

УДК 531/534:[57+61]

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СКЛЕРЫ И РОГОВИЦЫ КАК ОРТОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А.М. Ермаков

Кафедра теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, Россия, 198504, Санкт-Петербург, Университетский проспект, 28, e-mail: khopesh_ga@mail.ru

Аннотация. Решается задача о напряженно-деформированном состоянии сопряженных ортотропных сферических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления. Такая задача может моделировать поведение корнеосклеральной оболочки глаза при увеличении внутриглазного давления. Моделирование производится с использованием теории оболочек, учитывающей влияние поперечного сдвига, деформирования в направлении нормали к срединной поверхности и поперечных нормальных напряжений. Задача решается в перемещениях. В результате преобразования основных соотношений получена система дифференциальных уравнений шестнадцатого порядка с шестнадцатью граничными условиями. При решении с использованием метода конечных разностей получена общая картина деформации оболочек при различных соотношениях модулей упругости.

Ключевые слова: склера, сопряженные анизотропные сферические оболочки, миопия, гиперметропия.

ВВЕДЕНИЕ

Внешняя оболочка глаза – корнеосклеральная (фиброзная) оболочка состоит из роговицы и склеры (рис. 1). Склеральная оболочка глаза составляет около 4/5 всей фиброзной оболочки глаза человека и является пространственно армированной конструкцией, где по ходу коллагеновых волокон можно выделить четыре слоя. На рис. 2 представлена архитектура волокон склеры в ее глубоком и внутреннем слоях. Коллагеновые волокна различаются по диаметру, поперечной исчерченности и состоянию в зависимости от места их локализации в склере, возраста человека и наличия патологических процессов. Структурой склеральной ткани объясняется ее анизотропия и неоднородность.

В данной работе определяется напряженно-деформированное состояние, сопряженных сферических оболочек, склеры и роговицы, находящихся под действием внутреннего давления. Ранее подобная задача рассматривалась в работах [2, 4]. В работе [2] рассматривались однородные изотропные оболочки, кроме того полагалось, что роговица является более жесткой оболочкой и ее модуль упругости больше модуля упругости склеры. В настоящее время известно [3], что роговица существенно мягче склеры. В статье [4] рассматривались изотропные и методом конечных элементов в пакете *ANSYS* трансверсально-изотропные оболочки. В данной работе материал роговицы и склеры предполагается ортотропным и исследуется влияние соотношений модулей упругости на форму деформации. Воспользовавшись симметрией объекта

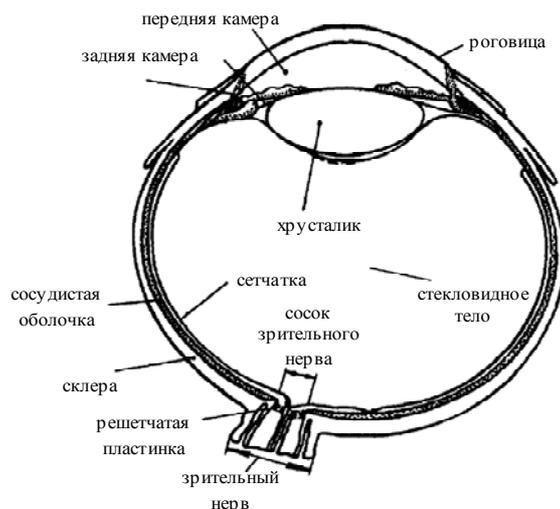


Рис. 1. Строение глаза

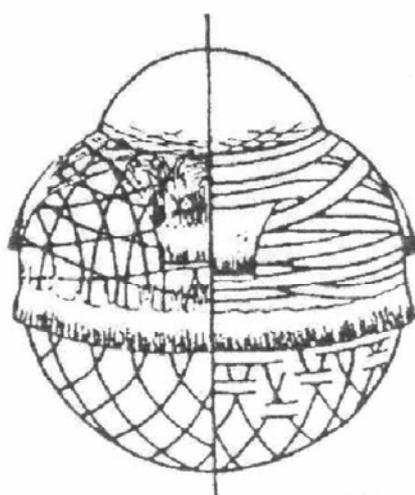


Рис. 2. Коллагеновые волокна

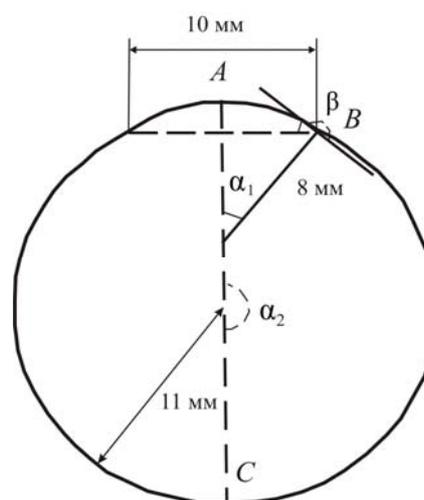


Рис. 3. Геометрическая модель

(рис. 3), полагаем, что все величины зависят только от одной координаты – α , характеризующей линию параллели. Пусть α_1, α_2 – углы первой и второй сфер, соответственно, $\alpha_1 \in [0; 38,4^\circ]$, $\alpha_2 \in [-90^\circ; 64,54^\circ]$ (см. рис. 3), $\alpha_1^0 = 38,4^\circ$, $\alpha_2^0 = 64,54^\circ$ – значения углов, определяющие края оболочек в точке сопряжения. Угол между касательными к оболочкам на линии сопряжения $\beta = 168,4^\circ$; толщины и радиусы сопряженных сферических оболочек $h^{(1)} = h^{(2)} = 0,5$ мм, $R^{(1)} = 8$ мм, $R^{(2)} = 11$ мм.

Для определения коэффициентов будем использовать обозначение $A_j^{(i)}$. Нижний индекс j указывает, какой криволинейной координате соответствует рассматриваемая величина A , а верхний i – к какой оболочке она принадлежит. Так, при $i=1$ она относится к роговице, $i=2$ – к склере. $E_1^{(i)}, E_2^{(i)}, E_3^{(i)}$ – модули упругости в тангенциальных и нормальном координатных направлениях для роговицы и склеры, $\nu_{ij}^{(1)}, \nu_{ij}^{(2)}$ – коэффициенты Пуассона первой и второй сфер.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для определения напряженно-деформированного состояния фиброзной оболочки глаза используется теория оболочек Родионовой–Титаева–Черныха [5]: линейная теория неоднородных анизотропных оболочек постоянной толщины с учетом малой податливости сдвигам в плоскости и деформированию в направлении нормали к срединной поверхности, а также поперечных нормальных напряжений и нелинейного распределения компонент вектора перемещения по толщине оболочки. Функции, описывающие деформацию слоя оболочки $u_1(\alpha, z)$, $u_3(\alpha, z)$ по этой теории, предлагается искать в виде рядов по полиномам Лежандра P_0, P_1, P_2, P_3 от координаты $z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} u_1(\alpha, z) &= u^*(\alpha) \cdot P_0(z) + \gamma_1^*(\alpha) \cdot P_1(z) + \theta_1^*(\alpha) \cdot P_2(z) + \varphi_1^*(\alpha) \cdot P_3(z), \\ u_3(\alpha, z) &= w^*(\alpha) \cdot P_0(z) + \gamma_3^*(\alpha) \cdot P_1(z) + \theta_3^*(\alpha) \cdot P_2(z), \end{aligned} \quad (1)$$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = \frac{2z}{h}, \quad P_2(z) = \frac{6z^2}{h^2} - \frac{1}{2}, \quad P_3(z) = \frac{20z^3}{h^3} - \frac{3z}{h}, \quad (2)$$

где u^* , w^* – компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки, а γ_3^* и θ_3^* характеризуют изменение длины нормали к этой поверхности, γ_1^* – угол поворота нормали в плоскости (α, z) . Величины θ_1^* и φ_1^* описывают нормальную кривизну в плоскости (α, z) волокна, которые до деформации были перпендикулярными к срединной поверхности оболочки.

В силу симметрии сечения вдоль оси AC рассмотрим лишь две соединенные дуги AB и BC с введенными на их концах A и C условиями симметрии. В точке их слияния B должны выполняться соответствующие условия сопряжения. Таким образом, для каждой из дуг AB , BC можно рассматривать отдельно две одномерные задачи теории оболочек.

Приведем основные величины к безразмерному виду следующим способом:

$$\{\tilde{u}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\gamma}_1^{(i)}, \tilde{\gamma}_3^{(i)}, \tilde{\theta}_3^{(i)}, \tilde{\theta}_1^{(i)}, \tilde{\varphi}_1^{(i)}\} = \frac{1}{h^{(i)}} \{u^{(i)}, w^{(i)}, \gamma_1^{(i)}, \gamma_3^{(i)}, \theta_3^{(i)}, \theta_1^{(i)}, \varphi_1^{(i)}\},$$

$$\tilde{E}_{2,3}^{(i)} = \frac{E_{2,3}^{(i)}}{E_1^{(i)}}, \quad \tilde{G}_{13}^{(i)} = \frac{G_{13}^{(i)}}{E_1^{(i)}}, \quad \tilde{h}^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{R_1^{(i)}}, \quad \tilde{P}^{(i)} = \frac{P^{(i)}}{E_1^{(i)}},$$

$$\{\tilde{T}_{0,1,2}^{(i)}, \tilde{Q}_1^{(i)}, \tilde{m}_3^{(i)}\} = \frac{\{T_{0,1,2}^{(i)}, Q_1^{(i)}, m_3^{(i)}\}}{R^{(i)} E_1^{(i)}}, \quad \{\tilde{M}_{0,1,2}^{(i)}\} = \frac{\{M_{0,1,2}^{(i)}\}}{E_1^{(i)} R^{(i)} h^{(i)}}, \quad \tilde{q}_3^{(i)} = \frac{q_3^{(i)}}{E_1^{(i)}}.$$

Введем также параметры, характеризующие взаимное отношение определяющих характеристик двух рассматриваемых оболочек

$$\frac{h^{(2)}}{h^{(1)}} = \tilde{h}, \quad \frac{E_1^{(2)}}{E_1^{(1)}} = \tilde{E}, \quad \frac{R^{(2)}}{R^{(1)}} = \tilde{R}.$$

Коэффициенты Ламе и кривизны, определяющие геометрию сферической оболочки, имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(i)} &= \frac{A_1^{(i)}}{h^{(i)}} = \frac{R^{(i)}}{h^{(i)}} = \frac{1}{\tilde{h}^{(i)}}, & \tilde{k}_1^{(i)} &= k_1^{(i)} h^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{R^{(i)}} = \tilde{h}^{(i)}, \\ \tilde{A}_2^{(i)} &= \frac{A_2^{(i)}}{h^{(i)}} = \frac{R^{(i)} \sin(\alpha_i)}{h^{(i)}} = \frac{1}{\tilde{h}^{(i)}} \sin(\alpha_i), & \tilde{k}_2^{(i)} &= k_2^{(i)} h^{(i)} = \frac{h^{(i)}}{R^{(i)}} = \tilde{h}^{(i)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{13}, \eta_1, \eta_2$ оболочки могут быть выражены через компоненты перемещения по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_1^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}} \frac{d\tilde{u}^{(i)}}{d\alpha_i} + \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{w}^{(i)}, & \tilde{\varepsilon}_2^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)} \tilde{A}_2^{(i)}} \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i} \tilde{u}^{(i)} + \tilde{k}_2^{(i)} \tilde{w}^{(i)}, \\ \tilde{\eta}_1^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}} \frac{d\tilde{\gamma}_1^{(i)}}{d\alpha_i} + \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{\gamma}_3^{(i)}, & \tilde{\eta}_2^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)} \tilde{A}_2^{(i)}} \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i} \tilde{\gamma}_1^{(i)} + \tilde{k}_2^{(i)} \tilde{\gamma}_3^{(i)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{13}^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)}} \frac{d\tilde{w}^{(i)}}{d\alpha_i} - \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{u}^{(i)} + 2\tilde{\gamma}_1^{(i)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя приведенные зависимости в соотношения теории упругости, можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} (\varepsilon_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)}) + \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{T}_0^{(i)}, \\ \tilde{T}_2^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)} \tilde{E}_2^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} (\nu_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)}) + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{T}_0^{(i)}, \\ \tilde{M}_1^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{6(1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)})} (\eta_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \eta_2^{(i)}) + \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{M}_0^{(i)}, \\ \tilde{M}_2^{(i)} &= \frac{\tilde{E}_2^{(i)} \tilde{h}^{(i)}}{6(1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)})} (\nu_{21}^{(i)} \eta_1^{(i)} + \eta_2^{(i)}) + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \tilde{M}_0^{(i)}, \\ \tilde{Q}_1^{(i)} &= \frac{5\tilde{h}^{(i)} \tilde{G}_{13}^{(i)}}{6} \varepsilon_{13}^{(i)} - \frac{\tilde{G}_{13}^{(i)} \tilde{h}^{(i)}}{6 \tilde{A}_1^{(i)}} \frac{d\tilde{\theta}_3^{(i)}}{d\alpha_i}, \\ \tilde{T}_0^{(i)} &= \tilde{m}_3^{(i)} - (\tilde{k}_1^{(i)} \tilde{M}_1^{(i)} + \tilde{k}_2^{(i)} \tilde{M}_2^{(i)}), & M_0^{(i)} &= \frac{\tilde{h}^{(i)}}{10} \tilde{q}_3^{(i)} - \frac{1}{60} (\tilde{k}_1^{(i)} \tilde{T}_1^{(i)} + \tilde{k}_2^{(i)} \tilde{T}_2^{(i)}), \\ \tilde{m}_3^{(i)} &= -\frac{\tilde{h}^{(i)}}{2} \tilde{P}^{(i)} \left(1 - \frac{\tilde{k}_1^{(i)}}{2} \right) \left(1 - \frac{\tilde{k}_2^{(i)}}{2} \right), & \tilde{q}_3^{(i)} &= \tilde{P}^{(i)} \left(1 - \frac{\tilde{k}_1^{(i)}}{2} \right) \left(1 - \frac{\tilde{k}_2^{(i)}}{2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения связи усилий и моментов с компонентами перемещения подставляем в уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)} \tilde{A}_2^{(i)}} \left(\frac{d\tilde{A}_2^{(i)} \tilde{T}_1^{(i)}}{d\alpha_i} - \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i} \tilde{T}_2^{(i)} \right) + \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{Q}_1^{(i)} &= 0, \\ \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)} \tilde{A}_2^{(i)}} \frac{d\tilde{A}_2^{(i)} \tilde{Q}_1^{(i)}}{d\alpha_i} - \tilde{k}_1^{(i)} \tilde{T}_1^{(i)} - \tilde{k}_2^{(i)} \tilde{T}_2^{(i)} + \tilde{q}_3^{(i)} \tilde{h}^{(i)} &= 0, \\ \frac{1}{\tilde{A}_1^{(i)} \tilde{A}_2^{(i)}} \left(\frac{d\tilde{A}_2^{(i)} \tilde{M}_1^{(i)}}{d\alpha_i} - \frac{d\tilde{A}_2^{(i)}}{d\alpha_i} \tilde{M}_2^{(i)} \right) - \tilde{Q}_1^{(i)} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

На свободных концах дуг A, C (см. рис. 3) для компонентов смещения должны выполняться десять граничных условий симметрии:

$$\begin{cases} \tilde{u}^{(1)}(0) = 0, & \tilde{u}^{(2)}(-\pi/2) = 0, & \tilde{u}'^{(1)}(0) = 0, & \tilde{u}'^{(2)}(-\pi/2) = 0, \\ \tilde{\gamma}_1^{(1)}(0) = 0, & \tilde{\gamma}_1^{(2)}(-\pi/2) = 0, & \tilde{\gamma}_1'^{(1)}(0) = 0, & \tilde{\gamma}_1'^{(2)}(-\pi/2) = 0, \\ \tilde{w}^{(1)}(0) = 0, & \tilde{w}^{(2)}(-\pi/2) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В точке сопряжения дуг должны выполняться следующие шесть граничных условий [7] непрерывности перемещений, моментов, усилий и угла поворота (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} \tilde{h} \tilde{u}^{(2)} \alpha_2^0 &= \tilde{u}^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \cos \beta - \tilde{w}^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \sin \beta, \\ \tilde{h} \tilde{w}^{(2)} \alpha_2^0 &= \tilde{w}^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \cos \beta + \tilde{u}^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \sin \beta, \\ \tilde{h} \tilde{\gamma}_1^{(2)} \alpha_2^0 &= \tilde{\gamma}_1 \alpha_1^0, \\ \tilde{E} \tilde{h} \tilde{R} M_1^{(2)} \alpha_2^0 &= M_1 \alpha_1^0, \\ \tilde{E} \tilde{R} T_1^{(2)} \alpha_2^0 &= T_1^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \cos \beta - Q_1^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \sin \beta, \\ \tilde{E} \tilde{R} Q_1^{(2)} \alpha_2^0 &= Q_1^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \cos \beta + T_1^{(1)} \alpha_1^0 \cdot \sin \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, получена система из шести дифференциальных уравнений 16-го порядка с шестнадцатью граничными условиями и шестью неизвестными функциями смещения. Эта система решается с помощью программы, написанной в пакете *Matematica* 6.0, реализующей конечно-разностный численный метод.

Оставшиеся восемь компонентов деформации могут быть получены с использованием формул

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_3^{(i)} &= \frac{1}{2} \left(1 - \nu_{13}^{(i)} \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} - \nu_{23}^{(i)} \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \right) \frac{\tilde{T}_0^{(i)}}{\tilde{E}_3^{(i)}} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \varepsilon_1^{(i)} + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \varepsilon_2^{(i)} \right), \\ \tilde{\theta}_3^{(i)} &= \frac{1}{\tilde{h}^{(i)}} \left(1 - \nu_{13}^{(i)} \frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} - \nu_{23}^{(i)} \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \right) \frac{\tilde{M}_0^{(i)}}{\tilde{E}_3^{(i)}} - \\ &- \frac{1}{6} \left(\frac{\nu_{31}^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} \nu_{32}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \eta_1^{(i)} + \frac{\nu_{32}^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \eta_2^{(i)} \right), \\ \tilde{\theta}_1^{(i)} &= -\frac{1}{6 \tilde{A}_1^{(i)}} \frac{\partial \tilde{\gamma}_3^{(i)}}{\partial \alpha_i}, \quad \tilde{\phi}_1^{(i)} = -\frac{1}{10 \tilde{h}^{(i)} \tilde{G}_{13}^{(i)}} \tilde{Q}_1^{(i)} - \frac{1}{10 \tilde{A}_1^{(i)}} \frac{\partial \tilde{\theta}_3^{(i)}}{\partial \alpha_i}. \end{aligned} \quad (9)$$

Путем подстановки найденных компонентов деформации в расчетные формулы (1), (2) для определения деформации слоя оболочки может быть получена полная картина напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек.

ДЕФОРМАЦИЯ ВНЕШНЕЙ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ

Приведем сначала результаты расчетов для трансверсально-изотропной оболочки. Среднее значение модуля упругости склеральной оболочки, принимая экспериментальные результаты работы [1], полагаем $E_s = 14,3$ МПа.

Известно, что склеральная оболочка глаза является более жесткой, чем роговица. Опираясь на результаты [3], примем среднее значение $E_r = 4,76$ МПа.

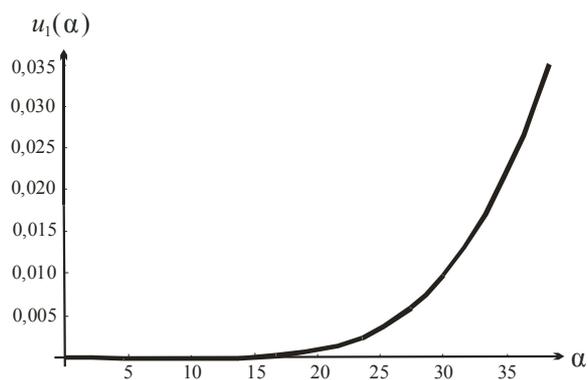


Рис. 4. Смещение роговицы

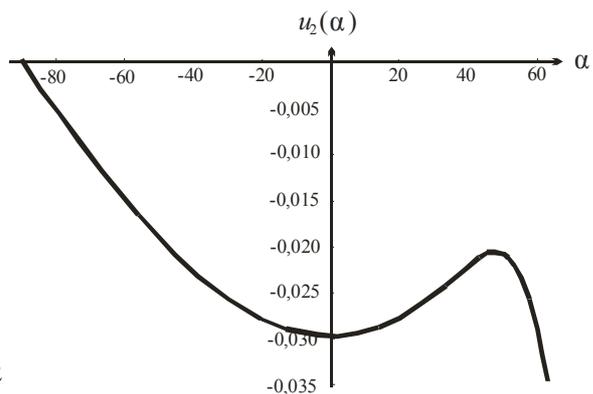


Рис. 5. Смещение склеры

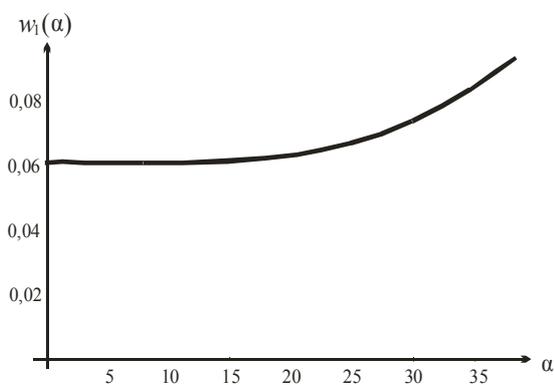


Рис. 6. Прогиб роговицы

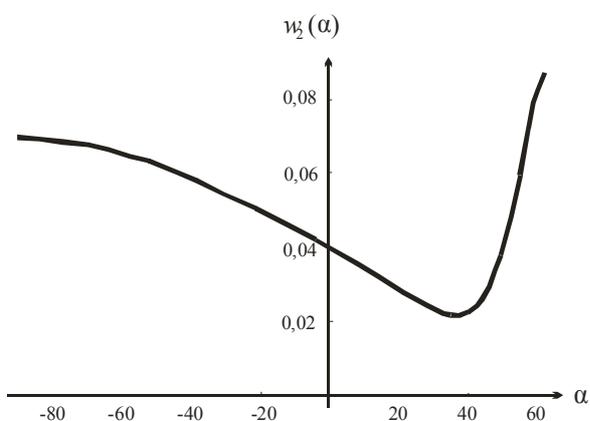


Рис. 7. Прогиб склеры

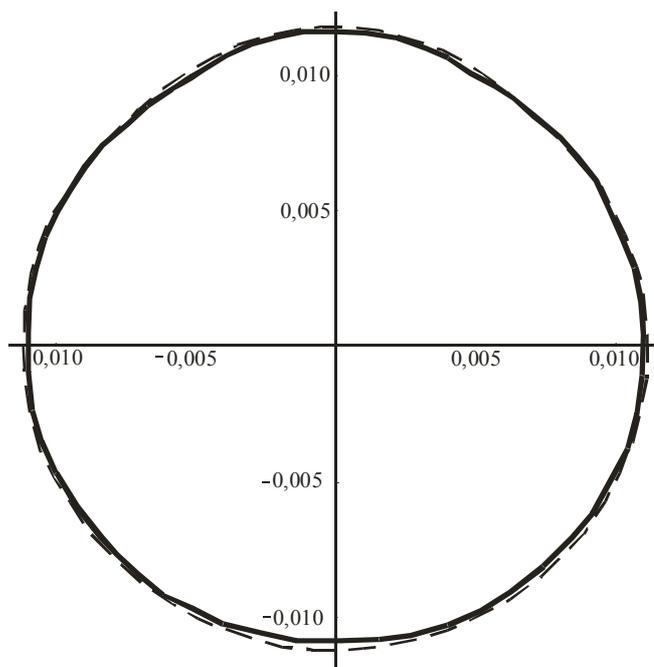


Рис. 8. Общая картина деформации глаза

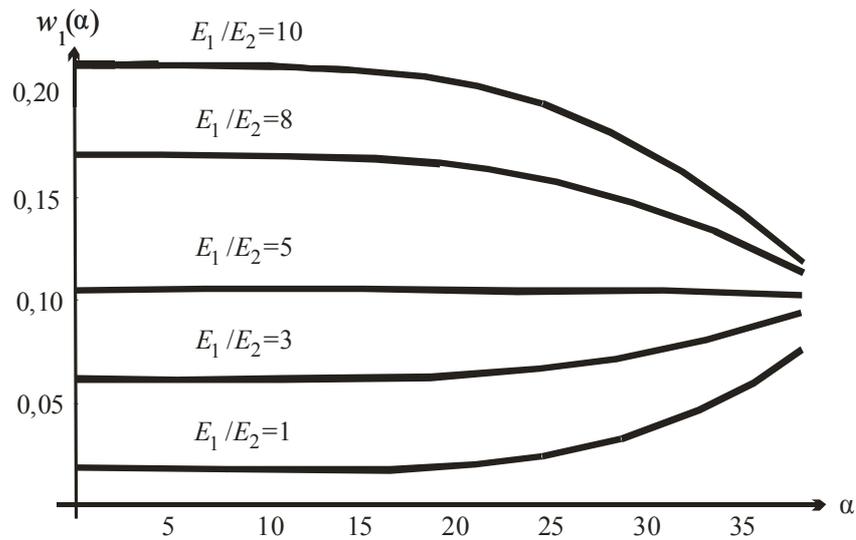


Рис. 9. Зависимость прогиба роговицы от физических свойств оболочек

В большинстве предшествующих исследований глазная оболочка считалась трансверсально-изотропной, причем модуль упругости склеры в направлении ее толщины на два порядка меньше модуля упругости в тангенциальном направлении. Следуя этому, примем $E_{1,2}^{(1)}/E_3^{(1)} = E_{1,2}^{(2)}/E_3^{(2)} = 100$. Модуль сдвига будем считать сравнительно малым $G_{13}^{(1)} = G_{13}^{(2)} = 1$ МПа.

Коэффициенты Пуассона равны соответственно $\nu_{12}^{(i)} = 0,4$; $\nu_{13}^{(i)} = 0,01$; $\nu_{21}^{(i)} = 0,4$; $\nu_{23}^{(i)} = 0,01$; $\nu_{31}^{(i)} = 0,4$; $\nu_{32}^{(i)} = 0,4$.

Расчет функций смещения производится при внутреннем давлении $P = 30$ мм рт. ст., а общей картины деформации (для наглядности) – при большем давлении, $P = 90$ мм рт. ст.

Из графиков (рис. 4–7) и общей картины деформации (рис. 8) можно заключить, что усилия, возникающие в склеральной оболочке вследствие воздействия внутреннего давления, приводят к растяжению роговицы, а также распрямлению угла между касательными к оболочкам. Максимальный прогиб для обеих полусфер происходит в окрестности точки сопряжения. Также заметно постепенное возрастание функции прогиба склеры при движении от точки сопряжения к нижнему полюсу сферической оболочки (рис. 9).

ЗАВИСИМОСТЬ ПРОГИБА РОГОВИЦЫ ОТ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБОЛОЧЕК

Приведем графики прогиба роговицы в зависимости от взаимного отношения модулей упругости склеры E_1 и роговицы E_2 (см. рис. 9). Видно, что в случае, когда это отношение мало, $E_1/E_2 = 1$, оболочка стремится к более гладкой сферической форме и область сопряжения становится более гладкой. В случае когда $E_1/E_2 = 10$, модуль упругости роговицы на порядок больше чем у склеры, роговица начинает сильно прогибаться, угол на линии сопряжения становится более острым.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для нормального зрения человека необходимо, чтобы отраженные от объекта лучи, попадающие в глаз, фокусировались строго на сетчатке [8, 9] (рис. 10).

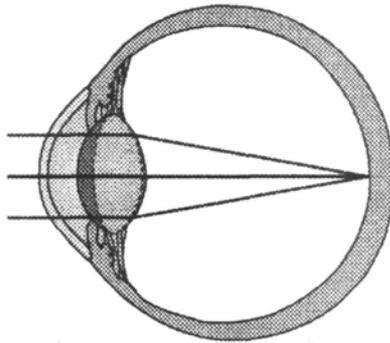


Рис. 10. Нормальный глаз

Фокусное расстояние определяется в основном преломляющей силой роговицы и хрусталика.

Миопия (близорукость) (рис. 11) может быть связана со слишком большой кривизной роговицы или с тем, что глазное яблоко имеет форму вытянутого эллипсоида. Это приводит к тому, что изображение далеко расположенных объектов фокусируется перед сетчаткой.

Гиперметропия (дальнозоркость) (рис. 13) может быть вызвана или тем, что роговица глаза слишком пологая, или тем, что форма глаза близка к форме сплюснутого эллипсоида. Это приводит к тому, что фокусная точка располагается за сетчаткой.

В этой части работы основные исследования посвятим влиянию на форму прогиба взаимного соотношения модулей упругости, действующих в тангенциальных направлениях оболочек E_1/E_2 .

Введем географические координаты – широту и долготу, которые в теории оболочек являются координатными, и, следовательно, при варьировании модулей упругости анизотропной оболочки мы будем рассматривать, насколько легко происходит смещение по широте по сравнению с долготой.

ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК, ПРИВОДЯЩАЯ К МИОПИИ

Рассмотрим случай, когда в сферической системе координат модуль упругости склеральной оболочки в направлении линий широты в пять раз больше модуля упругости в направлении линий долготы. Физические параметры материала в этом случае примут следующие значения:

$$E_1^{(1)} = 1,43 \text{ МПа}; E_1^{(2)} = 2,86 \text{ МПа}; E_3^{(1)}/E_1^{(1)} = 0,01; E_3^{(2)}/E_1^{(2)} = 0,05;$$

$$E_2^{(1)}/E_1^{(1)} = 1; E_2^{(2)}/E_1^{(2)} = 5.$$

$$\nu_{12}^{(1)}=0,4; \nu_{13}^{(1)}=0,01; \nu_{21}^{(1)}=0,4; \nu_{23}^{(1)}=0,01; \nu_{31}^{(1)}=0,4; \nu_{32}^{(1)}=0,4;$$

$$\nu_{12}^{(2)}=0,4; \nu_{13}^{(2)}=0,02; \nu_{21}^{(2)}=0,08; \nu_{23}^{(2)}=0,004; \nu_{31}^{(2)}=0,4; \nu_{32}^{(2)}=0,4.$$

Внутреннее давление берем значительно больше нормального, $P = 90$ мм рт. ст., чтобы новая форма была более заметной на общей картине деформации.

Сравнивая форму деформации в этом случае (рис. 12) с формой деформации в случае трансверсально-изотропной оболочки (см. рис. 8), можно сделать вывод, что влияние анизотропии в значительной степени усилило прогиб в полюсе склеральной оболочки и глаз стал приобретать форму вытянутого эллипсоида. Принятая в модели

мягкая оболочка роговицы под действием внутреннего давления стала более острой. Полученная картина соответствует форме глаза с развившейся миопией.

ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК, ПРИВОДЯЩАЯ К ГИПЕРМЕТРОПИИ

Теперь рассмотрим случай, когда модуль упругости склеральной оболочки в направлении долготы в пять раз больше, чем в направлении широты. Физические параметры материала в этом случае примут следующие значения:

$$E_1^{(1)} = 4,76 \text{ МПа}; E_1^{(2)} = 14,3 \text{ МПа}; E_3^{(1)}/E_1^{(1)} = 0,01; E_3^{(2)}/E_1^{(2)} = 0,01;$$

$$E_2^{(1)}/E_1^{(1)} = 1; E_2^{(2)}/E_1^{(2)} = 0,2;$$

$$\nu_{12}^{(1)}=0,4; \nu_{13}^{(1)}=0,01; \nu_{21}^{(1)}=0,4; \nu_{23}^{(1)}=0,01; \nu_{31}^{(1)}=0,4; \nu_{32}^{(1)}=0,4;$$

$$\nu_{12}^{(2)}=0,08; \nu_{13}^{(2)}=0,02; \nu_{21}^{(2)}=0,4; \nu_{23}^{(2)}=0,4; \nu_{31}^{(2)}=4; \nu_{32}^{(2)}=0,004.$$

Под действием внутреннего давления (рис. 14) склеральная оболочка начала принимать форму сплюснутого эллипсоида, и усилия, возникающие на линии сопряжения, заставляют более мягкую склеральную оболочку стать более полой. Полученная картина соответствует форме глаза с развившейся гиперметропией.

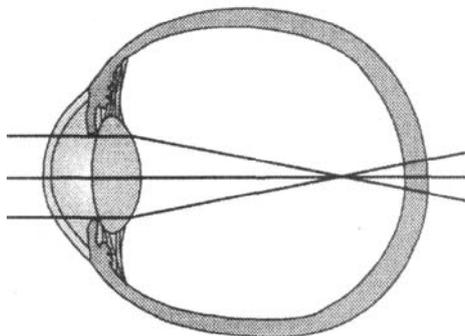


Рис. 11. Миопия глаза

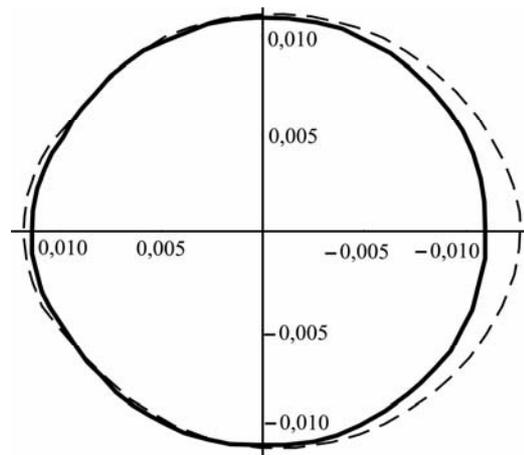


Рис. 12. Картина деформации для случая 1

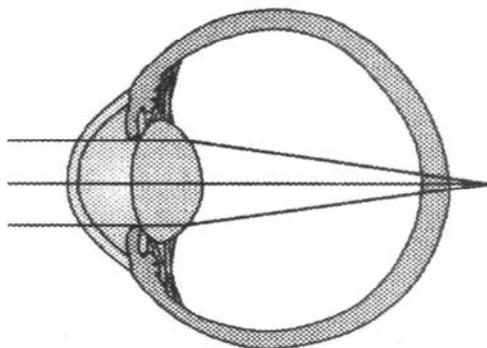


Рис. 13. Гиперметропия глаза

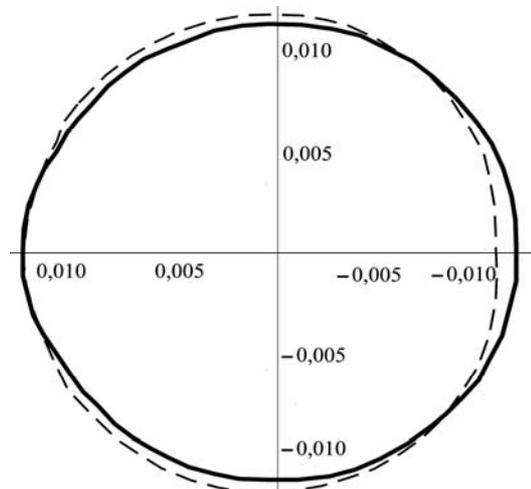


Рис. 14. Картина деформации для случая 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе [9] отмечается, что одним из факторов, вызывающих миопию, является то, что склеральная оболочка в тыльной части глаза является существенно более мягкой. Этот случай можно описать моделью, когда ткань склеральной оболочки является неоднородной и ее упругие свойства начинают резко уменьшаться при приближении к нижнему полюсу. Введем функцию F от координаты α , она будет описывать изменение среднего значения модуля упругости

$$F(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ \frac{1}{1-6\alpha}, & \alpha < 0 \end{cases},$$

и решим задачу при следующих параметрах:

$$E_1^{(1)} = 4,76 \text{ МПа}; \quad E_1^{(2)} = 14,3 \cdot F(\alpha) \text{ МПа}; \quad E_3^{(1)} / E_1^{(1)} = E_3^{(2)} / E_1^{(2)} = 0,01;$$

$$E_2^{(1)} / E_1^{(1)} = E_2^{(2)} / E_1^{(2)} = 1;$$

$$\nu_{12}^{(i)} = 0,4; \quad \nu_{13}^{(i)} = 0,01; \quad \nu_{21}^{(i)} = 0,4; \quad \nu_{23}^{(i)} = 0,01; \quad \nu_{31}^{(i)} = 0,4; \quad \nu_{32}^{(i)} = 0,4.$$

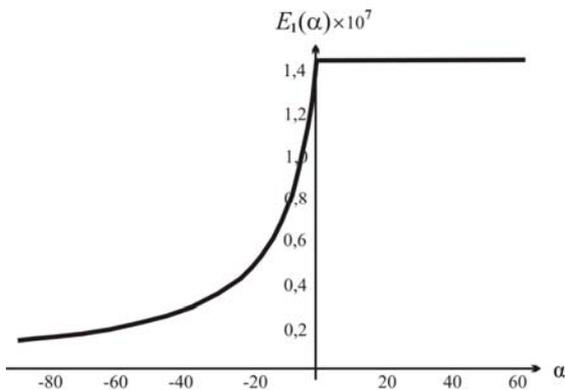


Рис. 15. Функция изменения модуля упругости E_1

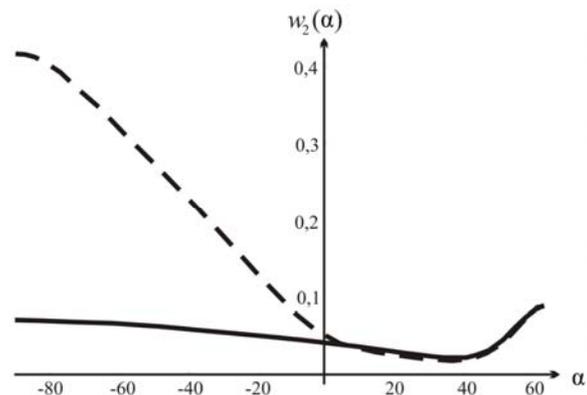


Рис. 16. Функция прогиба склеральной оболочки

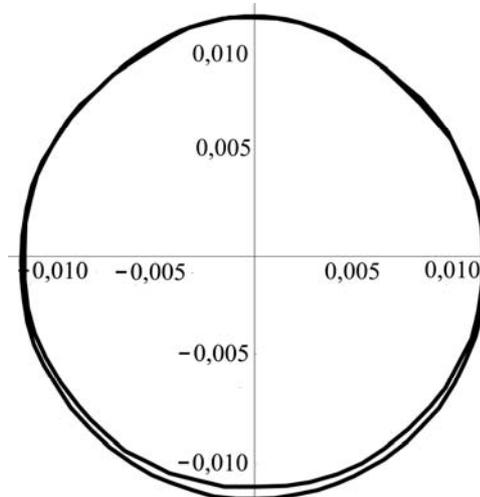


Рис. 17. Общая картина деформации

Результаты расчетов показывают, что влияние неоднородности склеры на форму деформации роговицы мало (рис. 17), поэтому приведем функции прогиба склеральной оболочки, рассчитанные для случая однородной (сплошная линия), и неоднородной материи.

Как можно видеть из приведенных графиков (рис. 15, 16), уменьшение величины модуля упругости склеры приводит к существенному увеличению прогиба склеры. Так, в рассмотренном примере, в окрестности полюса, он увеличивается почти в семь раз.

Если исследовать общую картину деформации оболочки (рис. 17), видно, что существенные деформации, вызывающие изменение переднезадней оси глаза, происходят именно в тыльной части с более мягкой тканью. И следующее изменение переднезадней оси соответствует состоянию глаза с миопией (см. рис. 11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены исследования моделей склеральной ткани. На основе проведенных исследований сделаны следующие выводы. При моделировании склеральной оболочки глаза как трансверсально-изотропной оболочки отмечено, что воздействие внутреннего давления несущественно влияет на изменение передне-задней оси глаза. В случае же неоднородной трансверсально-изотропной оболочки, модули упругости которой уменьшаются при приближении к точке нижнего полюса, максимальный прогиб происходит в тыльной части глаза. Общая картина деформации соответствует состоянию миопии.

При исследовании ортотропной ткани отмечено, что в случае, когда $E_2^{(2)} / E_1^{(2)} > 1$, общая картина деформации будет соответствовать состоянию миопии. В обратном же случае, когда $E_2^{(2)} / E_1^{(2)} < 1$, картина деформации соответствует состоянию гиперметропии.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 09-01-00140а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэр, С.М. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, П.Е. Товстик. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. – 92 с.
2. Волков, В.В. Исследование напряженного состояния роговицы живого глаза человека методом фотоупругости / В.В. Волков, С.А. Вязьминский, Л.К. Малышев, О.Е. Мамаев, В.Я. Павилайнен, Ф.С. Саулгозол // Изв. АН ЭССР. Физика, математика. – 1988. – Т. 37. – С. 76–84.
3. Иомдина, Е.Н. Механические свойства глаза человека / Е.Н. Иомдина // Современные проблемы биомеханики. – Вып. 11. – 2006. – С. 183–201.
4. Краковская, Е.В. Приложение теории сопряженных оболочек к задачам офтальмологии / Е.В. Краковская // Компьютерные методы в механике сплошной среды: сб. трудов. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. – С. 5–19.
5. Родионова, В.А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек / В.А. Родионова, Б.Ф. Титаев, К.Ф. Черных. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996. – 240 с.
6. Сомов, Е.Е. Клиническая анатомия органа зрения человека / Е.Е. Сомов. – М.: Медпресс-информ. – 2005. – 136 с.
7. Филиппов, С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек / С.Б. Филиппов. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. – 196 с.
8. Duke-Elder, D. Diseases of the eye / D. Duke-Elder. – London, 1956. – 443 p.
9. Lang, G.K. Ophthalmology / G.K. Lang. – New York: Thieme. – 2000. – 566 p.

STRESS-STRAIN STATE OF THE SCLERA AND CORNEA AS ORTHOTROPIC NON-UNIFORM CONJUGATED SPHERICAL SHELLS

A.M. Ermakov (St. Petersburg, Russia)

The stress–strain state of the conjugated orthotropic spherical shells under internal pressure is determined in this paper. A behavior of a corneoscleral shell of an eye with increasing of intraocular pressure can be modelled. The modelling is performed by virtue of the theory of shells taking into account the influence of transversal shear, deforming in the direction of normal to middle surface, and transversal normal stresses. The problem is solved in the displacements. As a result of transformation of the constitutive relations, the system of differential equations of sixteenth order with sixteen boundary conditions is obtained. Adopting a finite–difference method, the overall picture of shell deformations for various ratios of the elastic moduli was obtained.

Key words: sclera, conjugated anisotropic spherical shells, myopia, hypermetropia.

Получено 16 января 2009