

УДК 531/534: [57+61]

О ДЕФОРМАЦИИ МНОГОСЛОЙНОЙ РЕШЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНКИ ДИСКА ЗРИТЕЛЬНОГО НЕРВА

Л.А. Золотухина

Кафедра теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, Россия, 198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 28, e-mail: l_karamshina@mail.ru

Аннотация. Известно, что при глаукоме дефекты поля зрения возникают из-за атрофии зрительно-нервных волокон, имеющих при выходе из полости глаза в полость зрительного нерва перегиб в области решетчатой мембраны [2]. Решетчатая мембрана состоит из нескольких параллельно расположенных листов плотной соединительной ткани, содержащей эластические волокна. В данной работе представлена модель решетчатой мембраны как многослойной оболочки вращения с упругими связями между слоями.

Ключевые слова: глаукома, решетчатая пластинка, многослойная оболочка вращения.

ВВЕДЕНИЕ

Форму глазного яблока определяет плотная наружная оболочка, большую часть которой (93%) составляет склера. Недалеко от заднего полюса через склеру из глаза выходит зрительный нерв. Сплошного дефекта склеры здесь нет, а имеются ее истончения и множество мелких отверстий, через которые проходят пучки зрительного нерва. Участок склеры, через который проходит зрительный нерв, называют решетчатой пластинкой или (даже чаще) решетчатой мембраной (*lamina cribrosa*). Решетчатая пластинка играет важную роль в балансе внутриглазного и внутричерепного давлений. В монографии [4] отмечается, что «решетчатая пластинка состоит из нескольких параллельно расположенных листов плотной соединительной ткани, содержащей не только коллагеновые, но и эластические волокна. Количество их индивидуально и варьируется в широких пределах. Каждый лист имеет отверстия круглой или овальной формы различных размеров, некоторые из них имеют соединительные перемычки. Отверстия в различных листах совпадают, образуя каналцы, по которым проходят пучки нервных волокон... Самый задний лист плотнее и массивнее всех остальных».

В работах [6, 7] было высказано предположение, что ущемление нервных волокон в отверстиях решетчатой пластины происходит из-за вызванного повышенным внутриглазным давлением смещения составляющих ее пластин относительно друг друга.

В связи с этим в работе [1] рассматривались большие осесимметричные деформации тонкой безмоментной многослойной оболочки вращения в форме купола с упругими связями между слоями. Получено, что при увеличении внутриглазного давления наиболее сильные относительные смещения происходят на уровне последнего слоя, причем эти смещения увеличиваются к краю пластины. Это соответствует

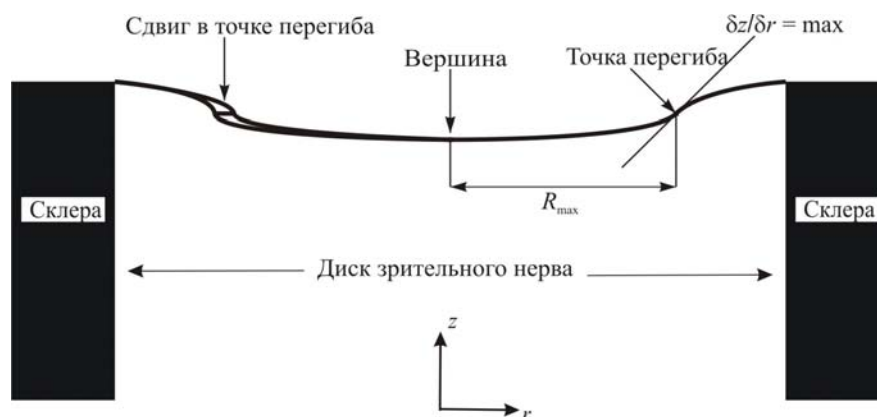


Рис. 1. Схема решетчатой пластинки глаза [8]

«специфическому нарушению зрительных функций» – «нарушениям на периферии и в парацентральной части поля зрения» [4, 5] и тому факту, что, как отмечается в монографии [5], «начальные дистрофические изменения в нервных волокнах определяются на уровне заднего края решетчатой пластинки склеры».

В работе канадских ученых [8] деформация решетчатой пластинки изучалась на основе экспериментальных данных и клинических наблюдений. Использовался метод сканирующей лазерной томографии, который способен выявлять региональные изменения в деформации диска зрительного нерва при сильных изменениях внутриглазного давления. Экспериментально было показано, что при увеличении внутриглазного давления появляется «точка перегиба» и форма прогиба решетчатой пластинки принимает вид, изображенный на рис. 1. Понятно, что модель безмоментной оболочки (или мембраны) не позволяет определить «точку перегиба» – точку, в которой, как отмечено на рисунке работы [8], производная от нормального прогиба по радиальной координате имеет максимальное значение.

МОДЕЛЬ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим моментную постановку ранее рассматриваемой задачи [1]. По-прежнему считаем, что имеем многослойную оболочку вращения с упругими связями между слоями. Расстоянием между слоями пренебрегаем, поэтому до деформации поверхность оболочки описывается функциями (рис. 2)

$$r_0(s_0), z_0(s_0), \varphi_0(s_0), r_0' = \cos \varphi_0, z_0' = \sin \varphi_0, ()' \equiv \frac{d()}{ds_0}, \quad (1)$$

где s_0 , r_0 , z_0 , φ_0 – длина дуги, отсчитываемая от вершины купола, расстояние до оси вращения, вертикальная координата и угол между нормалью к оболочке и осью вращения соответственно.

После деформации форма оболочки описывается функциями

$$r^k(s), z^k(s), \varphi^k(s), (r^k)' = \lambda_1^k \cos \varphi^k, (z^k)' = \lambda_1^k \sin \varphi^k. \quad (2)$$

Предполагаем, что слои могут проскальзывать друг по другу. Введем функции $s^k(s_0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, указывающие дуговую координату точки s_0 k -го слоя после деформации. Имеют место соотношения [3]

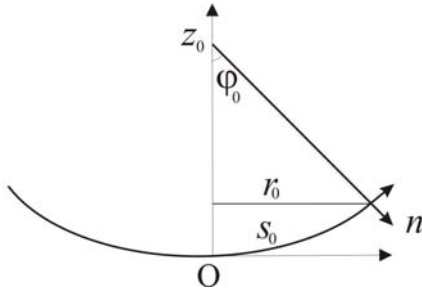


Рис. 2. Поверхность оболочки до деформации

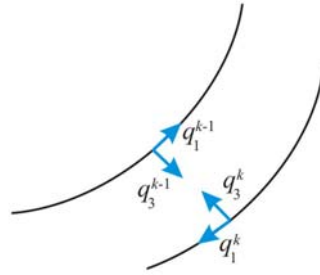


Рис. 3. Проекция интенсивности внешней нагрузки на k -й слой

$$\lambda_1^k = \frac{ds^k}{ds_0}, \quad \lambda_2^k = \frac{r^k}{r_0}, \quad r^k = r(s^k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где λ_1^k и λ_2^k – кратности удлинения срединной поверхности k -го слоя в меридиональном и окружном направлениях.

Из этих соотношений следует

$$r_0 (\lambda_2^k)' + \cos \varphi_0 \lambda_2^k - \cos \varphi^k \lambda_1^k = 0, \quad r^k = r_0 \lambda_2^k. \quad (4)$$

Уравнения равновесия k -го слоя оболочки в проекциях на касательную и нормаль имеют вид

$$\begin{aligned} (r_0 T_1^k)' - T_2^k \cos \varphi^k + r_0 (\varphi^k)' T_{1n}^k + r_0 \lambda_1^k \lambda_2^k (q_1^{k-1} - q_1^k) &= 0, \\ (r_0 T_{1n}^k)' - T_2^k \sin \varphi^k - r_0 (\varphi^k)' T_1^k + r_0 \lambda_1^k \lambda_2^k (q_3^{k-1} - q_3^k) &= 0, \\ (r_0 M_1^k)' - M_2^k \cos \varphi^k - r_0 \lambda_1^k T_{1n}^k &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

где T_1^k , T_2^k и M_1^k , M_2^k – меридиональные и окружные усилия и моменты в k -том слое оболочки, отнесенные к единице длины после деформации, q_1^i и q_3^i – проекции интенсивности внешней нагрузки на k -й слой, отнесенные к единице площади после деформации и действующие с внутренней (q_1^{k-1} и q_3^{k-1}) и наружной (q_1^k и q_3^k) стороны слоя (рис. 3).

Величины q_1^0 , q_3^0 , q_1^n и q_3^n определяются нагрузками, действующими на оболочку в целом. Будем считать, что оболочка находится под действием внутриглазного (p_1) и внутричерепного (p_2) нормального давления. Тогда

$$q_1^0 = 0, \quad q_3^0 = p_1, \quad q_1^n = 0, \quad q_3^n = p_2.$$

Величины q_1^k , q_3^k , $k = 1, 2, \dots, n-1$ – напряжения касательного и нормального взаимодействия слоев оболочки. Будем считать, что касательные напряжения являются заданными функциями относительного смещения слоев [1].

$$q_1^k = q_1^k(s_0, \Delta_k), \quad \Delta_k = s^{k+1} - s^k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Усилия являются заданными функциями кратности удлинения слоев, зависящими от упругих свойств слоев.

$$T_1^k = T_1^k(s_0, \lambda_1^k, \lambda_2^k), \quad T_2^k = T_2^k(s_0, \lambda_1^k, \lambda_2^k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Моменты являются заданными функциями кривизн

$$M_1^k = M_1^k(s_0, \kappa_1^k, \kappa_2^k), \quad M_2^k = M_2^k(s_0, \kappa_1^k, \kappa_2^k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Считаем для оболочки выполненным закон Гука [3]:

$$\begin{aligned} T_1^k &= \frac{E_p h_0^k}{1-\nu^2} \left((\lambda_1^k - 1) + \nu(\lambda_2^k - 1) \right), & T_2^k &= \frac{E_p h_0^k}{1-\nu^2} \left((\lambda_2^k - 1) + \nu(\lambda_1^k - 1) \right), \\ M_1^k &= \frac{E_p (h_0^k)^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1^k + \nu\kappa_2^k), & M_2^k &= \frac{E_p (h_0^k)^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2^k + \nu\kappa_1^k), \\ \kappa_1^k &= \frac{(\varphi^k)'}{\lambda_1^k} - \varphi_0', & \kappa_2^k &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{\sin \varphi^k}{\lambda_2^k} - \sin \varphi_0 \right), & (\varphi_0)' &= \frac{1}{R_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где h_0^k – толщина k -го слоя решетчатой пластинки, E_p – приведенный модуль упругости перфорированных слоев решетчатой пластинки, κ_1^k, κ_2^k – изменения кривизн нормальных сечений, R_0 – радиус кривизны решетчатой пластинки.

Дополним систему (5) вытекающими из (6) уравнениями

$$\begin{aligned} T_2^k &= E_p h_0^k (\lambda_2^k - 1) + \nu T_1^k, & M_2^k &= \frac{E_p (h_0^k)^3}{12} \kappa_2^k + \nu M_1^k, \\ (\varphi^k)' &= \lambda_2^k \left(\frac{12(1-\nu^2)}{E_p (h_0^k)^3} M_1^k - \nu \kappa_2^k + \frac{1}{R_0} \right), & \lambda_1^k &= \frac{(1-\nu^2)}{E_p h_0^k} T_1^k - \nu(\lambda_2^k - 1) + 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдем к проекциям U и V внутренних усилий соответственно на осевое и перпендикулярное к нему направления.

$$T_1^k = U^k \cos \varphi^k + V^k \sin \varphi^k, \quad T_{1n}^k = U^k \sin \varphi^k - V^k \cos \varphi^k.$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{V^k(\bar{s}_0)}{E_p h_0^k}, \quad y_{n+k} = \frac{U^k(\bar{s}_0)}{E_p h_0^k}, \quad y_{2n+k} = \lambda_2^k(\bar{s}_0), \quad y_{3n+k} = \frac{M_1^k(\bar{s}_0)}{E_p h_0^k r_0^*}, \\ y_{4n+k} &= \varphi^k(\bar{s}_0), \quad y_{5n+1} = \frac{r_0(\bar{s}_0)}{r_0^*}, \quad y_{5n+2} = \varphi_0(\bar{s}_0), \\ \left(\bar{s}_0 = \frac{s_0}{r_0^*}, \quad r_0^* - \text{радиус крайней параллели} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, получена полная система $5n + 2$ дифференциальных уравнений относительно неизвестных $U^k(\bar{s}_0)$, $V^k(\bar{s}_0)$, $\lambda_2^k(\bar{s}_0)$, $M_1^k(\bar{s}_0)$, $\varphi^k(\bar{s}_0)$, $r_0(\bar{s}_0)$, $\varphi_0(\bar{s}_0)$

$$\begin{aligned} (y_k)' &= -\frac{y_k \cos y_{5n+2} - \bar{\lambda}_1^k y_{2n+k} (\bar{q}_{11}^k \sin y_{4n+k} - \bar{q}_{33}^k \cos y_{4n+k})}{y_{5n+1}}, \\ (y_{n+k})' &= -\frac{y_{n+k} \cos y_{5n+2} - \bar{T}_2^k}{y_{5n+1}} - \bar{\lambda}_1^k y_{2n+k} (\bar{q}_{11}^k \cos y_{4n+k} + \bar{q}_{33}^k \sin y_{4n+k}), \\ (y_{2n+k})' &= \frac{\bar{\lambda}_1^k \cos y_{4n+k} - y_{2n+k} \cos y_{5n+2}}{y_{5n+1}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(y_{4n+k})' = \left(12(1-v^2)y_{3n+k} \left(\frac{r_0^*}{h_0^k} \right)^2 + \frac{r_0^*}{R_0} - \frac{v}{y_{5n+1}} \left(\frac{\sin y_{4n+k}}{y_{2n+k}} - \sin y_{5n+2} \right) \right) \bar{\lambda}_1^k,$$

$$(y_{5n+1})' = \cos y_{5n+2},$$

$$(y_{5n+2})' = \frac{r_0^*}{R_0},$$

где

$$\left(\right)' = \frac{d(\)}{d\bar{s}_0}, \quad \bar{T}_2^k = (y_{2n+k} - 1) + v(y_{n+k} \cos y_{4n+k} + y_k \sin y_{4n+k}),$$

$$\bar{M}_2^k = \frac{(h_0^k)^2}{12y_{5n+1}(r_0^*)^2} \left(\frac{\sin y_{4n+k}}{y_{2n+k}} - y_{5n+2} \right) + v y_{3n+k},$$

$$\bar{\lambda}_1^k = (y_{n+k} \cos y_{4n+k} + y_k \sin y_{4n+k})(1-v^2) - v(y_{2n+k} - 1) + 1,$$

$$\bar{q}_{11}^k = \frac{q_1^{k-1} - q_1^k}{E_p h_0^k} r_0^*, \quad \bar{q}_{33}^k = \frac{p_1 - p_2}{E_p h_0^k} r_0^*.$$

В вершине купола выполнены граничные условия

$$\lambda_2^k = 1, \quad r_0 = \varphi_0 = \varphi^k = 0, \quad T_1^k = T_2^k \quad \text{при} \quad \bar{s}_0 = 0. \quad (9)$$

Условие $T_1^k = T_2^k$ обеспечивает конечность решений в вершине купола.

На краю пластины можно задать условия упругой заделки слоев

$$T_1^k = c_k(s^k - s_0), \quad \varphi^k = \varphi_0 \quad \text{при} \quad r_0 = r_0^*. \quad (10)$$

Параметры жесткости c_k могут быть различными для разных слоев, и, судя по описанию структуры решетчатой пластинки [2, 4, 5], последний «наружный» лист решетчатой пластинки имеет наиболее жесткие граничные условия: $c_N > c_k$ при $k < N$.

Напряжения касательного взаимодействия слоев оболочки принимаем в виде

$$q_1^k = \alpha_k(s^{k+1} - s^k)(r^k - r_0^*). \quad (11)$$

РЕШЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

При численном интегрировании краевой задачи (8)–(11) используется метод пристрелки: задаются значения $U^k = u_k$ и $V^k = v_k$ и получаемая задача Коши решается методом Рунге–Кутты до выполнения равенства $r_0 = r_0^*$.

Расчеты проводились для трехслойных пластин при различных параметрах c_k и α_k , учитывая что последний «наружный» слой является более плотным и массивным: $h_N > h_k$ при $k < N$.

Ниже приведены результаты в безразмерном виде для случая $c_1/E_p = 0,04$; $c_2/E_p = 0,04$; $c_3/E_p = 0,05$.

На рис. 4 сплошной и пунктирной линиями показаны формы прогиба серединной поверхности верхнего ($k = 1$) слоя пластинки соответственно до и после деформации. На рис. 5 представлены прогибы серединной поверхности последнего «наружного» слоя ($k = 3$) после деформации (пунктирная линия) и до деформации (сплошная линия).

В общем виде прогиб деформированной пластины толщины $h = 0,3$ имеет форму, представленную на рис.6.

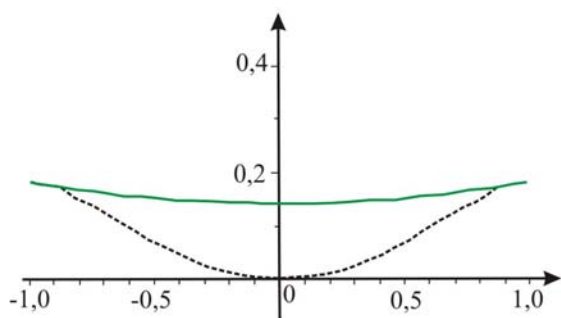


Рис. 4. Прогиб верхнего слоя до и после деформации

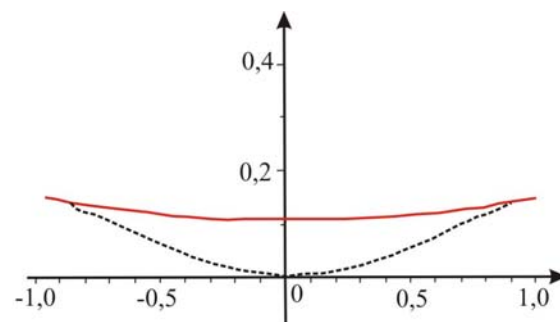


Рис. 5. Прогиб нижнего слоя до и после деформации

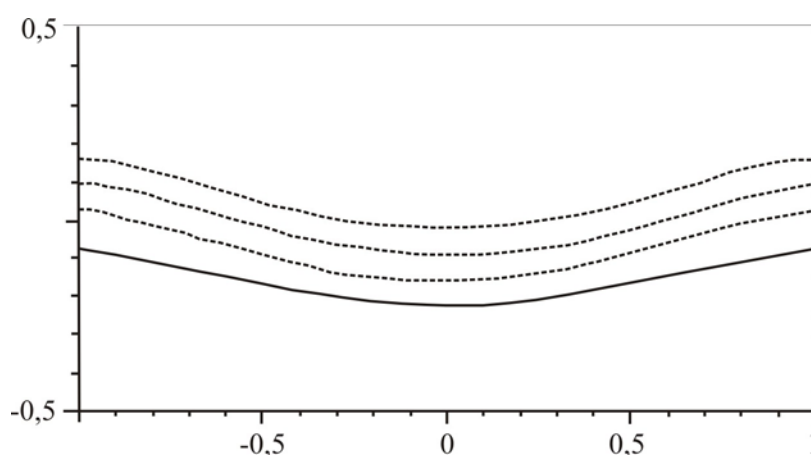


Рис. 6. Прогиб решетчатой пластинки после деформации

Таблица

s_0	M_1	M_3	φ_1	φ_3
0	0	0	0	0
...
0,5	0,00162	0,00117	0,25481	0,20004
0,6	0,00017	0,00008	0,27381	0,21576
0,65	-0,00070	-0,00056	0,27537	0,21773
0,7	-0,00165	-0,00127	0,27085	0,21523
...
1	-0,00941	-0,00687	0,08322	0,08379

В таблице приведены безразмерные значения изгибающих моментов слоев $M_1^i \equiv M_i$ и соответствующих углов $\varphi^i \equiv \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$ после деформации ($M_1 = M_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$), полученные при численном решении рассматриваемой задачи. Видно, что в точке $s_0 = 0,65$ моменты меняют знак и углы достигают максимального значения, то есть точка $s_0 = 0,65$ является «точкой перегиба».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В широком диапазоне изменения параметров c_k и α_k при учете особенностей строения решетчатой пластинки (последний «наружный» слой является более плотным и массивным: $h_N > h_k$ при $k < N$, а также более жестким [2, 4, 5]) получается, что, как и в работе [3], наибольшие относительные смещения увеличиваются к краю пластины. Это соответствует тому факту, что «начальные дистрофические изменения нервных волокон определяются на уровне заднего края решетчатой пластинки склеры» [5].

В результате рассмотрения моментной постановки задачи [1] получаются численные результаты и форма прогиба, соответствующие экспериментальным данным [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэр, С.М. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, П.Е. Товстик. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. – 92 с.
2. Волков, В.В. Глаукома, преглаукома и офтальмогипертензия / В.В. Волков, Л.Б. Сухинина, Е.И. Устинова. – Л.: Медицина, 1985. – 214 с.
3. Кабиц, С.А. Общая нелинейная теория упругих оболочек / С.А. Кабиц, Е.И. Михайловский, П.Е. Товстик, К.Ф. Черных, В.А. Шамина. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. – 388 с.
4. Нестеров, А.Г. Глаукоматозная атрофия зрительного нерва. Актуальные проблемы офтальмологии / А.Г. Нестеров, Е.А. Егоров / Под ред. М.М. Краснова, А.П. Нестерова, С.М. Дыбова. – М.: Медицина, 1981. – С. 22–53.
5. Нестеров, А.П. Глаукома / А.П. Нестеров. – М.: Медицина, 1995. – 256 с.
6. Emery, J.D. The lamina cribrosa in normal and glaucomatous human eyes / J.D. Emery, D. Landis, D. Paton, M. Bohiuk, J.M. Caaig. – Trans. Ac. Amer. Ophthalmol. – 1974. – Vol. 78, No. 2. – P. 290–297.
7. Lindsey, A. Aetiology of field loss in chronic glaucoma / A. Lindsey // Canadian Journal of Ophthalmology. – 1971. – No. 6. – P. 212–216.
8. Yan, D.B. Study of regional deformation of the optic verve head using scanning lazer tomography / D.B. Yan, J.G. Flanagan, T. Farra, G.E. Trope, C.R. Ethier // Current Eye Research. – 1998. – Vol. 17. – P. 903–916.

ON THE DEFORMATION OF MULTILAYER OF THE LAMINA CRIBROSA

L.A. Zolotukhina (St. Petersburg, Russia)

It is known that at the glaucoma, the visual field changes occur due to the atrophy of visual fibres, which are bent in the end of eye cavity in the area of the lamina cribrosa [2]. The lamina cribrosa consists of a few parallel layers of connective tissue containing elastic fibers. In the paper, the lamina cribrosa is modelled as the multilayer shell of rotation with elastic ties between the layers.

Key words: glaucoma, lamina cribrosa, multilayer shell of rotation

Получено 25 ноября 2008

Информация об авторе

Людмила Александровна Золотухина, аспирант, Кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, l_karamshina@mail.ru