющих соотношений и последующий численный анализ посредством метода конечных элементов на основе этих уравнений необходимы для описания упругого и неупругого механического поведения трабекулярной костной ткани [8].

Неупругое поведение трабекулярной кости необходимо учитывать при изучении переломов [17, 18], особенно в случае остеопороза [19] или при анализе взаимодействия «кость–имплантат» [2, 11, 13, 28]. Несмотря на то, что число переломов у молодых людей и взрослых вследствие падений, аварий и спортивных травм велико, количество атравматичных переломов, особенно у пожилых людей [22, 23], значительно выше. Риск костных патологий и атравматичных переломов, взаимосвязанных друг с другом, становится очень значимым, так как число пожилых людей возрастает. Необходимо подчеркнуть, что атравматичные переломы возникают на участках трабекулярной костной ткани, например в позвоночнике, проксимальном отделе бедра и дистальном радиусе [16]. Это говорит о том, что риск перелома выше в тех частях скелета, где содержание трабекулярной ткани больше [19].

© Натали А.Н., Карниель Э.Л., Вентурато Ч., Паван П.Д., 2009

Натали Артуро, профессор, Центр механики биологических материалов, Падуя

Карниель Эманюэль, научный сотрудник, Центр механики биологических материалов, Падуя

Вентурато Чиара, аспирант, Центр механики биологических материалов, Падуя

Паван Пиеро, доцент, Центр механики биологических материалов, Падуя

Замена искусственного сустава и лечение с использованием эндостальных протезов могут повлечь за собой клинические проблемы, связанные с откликом трабекулярной костной ткани. Дегенерация имплантированной ткани и, следовательно, возможное нарушение протезного лечения может проявиться вследствие высокой интенсивности напряжений. В случае высокого уровня деформаций и напряжений в трабекулярной кости могут возникнуть микротрещины. Повреждение трабекулярной кости влияет на ослабление всей кости.

Следовательно, описание неупругого отклика является необходимым для определения напряжений и деформаций в системе «кость–имплантат», которые обеспечили бы её надежность, что является фундаментальным шагом для полного описания механического поведения кости при различных условиях.

Данная тематика имеет не только техническое, но и социальноэкономическое значение. Кроме значительной потери пациентом двигательных функций, происходят еще огромные ежегодные затраты на индивидуальное медицинское лечение [12]. Прямые издержки связаны непосредственно с хирургической операцией и послеоперационной реабилитацией. Косвенные издержки выражаются в помощи родственников и потере трудоспособности пациента [22].

Трабекулярная ткань – это композитное высокопористое анизотропное клеточное твердое тело, из которого состоят кости человека. Трабекулярный материал схож по строению с кортикальной тканью [30] и состоит из гидроксоапатита, коллагена, воды и растворенных в ней протеинов.

Минерализованный внешнеклеточный матрикс представляет собой высокоорганизованную трабекулярную структуру. В трабекулярной костной ткани наблюдаются эффекты, зависящие от времени, а также повреждаемость при циклическом нагружении. Существует большое количество статей, посвященных механическим испытаниям трабекулярной кости, однако разброс результатов широк [5]. Анизотропия и линейно-упругое поведение кости описывалось с помощью линейных анизотропных упругих моделей [24–26]. Трабекулярная сеть состоит из тела с открытыми порами, заполненными костным мозгом, водой и коллагеном, которые могут течь. Следовательно, при приложении внешней нагрузки кость ведет себя как пористая проницаемая среда [6, 10] с механическим откликом, который на макроуровне можно рассматривать как вязкоупругий, так как в состав материала входят коллаген и вода [32, 33]. Этот факт необходимо учитывать при моделировании трабекулярной костной ткани, особенно в случае динамического нагружения. В доступной авторам литературе приведены несколько примеров вязкоупругих моделей [1, 23], которые применяются для описания поведения трабекулярной и кортикальной костных тканей. Кроме того, эффект пластичности должен быть учтён в модели, так как накопление деформации является значимым само по себе, а также оно может служить индикатором возможного повреждения [4]. Эксперименты на образцах трабекулярной ткани свиньи [14, 34] и человека [15] показали, что когда кость нагружена выше предела текучести, то при разгрузке возникает остаточная деформация. Кроме того, напряжение текучести слишком неоднородно в различных анатомических частях кости, в то время как в этих частях деформация однородна [20]. Доступной информации о поведении трабекулярной костной ткани при пределе текучести и после него немного, однако известны примеры моделей, описывающих текучесть трабекулярной костной ткани [9, 20, 31].

Аналогично определяющим соотношениям, имеющимся в литературе, в данной работе предложена модель для конечно-элементного анализа механического поведения костной ткани, а также для исследования ее взаимодействия с эндостальными протезами. Данная модель была заложена в программный пакет «Абакус» (*ABAQUS*).

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Определяющие соотношения

Разработанная модель способна описать механический отклик трабекулярной костной ткани преимущественно в рамках анизотропии с учетом зависимости от времени вследствие вязкости и постоянных деформаций при переходе из упругого состояния. Схожесть кортикальной и трабекулярной тканей приводит к аналогичным уравнениям [21], описывающим их поведение.

Главный аспект при формулировании определяющих соотношений заключается в определении основных параметров и их характеристик. Аналитические уравнения выведены из модели при некоторых механических условиях, характеризующих испытания образцов. Эти соотношения приведены в Приложении, затем они были введены в программу для идентификации параметров.

Вязкоупругое поведение описывается тензором напряжений Коши:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, t) = \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{\varepsilon}) - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^i(\boldsymbol{\varepsilon}, t), \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0$ – мгновенный отклик напряжений, \mathbf{q}^i – внутренние переменные вязкости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор бесконечно малой деформации, t – время, n – число вязких элементов, входящих в систему. Изменение внутренних переменных определяется согласно дифференциальным уравнениям

$$\dot{\mathbf{q}}^i + \frac{1}{\tau^i} \mathbf{q}^i = \gamma^i \boldsymbol{\sigma}^0, \quad (2)$$

где γ^i – относительная жесткость, τ^i – время релаксации i -го элемента.

Кроме того, относительные параметры жесткости должны удовлетворять следующему соотношению:

$$\gamma^\infty = 1 - \sum_{i=1}^n \gamma^i > 0, \quad (3)$$

где γ^∞ – относительная жесткость при термодинамическом равновесии. Выражение (3) описывает полное развитие вязких процессов, которые происходят либо в условиях низкой скорости нагружения, либо при приложении квазистатической нагрузки в течение большого промежутка времени. Выражение (2) является формулировкой в аналитическом виде так называемой модели Зенера (*Zener*).

Подставляя в связь между напряжением и деформацией (1) решение уравнения (2), в результате интегральной свертки [27] получим следующее выражение

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, t) = \int_0^t g(t-s) \frac{d\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{\varepsilon}, s)}{ds} ds, \quad (4)$$

где g – функция релаксации, которая, в свою очередь, описывается следующим выражением:

$$g(t) = \gamma^\infty + \sum_{i=1}^n \gamma^i \exp\left(\frac{-t}{\tau^i}\right). \quad (5)$$

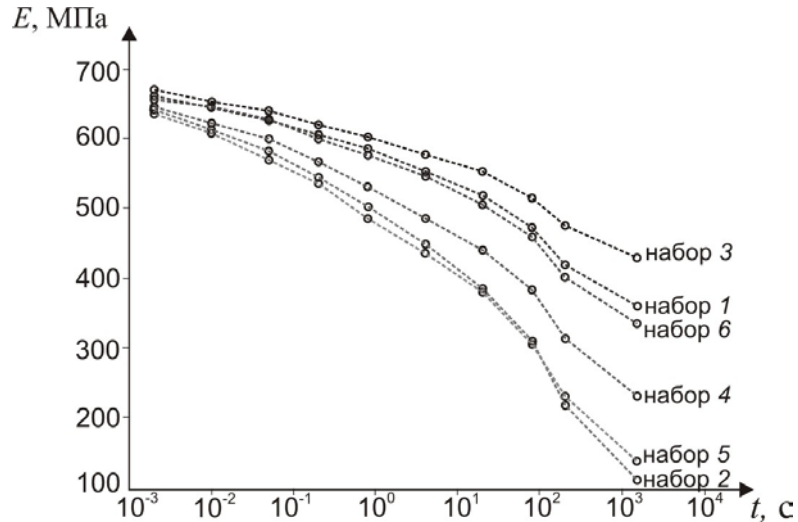


Рис. 1. Экспериментальные данные зависимости модуля упругости от времени в испытаниях на ползучесть в различных наборах образцов трабекулярной костной ткани

Изменение постоянных деформаций описывается с помощью упругопластической зависимости для мгновенного отклика напряжений. Связь между напряжением и деформацией записывается в приращениях:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0 = \mathbf{D}^e \cdot (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p), \quad (6)$$

где \mathbf{D}^e – мгновенный тензор упругости, учитывающий ортотропию трабекулярной костной ткани [6, 7]. Используется ассоциированный закон течения:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \quad (7)$$

где λ – коэффициент пластического течения. Возрастание напряжений относительно деформации выше предела упругости, которое показано на диаграмме растяжения (рис. 2), учитывается при использовании закона упрочнения, записанного в виде

$$\boldsymbol{\epsilon}_y(\lambda) = \boldsymbol{\epsilon}_y^I + \beta \lambda, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\epsilon}_y$ – эквивалентная деформация текучести, $\boldsymbol{\epsilon}_y^I$ – начальная эквивалентная деформация текучести, β – параметр упрочнения. Это выражение используется для нахождения параметров определяющих соотношений.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Экспериментальные данные, используемые в данной статье, были получены в результате испытаний на свежих костях свиней в работе [8]. Из трех головок свежих бедренных костей были изготовлены 44 кубических образца с размерами $10 \times 10 \times 10 \text{ мм}^3$ и 6 прямоугольных пластин с размерами $35 \times 10 \times 5 \text{ мм}^3$. Направление, в котором вырезались образцы, было выбрано на основе радиографического анализа, а нагрузка прикладывалась вдоль главных направлений трабекул [8].

Данные из эксперимента на ползучесть использованы в работе, чтобы вывести зависимость модуля упругости от времени. Эти данные были получены на 6 прямоугольных образцах. Из графиков на рис. 1 видно, что модуль упругости быстро возрастает по экспоненциальному закону в первые секунды, а после 200 с наступает медленное понижение.

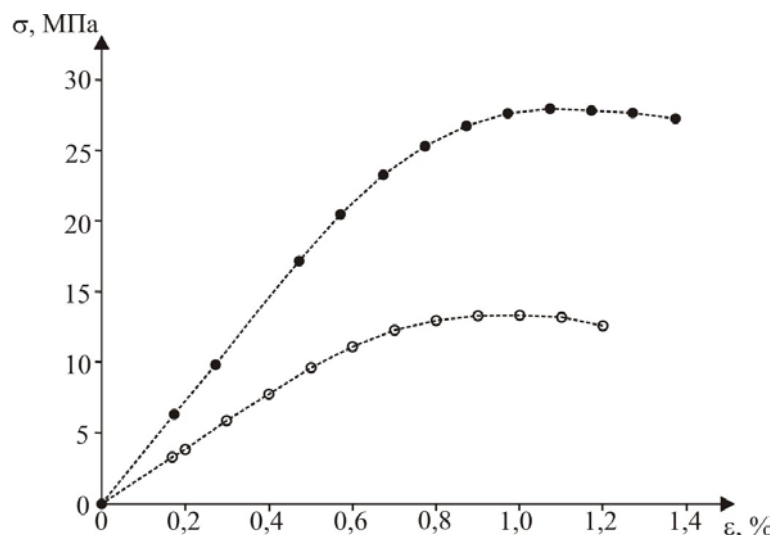


Рис. 2. Зависимости напряжение–деформация, полученные при испытаниях на сжатие с разными скоростями деформации: \circ – $0,00015 \text{ c}^{-1}$, \bullet – $0,15 \text{ c}^{-1}$

Эксперименты на сжатие до разрушения с постоянной скоростью деформации проводились на кубических образцах. Проводилось одноосное сжатие с контролем по перемещениям до разрушения образцов при скоростях деформации от $0,15$ до $0,00015 \text{ c}^{-1}$. Диаграммы растяжения-сжатия, на которых изображен характерный переход от упругой фазы к неупругой, показаны на рис. 2.

Нахождение параметров определяющих соотношений

Нахождение параметров определяющих соотношений представляет собой фундаментальную задачу. Мгновенный модуль упругости E и вязкоупругие константы γ^i и τ^i могут быть найдены по процедуре оптимизации, которая минимизирует отклонение между теоретической и экспериментальной кривой. Процедура, сформулированная по объединенной стохастической/детерминистической схеме [3, 29], должна находить абсолютный минимум нелинейной и мультимодальной функции. Отклонение между теоретической и экспериментальной кривой оценивается согласно скалярной функции, имеющей вид

$$\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [1 - E_j^{mod}(\varphi) / E_j^{exp}(\varphi)]^2}, \quad (8)$$

где φ – это набор параметров, входящих в определяющее соотношение γ^i, τ^i, E_0 , а n – число экспериментальных точек. E^{exp} соответствует экспериментальному значению, E^{mod} – аналитическому выражению. Функция Φ описывается набором параметров φ , поскольку модуль упругости также зависит от параметров γ^i, τ^i, E_0 . Оптимизация заключается в нахождении набора параметров φ_{opt} , при котором Φ достигает минимального значения. Если выбранное определяющее уравнение является строго нелинейным, то функция Φ обычно является мультимодальной с глобальным минимумом и множеством локальных минимумов. Решение задачи оптимизации с помощью детерминистических методов может привести к нахождению только одного минимума без нахождения оптимального решения. Следовательно, объединенная стохастическая/детерминистическая процедура должна применяться для нахождения абсолютного минимума функции Φ среди всех локальных.

На первом шаге анализа осуществляется формулировка условий устойчивости в зависимости от различного числа вязких элементов модели, чтобы определить минимальное число параметров, входящих в определяющие соотношения, которое позволяет адекватно численно описать вязкоупругое поведение трабекулярной костной ткани. Затем решается задача изменения механических свойств образцов в зависимости от их расположения с целью определить параметры, соответствующие каждому анализируемому образцу. Эта процедура позволяет определить необходимое минимальное количество параметров, которые удовлетворительно описывают вязкоупругопластический отклик трабекулярной ткани.

Проблема единственности набора параметров имеет большое значение и, следовательно, должна быть рассмотрена. Нелинейность определяющих соотношений усложняет эту задачу, и перед биомеханическим анализом необходимо провести функциональный, но это вне рамок данной биомеханической работы. Чтобы определить, что оптимальное количество параметров не влияет на сходимость, на последнем шаге всегда рассматривается множество наборов начальных значений параметров определяющего соотношения и проверяется, что полученное оптимальное решение не зависит от начального решения. Это неочевидно демонстрирует единственность параметров, однако помогает в оценке эффективности процедуры для нахождения эффективного оптимального решения.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 3 показана зависимость модуля упругости от времени при испытаниях на ползучесть, проведенных на образцах из набора 1. Экспериментальные данные затем сравниваются с результатами, полученными по аналитическим зависимостям с использованием вязкоупругой модели с количеством вязких элементов от двух до четырех. Относительные величины мгновенного модуля упругости, относительных жесткостей и времени релаксации приведены в табл. 1 вместе с аналогичными значениями относительной ошибки. Сравнение между численными результатами, полученными с помощью моделей с четырьмя и пятью вязкими элементами, показаны на рис. 4.

На рис. 5 показаны экспериментальные значения модуля упругости в зависимости от времени в экспериментах на ползучесть, проведенных на шести образцах, взятых из разных частей кости, а также аналитические кривые по модели с четырьмя вязкими элементами. Оценка определяющих параметров проходит в два этапа. На первом этапе в результате процедуры оптимизации для образца 1 определяется полный набор параметров (относительная жесткость и константы релаксации). Затем, фиксируя константы времени релаксации, полученные на первом этапе, процедура оптимизации повторяется, варьируя лишь параметры относительной жесткости, для наилучшего наложения аналитических кривых на экспериментальные. В табл. 2 показаны параметры, найденные в результате второго этапа.

Таблица 1

Зависимость значений параметров от количества вязких элементов в модели

Кол-во вязких элементов	E , МПа	γ^1	τ^1 , с ⁻¹	γ^2	τ^2 , с ⁻¹	γ^3	τ^3 , с ⁻¹	γ^4	τ^4 , с ⁻¹	Погрешность
1	631	0,342	10,00							0,573
2	645	0,096	0,565	0,335	100,0					0,158
3	630	0,071	0,014	0,096	0,558	0,332	132,6			0,088
4	658	0,057	0,067	0,075	2,044	0,101	80,97	0,219	180,45	0,045

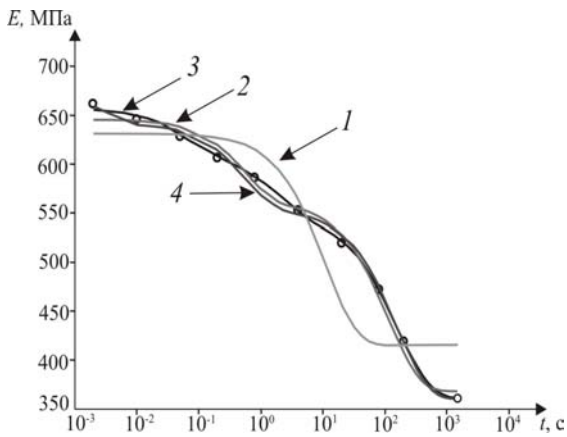


Рис. 3. Зависимость модуля упругости от времени: \circ – экспериментальная зависимость, полученная в испытаниях на ползучесть; 1–4 – результаты, полученные по модели

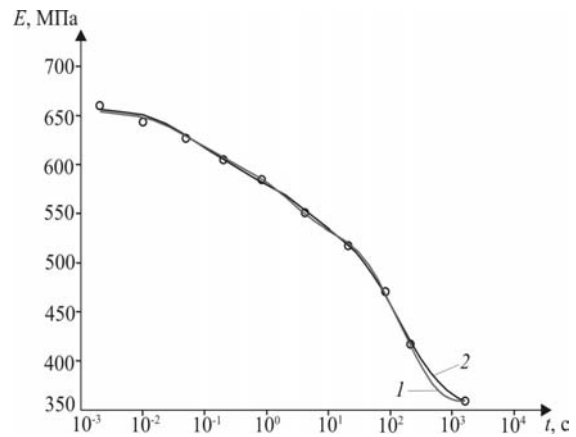


Рис. 4. Зависимости модуля упругости от времени: \circ – экспериментальные данные из испытаний на ползучесть; 1 – результаты, полученные по модели с 4 вязкими элементами; 2 – результаты, полученные по модели с 5 вязкими элементами

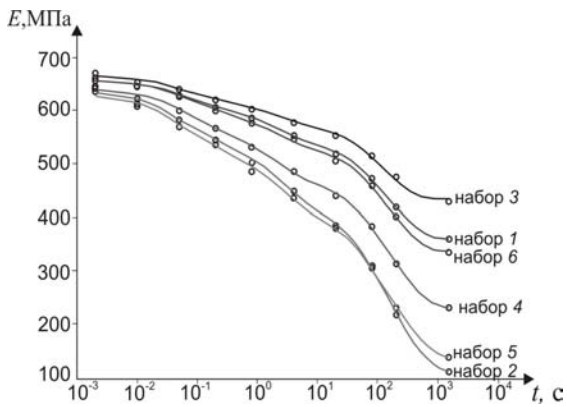


Рис. 5. Зависимость модуля упругости от времени. Сравнение экспериментальных результатов для различных наборов образцов

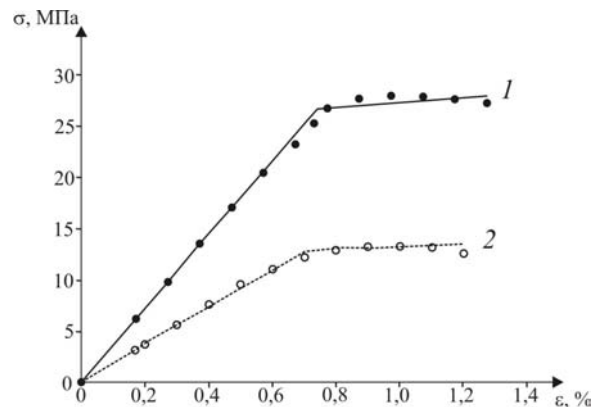


Рис. 6. Вязкоупругопластический отклик костной ткани в испытаниях на сжатие при разных скоростях деформации: \circ – $0,00015 \text{ c}^{-1}$; \bullet – $0,15 \text{ c}^{-1}$; кривые 1–2 – результаты, полученные по модели

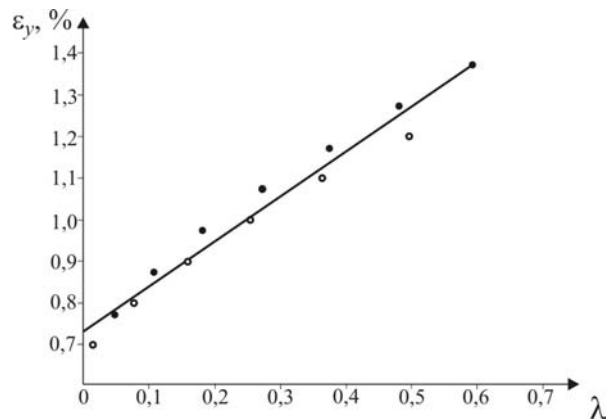


Рис. 7. Зависимость ϵ_y от λ : \circ , \bullet – экспериментальные данные; линия – результаты, полученные по модели

Таблица 2

Зависимость значений параметров наборов образцов при четырех вязких элементах в модели

Номер набора образцов	E , МПа	γ^1	γ^2	γ^3	γ^4	Погрешность
1	658	0,055	0,077	0,105	0,216	0,045
2	637	0,035	0,283	0,289	0,229	0,039
3	666	0,064	0,050	0,199	0,038	0,065
4	641	0,199	0,029	0,119	0,294	0,071
5	631	0,050	0,259	0,138	0,344	0,096
6	657	0,197	0,012	0,062	0,218	0,048

Вязкоупругопластический отклик, описываемый моделью с четырьмя вязкими элементами, показан вместе с кривыми на сжатие со скоростями деформации $0,15 \text{ с}^{-1}$ и $0,00015 \text{ с}^{-1}$ на рис. 6. Параметры пластичности получены для наилучшего согласования с экспериментальными данными $\varepsilon_y^I = 0,73\%$ и $\beta = 1,082$. На рис. 7 изображен график упрочнения относительно роста пластической деформации, где проводилось сравнение между экспериментальными данными и модельными результатами, полученными для двух случаев.

ОБСУЖДЕНИЕ

Предварительный анализ числа вязких элементов необходим для определения минимального числа для адекватного численного описания механического поведения трабекулярной костной ткани. Этот аспект также относится к связанным с идентификацией определяющих параметров вычислительным затратам, которые возрастают с увеличением числа параметров. Анализ, проведенный на образцах из набора 1, показывает, что четырех вязких элементов достаточно для адекватного моделирования вязко-упругого отклика ткани. При увеличении числа вязких элементов константы времени релаксации могут меняться в диапазоне от 10^{-1} – 10^1 для моделей с одним вязким элементом и от 10^{-2} – 10^2 для моделей с четырьмя вязкими параметрами, обеспечивая, таким образом, более качественное описание вязких эффектов за всё время эксперимента. Сравнение между численными результатами, полученными для четырех и пяти вязких элементов, показывает, что увеличение числа элементов от четырех до пяти не дает значительной разницы. В действительности погрешность в случае пяти вязких элементов – 0,039; погрешность в случае четырех вязких элементов – 0,045. В вязкоупругой модели значения констант времени релаксации и соответственных значений относительной жесткости показывают, как вязкие эффекты протекают за рассматриваемый интервал времени. Первое значение времени релаксации порядка нескольких сотых секунд. Это дает интервал времени для соответствующего изменения модуля ползучести относительно соответственной относительной жесткости, которая составляет 0,057. Другими словами, это время релаксации зависит от вязких процессов, которые развиваются более быстро. Значения относительной жесткости и времени релаксации других вязких элементов могут оцениваться по тем же критериям, в частности другие константы времени релаксации более высокого порядка, что позволяет описывать вязкие процессы, которые протекают более медленно.

Анализ механического отклика образцов, взятых из разных областей костного фрагмента, с помощью модели с четырьмя вязкими элементами показывает, что различные кривые зависимости модуля упругости от времени в испытаниях на ползучесть практически совпадают, если рассматривать время релаксации одинаковым для всех образцов, а также уточняя значения относительной жесткости для каждой группы образцов, как показано в табл. 2. Этот аспект является важным, так как может

помочь в нахождении минимального числа определяющих параметров для корректной интерпретации экспериментальных данных моделью, предложенной в работе. Отмечено, что значения параметров относительной жесткости изменяются в различных наборах образцов.

В действительности относительная жесткость каждого вязкого элемента связана с константой релаксации, которая меняется в пределах от 10^{-2} до 10^{-1} , для хорошего совпадения диаграмм ползучести образцов. Например, при оценке изменения относительной жесткости первого вязкого элемента становится ясно, что развитие вязких процессов в первой фазе испытаний на ползучесть различно для образцов из разных наборов. Образцы из четвертой и шестой групп демонстрируют уменьшение модуля ползучести на 30% во временном интервале порядка 1 секунды, в то время как уменьшение модуля ползучести образцов из других групп в том же интервале составляет 10%. Различия наблюдаются и на других временных участках, наблюдаемых в ходе эксперимента.

Трабекулярная костная ткань демонстрирует вязкоупругопластическое поведение в испытаниях при двух различных скоростях деформации, показанных на рис. 6, 7, что подтверждает предложенная модель. В частности, экспериментальные данные подтверждают гипотезу линейного закона упрочнения.

Исследование механического отклика трабекулярной костной ткани в данной работе проведено при испытаниях на сжатие, однако для того чтобы добиться более правдоподобной модели, описывающей отклик при растяжении и изгибе, необходимо провести исследования на растяжение. Можно отметить, что даже если предложенная модель способна описать анизотропию кости, результаты проведенных экспериментов позволяют описать только одноосный характер поведения трабекулярной костной ткани. Многоосные испытания нужны, чтобы убедиться в способности определяющей модели кости описать механический отклик в этих условиях, в особенности того, как сложное напряженное состояние повлияет на развитие пластичности в ткани.

Продолжение работы во многом зависит от возможности проведения таких экспериментов, поскольку модель и процедура определения её параметров были предложены в данной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе (при ограничениях, указанных в разделе «Обсуждение») предложены определяющие соотношения, которые могут быть записаны в конечно-элементной форме для надежного численного моделирования и анализа механического поведения трабекулярной костной ткани. Особенно этот анализ необходим для описания сложного механического взаимодействия кости и биомедицинских устройств (например, эндостальных протезов). Проведенный анализ на основе экспериментов позволил сократить минимальное число определяющих параметров для описания вязкоупругопластического поведения образцов, взятых из разных частей кости. В частности, параметры времени релаксации считались одинаковыми для всех рассмотренных образцов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Аналитические выражения для идентификации параметров вязкой модели

Вязкоупругие характеристики трабекулярной ткани оцениваются при значениях деформаций ниже предела текучести. Принимая начальные условия $\mathbf{q} = 0$ при $t = 0$, аналитическое решение дифференциального уравнения (3) может быть получено в виде

$$\mathbf{q} = \sigma \mathbf{h} - \sigma \mathbf{h} \exp(-\mathbf{A}t), \quad (1A)$$

где γ^i / γ^∞ – компоненты вектора \mathbf{h} , компоненты матрицы \mathbf{A} имеют вид $(\gamma^i - \delta^{ij}) / \tau^i$, где δ^{ij} – дельта-Кронекера. Так как постоянные деформации не рассматриваются, при анализе упругого модуля ползучести условие $\sigma^0(t) = E\varepsilon(t)$ удовлетворяется и предыдущее уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$\sigma = E\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^n \left(\sigma h^i - \sigma \sum_{j=1}^n h^j B^{ji} \right) = \text{const}, \quad (2A)$$

где $B^{ji} = B^{ji}(t)$ – компоненты экспоненциальной матрицы $\exp(\mathbf{A}t)$. Определяя упругий модуль ползучести как $E^c(t) = \sigma / \varepsilon(t)$, можно получить следующее:

$$E^c(t) = E \left[1 + \sum_{i=1}^n \left(h^i - \sum_{j=1}^n h^j B^{ji}(t) \right) \right]^{-1}. \quad (3A)$$

Последнее уравнение применяется при определении функции Φ для того, чтобы подобрать значения модуля упругости, полученные с помощью численной модели, для экспериментальных данных. При испытаниях с постоянной скоростью деформации трабекулярная костная ткань также ведет себя упруго, и мгновенное напряжение может быть выражено следующим образом:

$$\sigma^0(\varepsilon, t) = E\varepsilon(t) = Ekt, \quad (4A)$$

где E – мгновенный модуль упругости, k – постоянная скорость деформации, t – время.

Уравнения (9), (10) и (11) для единственной ненулевой компоненты тензора напряжений приводят к следующему скалярному уравнению:

$$\sigma(t) = \gamma^\infty Ekt + \sum_{i=1}^n \gamma^i Ekt^i [1 - \exp(-t/\tau^i)]. \quad (5A)$$

Объединяя уравнения (4A) и (5A), получим следующее:

$$\sigma(\varepsilon, k) = \gamma^\infty E\varepsilon + \sum_{i=1}^n \gamma^i Ekt^i [1 - \exp(-\varepsilon/k\tau^i)]. \quad (6A)$$

Среднее значение модуля упругости для скорости деформаций k при максимальной деформации, равной пределу текучести ε_y ,

$$\sigma^k(k) = \gamma^\infty E + \frac{1}{\varepsilon_y} \sum_{i=1}^n \gamma^i Ekt^i [1 - \exp(-\varepsilon_y/k\tau^i)]. \quad (7A)$$

Упругопластическое определяющее соотношение

Уравнения (6)–(8) должны быть замкнуты критерием текучести, который определяется, полагая, что могут появляться неупругие деформации, если условие текучести

$$\varphi(\varepsilon, \lambda) = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_y(\lambda) = 0 \quad (8A)$$

выполняется, где $\bar{\varepsilon}$ – эквивалентная скалярная мера деформации, которая равна следующему выражению:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\text{tr}^2(\varepsilon) - \frac{3}{2} [\text{tr}^2(\varepsilon) - \text{tr}(\varepsilon^2)]}, \quad (9A)$$

где tr – сумма диагональных компонент рассматриваемого тензора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bradbenner, T.L.* The effect of damage on the viscoelastic behaviour of human vertebral trabecular bone / T.L. Bradbenner, D.T. Davy // *Journal of Biomechanical Engineering*. – 2006. – Vol. 128. – P. 473–480.
2. *Cheal, E.J.* Role of loads and prosthesis after total hip arthroplasty / E.J. Cheal, M. Spector, W.C. Hayes // *J. Orthop. Res.* – 1992. – Vol. 10. – P. 405–422.
3. *Corana, A.* Minimizing multimodal functions of continuous variables with the simulated annealing algorithm / A. Corana, M. Marchesi, C. Martini, S. Ridella // *ACMT. Math. Software*. – 1987. – Vol. 13. – P. 262–280.
4. *Cotton, J.R.* Analysis of creep strain during tensile fatigue of cortical bone / J.R. Cotton, P. Zioupos, K. Winwood, M. Taylor // *Journal of Biomechanics*. – 2003. – Vol. 36. – P. 943–949.
5. *Cowin, S.C.* On the relationship between the orthotropic Young's moduli and fabric / S.C. Cowin, C.H. Turner // *Journal of Biomechanics*. – 1992. – Vol. 25. – P. 1493–1494.
6. *Cowin, S.C.* *Bone Mechanics. Handbook* / S.C. Cowin. – CRC Press, 2001.
7. *Fritsch, A.* Universal microstructural patterns in cortical and trabecular, extracellular and extravascular bone materials: micromechanics-based prediction of anisotropic elasticity / A. Fritsch, C. Hellmich // *J. Theor. Biol.* – 2007. – Vol. 244, No.4. – P. 597–620.
8. *Guedes, R.M.* Viscolastic behaviour and failure of bovine cancellous bone under constant strain rate / R.M. Guedes, J.A. Simoes, J.L. Morais // *Journal of Biomechanics*. – 2006. – Vol. 39. – P. 49–60.
9. *Gupta, A.* Constitutive modelling and algorithmic implementation of a plasticity-like model for trabecular bone structure / A. Gupta, H.H. Bayraktar, J.C. Fox, T.M. Keaveny, P. Paradopoulos // *Comput. Mech.* – 2007. – Vol. 40. – P. 61–72.
10. *Karnovsky, M.J.* The ultrastructural basis of capillary permeability studied with peroxidase as a tracer / M.J. Karnovsky // *J. Cell. Biol.* – 1967. – Vol. 35. – P. 213–236.
11. *Keaveny, T.M.* Effects of porous coating and collar support on early load transfer for a cementless hip prosthesis / T.M. Keaveny, D.L. Bartel // *Journal of Biomechanics*. – 1993. – Vol. 26. – P. 1205–1216.
12. *Keaveny, T.M.* A 20-year prospective on the mechanical properties of trabecular bone / T.M. Keaveny [et al.] // *Trans. of the ASME*. – 1993. – Vol. 115(11). – P. 534–542.
13. *Keaveny, T.M.* Fundamental load transfer patterns for press, surface-treated intramedullary fixation systems / T.M. Keaveny, D.L. Bartel // *Journal of Biomechanics*. – 1994. – Vol. 27. – P. 1147–1157.
14. *Keaveny, T.M.* Mechanical behaviour of damaged trabecular bone / T.M. Keaveny, E.F. Wachel, X.E. Guo, W.C. Hayes // *Journal of Biomechanics*. – 1994. – Vol. 27. – P. 1309–1318.
15. *Keaveny, T.M.* Mechanical behaviour of human trabecular bone after overloading / T.M. Keaveny, E.F. Wachel, D.L. Kopperdahl // *J. Orthop. Res.* – 1999. – Vol. 17. – P. 346–353.
16. *Keaveny, T.M.* Biomechanics of trabecular bone / T.M. Keaveny, E.F. Morgan, G.L. Niebur, O.C. Yeh // *Ann. Rev. Biomed. Eng.* – 2001. – Vol. 3. – P. 307–333.
17. *Lotz, J.C.* Fracture prediction for the proximal femur using finite element models: Part I – Linear analysis / J.C. Lotz, E.J. Cheal, W.C. Heyes // *ASME Journal of Biomechanics Eng.* – 1991a. – Vol. 113. – P. 353–360.
18. *Lotz, J.C.* Fracture prediction for the proximal femur using finite element models: Part I – Nonlinear analysis / J.C. Lotz, E.J. Cheal, W.C. Heyes // *ASME Journal of Biomechanics Eng.* – 1991. – Vol. 113. – P. 361–365.
19. *McDonnell, C.* Vertebral osteoporosis and trabecular bone quality / C. McDonnell et al. // *Annals of Biomedical Engineering*. – 2007. – Vol. 35, No. 2. – P. 170–189.
20. *Morgan, E.F.* Dependence of yield strain of human trabecular bone on anatomical site / E.F. Morgan, T.M. Keaveny // *Journal of Biomechanics*. – 2001. – Vol. 37. – P. 1671–1678.
21. *Natali, A.N.* Constitutive modelling of inelastic behaviour of cortical bone / A.N. Natali, P.G. Pavan, E.L. Carniel // *Med. Eng. Phys.* – 2008. – Vol. 30(7). – P. 905–912.
22. *Norris, R.J.* Medical cost of osteoporosis / R.J. Norris et al. // *Bone*. – 1992. – Vol. 13. – P. 11–16.
23. *Phillips, S.* The direct medical costs of osteoporosis for American women aged 45 and older / S. Phillips, N. Fox, J. Jacobs, W. Wright // *Bone*. – 1988. – Vol. 9. – P. 271–279.
24. *Rho, J.* Elastic properties of human cortical and trabecular lamellar bone measured by nanoindentation / J. Rho, T.Y. Tsui, G.M. Pharr // *J. Orthop. Res.* – 1997. – Vol. 20. – P. 806–810.
25. *Schwartz-Dabney, C.L.* Edentulation alters material properties of cortical bone in the human mandible / C.L. Schwartz-Dabney, P.C. Dechow // *J. Dent. Res.* – 2002. – Vol. 81(9). – P. 613–617.
26. *Siffert, R.S.* Dynamic relationship of trabecular bone density, architecture, and strength in computational model of osteopenia / R.S. Siffert, G.M. Luo, S.C. Cowin, J.J. Kaufman // *Bone*. – 1996. – Vol. 18(2). – P. 197–206.
27. *Simo, J.C.* *Computational Inelasticity* / J.C. Simo, T.J.R. Hughes. – New York: Springer, 1998.
28. *Skinner, H.B.* Femoral prosthesis implantation induces changes in bone stress that depend on the extent of porous coating / H.B. Skinner, A.S. Kim, J.H. Keyak, C.D. Mote // *J. Orthop. Res.* – 1994. – Vol. 12. – P. 553–563.

29. *Sylos-Labini, M.* A stochastic-deterministic optimization method for eliminating the environmental impact produced by a grounding system / M. Sylos-Labini, A. Covitti, G. Delvecchio, N. Medoro // Proceedings of ICREPQ-2003, Vigo, Spain.
30. *Turner, C.H.* The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone / C.H. Turner, S.C. Cowin, J.Y. Rho, R.B. Ashman, J.C. Rice // Journal of Biomechanics. – 1990. – Vol. 23. – P. 549–561.
31. *Verhulp, E.* Micro-finite element simulation of trabecular bone post-yield behaviour: effects of material model, element size, and type / E. Verhulp, B. Van Rietbergen, R. Muller, R. Huiskes // Comput. Methods Biomech. Biomed. Engineering. – 2008. – Vol. 119(4). – P. 389–395.
32. *Yamashita, J.* The use of dynamic mechanical analysis to assess the viscoelastic properties of human cortical bone / J. Yamashita, B.R. Furman, H.R. Rawls, X.D. Wang, C.M. Agrawal // J. Biomed. Mater. Res. – 2001. – Vol. 15. – P. 781–787.
33. *Yamashita, J.* Collagen and bone viscoelasticity: a dynamic mechanical analysis / J. Yamashita, X.O. Li, B.R. Furman, H.R. Rawls, X.D. Wang, C.M. Agrawal // J. Biomed. Mater. Res. – 2002. – Vol. 63(1). – P. 31–36.
34. *Zysset, P.K.* A 3D damage model for trabecular bone based in fabric tensors / P.K. Zysset, A. Curnier // Journal of Biomechanics. – 1996. – Vol. 29. – P. 1549–1558.

INVESTIGATION OF TRABECULAR BONE TISSUE MECHANICS WITH REGARD TO VISCO-ELASTO-PLASTIC RESPONSE

A.N. Natali, E.L. Carniel, C. Venturato, P.G. Pavan (Padova, Italy)

A visco-elasto-plastic constitutive model is provided for the investigation of the mechanical inelastic behaviour of the trabecular bone. The visco-elastic response of the tissue is defined adopting a linear visco-elastic model. An elasto-plastic model with hardening rule is applied to interpret the response of the tissue over the elastic limit. To define the parameters of proposed constitutive model, minimization of the discrepancy between results from model results and experimental data is performed. Experimental data of animal specimens are considered. Evaluation of viscous parameters is performed using data from compressive creep tests and compressive plasticity tests at constant strain rate. To determine the plastic parameters, monotonic compressive tests spanning a strain range over the yield strain limit are considered. Diagrams show the comparison between model results and experimental data that is an evaluation of performed analysis reliability.

Key words: trabecular bone, mechanical behaviour, constitutive modelling, visco-elasto-plasticity, computational biomechanics.

Получено 3 июля 2009