УДК 621.396

И.Н. Липатов
Пермский государственный технический университет

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ЗАДАННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Рассматривается задача оценки погрешности моделирования случайного процесса с заданной корреляционной функцией. Параметры корреляционной функции известны. Получены оценки параметров корреляционной функции. Погрешность моделирования случайного процесса оценивается по степени расхождения оценок параметров корреляционной функции от самих известных параметров корреляционной функции.

На практике чаще требуется моделировать процессы, относящиеся к определенному, более узкому классу случайных процессов, например стационарные нормальные случайные процессы. Рассмотрим моделирование стационарного нормального процесса $x(t)$, корреляционная функция (КФ) которого определяется соотношением

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha_x|\tau|} \cdot \cos\beta_x\tau, \tag{1}$$

где σ_x^2 – дисперсия случайного процесса $x(t)$; α_x – коэффициент нерегулярности случайного процесса $x(t)$; β_x – преобладающая частота в спектре случайного процесса $x(t)$.

Из соотношения (1) имеем

$$K_x[j] = \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha_x|j\Delta t|} \cdot \cos\beta_x j\Delta t,\ \ j = \overline{0,m}, \tag{2}$$

где $K_x[j] = K_x(t_j)$; $t_j = j\Delta t$; Δt – интервал дискретности измерения случайного процесса $x(t)$.

В работе [1] для моделирования случайного процесса с КФ вида (1) приведен алгоритм вида

$$\left.\begin{aligned}&\hat{x}[i] = b_1\hat{x}[i-1] + b_2\hat{x}[i-2] + a_0\varepsilon[i] + a_1\varepsilon[i-1];\ i = \overline{3,n};\\ &\hat{x}[1] = \hat{x}[2] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&a_0 = \sigma_x \cdot \alpha = \sigma_x \sqrt{\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1 - -4\alpha_0^2}}{2}};\\
&a_1 = \frac{\sigma_x \alpha_0}{2};\; b_1 = 2\rho \cdot \cos\gamma_0;\; b_2 = -\rho^2;\\
&\alpha_0 = \rho(\rho^2 - 1)\cdot\cos\gamma_0;\; \alpha_1 = 1 - \rho^2;\\
&\rho = e^{-\gamma_*};\; \gamma_* = \alpha_x \cdot \Delta t;\; \gamma_0 = \beta_x \cdot \Delta t.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Здесь $\widehat{x}[i] = \widehat{x}(t_i); t_i = i\Delta t; \varepsilon[i] = \varepsilon(t_i); \varepsilon[i], (i = 0,1,...)$ – последовательность независимых нормально распределенных (гауссовских) случайных величин, имеющих нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию (дискретный белый шум).

Определим оценку [2]:

$$\hat{K}_x[j] = \frac{1}{n-j}\sum_{i=1}^{n-j}[\hat{x}[i] - \hat{m}_x][\hat{x}[i+j] - \hat{m}_x],\; j = \overline{0,m}, \quad (5)$$

где

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}[i]. \quad (6)$$

Здесь m_x – оценка математического ожидания случайной последовательности,

$$\hat{x}[i], i = 1,n;\; \hat{K}_x[j] = \hat{K}_x(t_j); t_j = j\Delta t;\; \hat{x}[i+j] = \hat{x}(t_{i+j});\; t_{i+j} = (i+j)\Delta t.$$

На рис. 1 для параметров $\Delta t = 0{,}25$; $n = 600$; $m = 60$; $\sigma_x = 5$; $\beta_x = 2$; $\alpha_x = 0{,}2$ показаны графики КФ $K_x[j], \hat{K}_x[j], j = \overline{0,m},$ рассчитанных по формулам (2),(5),(6).

Оценку $\hat{K}_x[j], j = \overline{0,m},$ будем использовать для получения оценок $\widehat{\sigma}_x, \widehat{\alpha}_x, \widehat{\beta}_x$ параметров $\sigma_x, \alpha_x, \beta_x$. Погрешность моделирования случайного процесса с КФ (2) будем оценивать по степени расхождения оценок $\widehat{\sigma}_x, \widehat{\alpha}_x, \widehat{\beta}_x$ от известных параметров $\sigma_x, \alpha_x, \beta_x$.

Оценка $\widehat{\sigma}_x$ определяется в виде

$$\widehat{\sigma}_x = \sqrt{\widehat{K}_x[0]}. \quad (7)$$

Для получения оценки $\widehat{\beta}_x$ определим оценку односторонней спектральной плотности $\widehat{G}[R]=\widehat{G}(f_R), \quad R=\overline{0,m}$ по формуле [3]:

$$\widehat{G}[k]=2\Delta t[\widehat{K}_x[0]+2\sum_{r=1}^{m-1}\widehat{K}_x[r]\cos\left(\frac{\pi rk}{m}\right)+(-1)^R\widehat{K}_x[m]], \; k=\overline{0,m}, \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} f_k &= \frac{kf_c}{m}, \; k=\overline{0,m}; \\ f_c &= \frac{1}{2\Delta t}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь $f_k=k\cdot\Delta f$; $\Delta f=f_c/m$; f_c – частота среза.

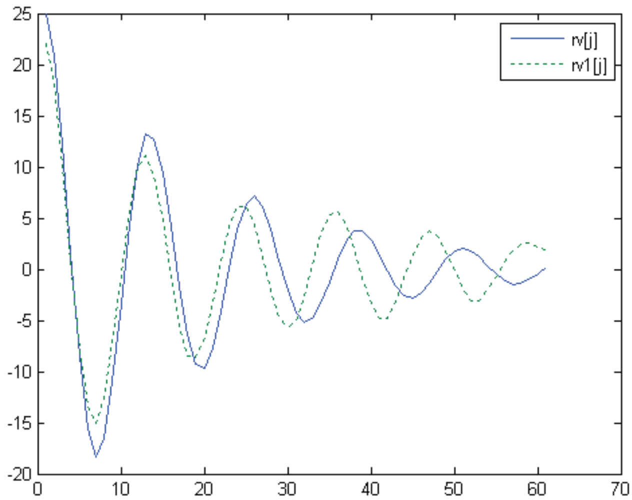

Рис. 1. Графики КФ $K_x[j], \widehat{K}_x[j], \; j=\overline{0,m}$;

———— – КФ $K_x[j], \; j=\overline{0,m}$;

- - - - - – КФ $\widehat{K}_x[j], \; j=\overline{0,m}$

Определим сглаженную оценку $G^*[k], \; k=\overline{0,m}$ спектральной плоскости в виде [3]:

$$\left.\begin{aligned} &G^*[0]=0{,}5\widehat{G}[0]+0{,}5\widehat{G}[1]; \\ &G^*[k]=0{,}25\widehat{G}[k-1]+0{,}5\widehat{G}[k]+0{,}25\widehat{G}[k+1], \quad k=\overline{1,m-1}; \\ &G^*[m]=0{,}5\widehat{G}[m-1]+0{,}5\widehat{G}[m]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

На рис. 2 для параметров $\Delta t = 0{,}25$; $n = 600$; $m = 60$; $\sigma_x = 5$; $\beta_x = 2$; $\alpha_x = 0{,}2$ приведен график $G^*[k], k = \overline{0, m}$ сглаженной спектральной плоскости, рассчитанной по формулам (8),(9),(10).

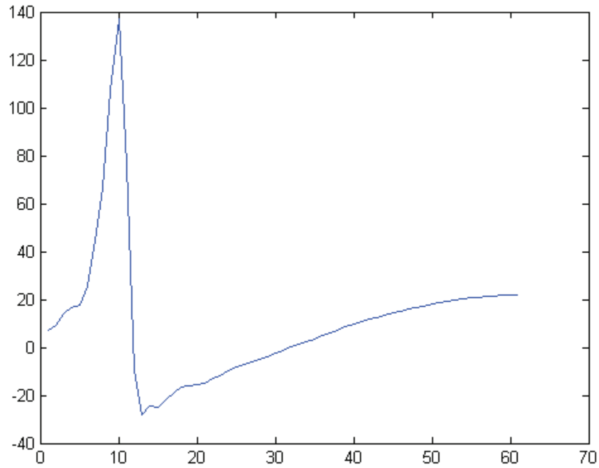

Рис. 2. График $G^*[k], k = \overline{0, m}$

Найдем максимальный элемент в массиве $G^*[k]$, $k = \overline{0, m}$ и индекс $k = k_2^*$ для этого элемента. Тогда $\widehat{\beta}_x$ определяется в виде

$$\widehat{\beta}_x = 2\pi k_2^* \Delta f. \tag{11}$$

Определим оценку $\widehat{\alpha}_x$ параметра α_x. Будем аппроксимировать:

$$\widehat{K}_x[k] = \widehat{\sigma}_x^2 \cdot e^{-\widehat{\alpha}_x k \Delta t} \cdot \cos \widehat{\beta}_x k \Delta t, \quad k = \overline{0, m_1}. \tag{12}$$

Введем обозначение

$$x_1[k_1] = \widehat{\alpha}_x, \; k_1 = 1,2,\ldots . \tag{13}$$

Соотношение (12) с учетом (13) примет вид

$$\widetilde{K}_x[k] = \widehat{\sigma}_x^2 \cdot \exp(-x_1[k_1] k \Delta t) \cdot \cos \widehat{\beta}_x k \Delta t, \quad k = \overline{0, m_1}. \tag{14}$$

Образуем массив $\varepsilon_2[R]$, определяемый по формуле

$$\varepsilon_2[k] = \widetilde{K}_x[k] - \widehat{K}_x[k], \quad k = \overline{0, m_1}. \tag{15}$$

Определим величину d_1 вида

$$d_1 = \frac{1}{m_1 + 1} \sum_{k=0}^{m_1} \varepsilon_2^2[k]. \tag{16}$$

Будем подбирать такое значение $\widehat{\alpha}_x$, при котором $\sqrt{d_1}$ принимает минимальное значение. Введем массив $S_1[k_1]=\sqrt{d_1}, k_1=1,2,...$. Следовательно, задача сводится к поиску минимального элемента в массиве $S_1[k_1], k_1=1,2,...$ и индекса $k_1=k_1^*$ этого элемента. Предполагалось, что при $k_1=1$ $\widehat{\alpha}_x=0$. Осуществлялось синхронное изменение $k_1, \widehat{\alpha}_x$ и $x_1[k_1]$ по формулам:

$$k_1=k_1+1; \quad \widehat{\alpha}_x=\widehat{\alpha}_x+0{,}01; \quad x_1[k_1]=\widehat{\alpha}_x, \tag{17}$$

т.е. $k_1, \widehat{\alpha}_x,$ $x_1[k_1]$ принимали значения:

$$k_1=2; \quad \widehat{\alpha}_x=0{,}01; \quad x_1[2]=0{,}01;$$

$$k_1=3; \quad \widehat{\alpha}_x=0{,}02; \quad x_1[3]=0{,}02;$$

$$k_1=4; \quad \widehat{\alpha}_x=0{,}03; \quad x_1[4]=0{,}03$$

и так далее. Изменение $\widehat{\alpha}_x$ осуществлялось в диапазоне $0\le\widehat{\alpha}_x\le\rho_1$.

При расчетах принималось $\rho_1=1$. В результате получены массивы $x_1[k_1], S_1[k_1],$ $k_1=\overline{1,k_6}$,
где

$$k_6=(p_1/0{,}01)+1. \tag{18}$$

При $p_1=1$ $R_6=101$.

Определение минимального элемента в массиве $S_1[k_1],$ $k_1=\overline{1,k_6}$ и индекса этого элемента $k_1=k_1^*$ позволяет из массива $x_1[k_1],$ при $k_1=k_1^*$ извлечь то значение $\widehat{\alpha}_x$, при котором обеспечивается наилучшая аппроксимация $\widehat{K}_x[k],$ $k=\overline{0,m_1}$ выражением (14). Следовательно,

$$\widehat{\alpha}_x=x_1[k_1^*]. \tag{19}$$

Таким способом получена оценка $\widehat{\alpha}_x$ параметра α_x.

Введем в рассмотрение величины $\delta_i,$ $i=\overline{1,3},$ которые определяются соотношениями:

$$\delta_1=\frac{|\widehat{\sigma}_x-\sigma_x|}{\delta_x}100\ \%; \tag{20}$$

$$\delta_2 = \frac{\left|\hat{\beta}_x - \beta_x\right|}{\beta_x} 100\ \%; \tag{21}$$

$$\delta_3 = \frac{\left|\hat{\alpha}_x - \alpha_x\right|}{\alpha_x} 100\ \%. \tag{22}$$

Результаты расчетов $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\beta}_x$, $\hat{\alpha}_x$, δ_i, $i = 1{,}3$ приведены в таблице.

Результаты расчетов на ЦВМ

Варианты	Параметры											
	Δt	n	m	σ_x	$\hat{\sigma}_x$	β_x	$\hat{\beta}_x$	α_x	$\hat{\alpha}_x$	δ_1,%	δ_2,%	δ_3,%
1	0,3	600	60	5	5,2	3,5	3,5	0,5	0,5	2,5	0,1	10
2	0,2	600	60	5	5,0	3,5	3,4	0,5	0,5	0,1	4,3	6
3	0,1	600	60	5	5,0	7	6,7	0,5	0,6	0,3	4,4	12
4	1	1000	100	5	4,7	0,4	0,4	0,1	0,1	6,8	1	0
5	0,1	1000	100	5	6,0	1,8	1,9	0,3	0,3	20,4	3,7	18
6	0,3	600	60	5	4,7	2	2,0	0,2	0,2	6,2	3	10

Таким образом, в работе выполнена оценка погрешности моделирования случайного процесса с заданной корреляционной функцией.

Библиографический список

1. Быков В.В. Цифровое моделирование в статической радиотехнике. – М.: Советское радио, 1971.
2. Росин М.Ф, Булыгин В.С. Статическая динамика и теория эффективности систем управления. – М.: Машиностроение, 1981.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974.

Получено 04.10.2010