

УДК 531/534: [57+61]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛА НЕЛИНЕЙНО СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА СОННОЙ АРТЕРИИ ЧЕЛОВЕКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СТАДИЯХ АТЕРОСКЛЕРОЗА

В.Н. Аптуков, Л.Ю. Осоргина

Кафедра математического анализа Пермского государственного университета, Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: aptukov@psu.ru

Аннотация. Ранее авторами [1] в рамках линейной модели были даны оценки модулей упругости при различных стадиях атеросклероза, проанализированы особенности напряженно-деформированного состояния стенки сосуда в окрестности атероматозной бляшки. Был сделан вывод о необходимости изучения данного вопроса в нелинейной постановке с учетом конечных деформаций. В данной статье на основе аналитического решения, предложенного А.И. Лурье, для цилиндра из полулинейного материала Джона представлена методика определения параметров потенциала нелинейно сжимаемого материала, получены конкретные значения параметров потенциала для сонной артерии человека при различных стадиях атеросклероза.

Ключевые слова: биомеханика, склерозированная артерия, нелинейный потенциал, сжимаемость.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что материал стенки кровеносных сосудов человека является нелинейно упругим [4], сжимаемым [5] материалом. Представляет определенные трудности определение констант потенциала нелинейного сжимаемого материала. Обычно это требует проведения специальных экспериментов и решения серии прямых задач деформирования образца. Доступными для авторов экспериментами являлись испытания отрезков артерий в форме замкнутого цилиндра под действием внутреннего давления [2]. Анализ литературы показал, что для цилиндра из однородного нелинейно упругого сжимаемого материала (полулинейный материал Джона) известно решение в конечном виде [3].

Данная статья посвящена разработке методики определения параметров потенциала нелинейно сжимаемого материала на основе решения [3]. Получены конкретные значения параметров потенциала для сонной артерии человека при различных стадиях атеросклероза, представлены особенности распределения напряжений в стенках артерии.

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Удельная потенциальная энергия для полулинейного материала Джона [3] имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2^2 = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 (\hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{E}}) + \mu I_1 (\hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{E}})^2, \quad (1)$$

где $s_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, $s_2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2$, δ_i – главные относительные удлинения; λ, μ – параметры Ламе; $\hat{\mathbf{U}}$ – левая мера искажения; $\hat{\mathbf{E}}$ – единичный тензор; I_1 – первый инвариант.

Пусть цилиндрическая поверхность ограничена радиусами $r = r_0$ и $r = r_1$ с заданными давлениями p_0, p_1 . Материальными координатами в отсчетной конфигурации являются цилиндрические координаты r, φ, z с координатными ортами $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$.

Предполагая, что радиальное перемещение зависит только от координаты r , а осевое – линейная функция z , получим выражения для радиуса-вектора точки и векторного базиса в актуальной конфигурации

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_r f(r) + \mathbf{k}\alpha z, \mathbf{R}_1 = \mathbf{e}_r f'(r), \mathbf{R}_2 = \mathbf{e}_\varphi f(r), \mathbf{R}_3 = \mathbf{k}\alpha. \quad (2)$$

Мера деформации Коши–Грина $\hat{\mathbf{G}}$

$$\hat{\mathbf{G}} = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{R} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r [f'(r)]^2 + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \frac{f^2(r)}{r^2} + \mathbf{k}\mathbf{k}\alpha^2, \quad (3)$$

а главные относительные удлинения

$$\delta_1 = f'(r), \delta_2 = \frac{1}{r} f(r), \delta_3 = \alpha. \quad (4)$$

Уравнения равновесия в объеме и на поверхности для полулинейного материала приводятся к виду

$$\overset{0}{\nabla} \mathbf{u} = 0, \lambda \mathbf{e}_r \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{u} + 2\mu \mathbf{e}_r \cdot \overset{0}{\nabla} \mathbf{u} = \begin{cases} -p_0 \mathbf{e}_r \left(\frac{dO}{do}\right)_0, r = r_0, \\ -p_1 \mathbf{e}_r \left(\frac{dO}{do}\right)_1, r = r_1, \end{cases} \quad (5)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещения; $\overset{0}{\nabla}$ – набла-оператор Гамильтона в отсчетной конфигурации; $\frac{dO}{do} = \alpha \frac{f(r)}{r}$ – отношение ориентированных площадок в актуальной и отсчетной конфигурациях.

А.И. Лурье [3] дает следующее окончательное решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{1}{(C_1 + \frac{C_2}{r^2})\alpha} [\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu(C_1 - \frac{C_2}{r^2}) - (3\lambda + 2\mu)], \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{(C_1 - \frac{C_2}{r^2})\alpha} [\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu(C_1 + \frac{C_2}{r^2}) - (3\lambda + 2\mu)], \\ \sigma_z &= \frac{r}{ff'} [\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu\alpha - (3\lambda + 2\mu)], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma_R, \sigma_\phi, \sigma_Z$ – физические компоненты тензора Коши; $f = C_1 r + \frac{C_2}{r}$ – функция, определяющая вид радиального перемещения (2).

Из последнего выражения (6) находим продольную силу Q , которую нужно приложить к торцам цилиндра в актуальной конфигурации, чтобы осуществлялось рассматриваемое напряженное состояние

$$Q = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \sigma_Z R dR = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sigma_Z f(r) f'(r) dr = \pi(r_1^2 - r_0^2)[\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu\alpha - (3\lambda + 2\mu)]. \quad (7)$$

Таким образом, для трех неизвестных констант решения C_1, C_2, α существует уравнение (7) и два уравнения (8), формулируемые на основе силовых граничных условий на цилиндрических поверхностях

$$\sigma_R(r_0) = -p_0, \sigma_R(r_1) = -p_1. \quad (8)$$

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТЕНЦИАЛА

Перейдем теперь непосредственно к рассматриваемой задаче равновесия отрезка артерии в виде замкнутого цилиндра конечной длины под действием внутреннего давления p , тогда $Q = p\pi R_0^2$. Это требование означает, что продольная сила на торцах цилиндра обусловлена его замкнутостью и равна просто суммарному давлению на внутреннее поперечное сечение. Краевое условие на торце удовлетворяется в интегральном смысле, в соответствии с принципом Сен-Венана.

Соотношение (7) теперь преобразуется к виду

$$pR_0^2 = (r_1^2 - r_0^2)[\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu\alpha - (3\lambda + 2\mu)]. \quad (9)$$

Соотношения (8) в развернутой форме

$$\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu(C_1 - \frac{C_2}{r_0^2}) = -p(C_1 + \frac{C_2}{r_0^2})\alpha + 3\lambda + 2\mu, \quad (10)$$

$$\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu(C_1 - \frac{C_2}{r_1^2}) = 3\lambda + 2\mu.$$

В уравнение (9) входит внутренний радиус цилиндра в актуальной конфигурации R_0 , который выражается через неизвестные константы решения $R_0 = C_1 r_0 + C_2 / r_0$.

Итак, хотя и получено решение в явном виде, но система уравнений для определения констант решения (9)–(10) является нелинейной.

Нашей целью является определение физических констант потенциала Джона λ, μ из экспериментальных данных по одновременному измерению давления p_k и соответствующих размеров цилиндрического образца артерии в актуальной конфигурации h_k^0, R_k^0, l_k^0 . Получается переопределенная система уравнений (три уравнения на каждом уровне нагрузки для определения двух констант). Отметим, что

не во всяком эксперименте возможно измерение всех трех величин h_k^2, R_k^2, l_k^2 , в данном случае может использоваться только часть из них.

Очевидно, что задача сводится к минимизации невязки Ψ по двум параметрам Ламе

$$\Psi = \sum_{k=1}^N \{ [R_0(p_k) - R_k^2(p_k)]^2 + [h_k(p_k) - h_k^2(p_k)]^2 + [l_k(p_k) - l_k^2(p_k)]^2 \}. \quad (11)$$

Причем

$$R_0(p_k) = C_1(p_k)r_0 + \frac{C_2(p_k)}{r_0}, \quad l_k(p_k) = \alpha l_0,$$

$$h_k(p_k) = R_1(p_k) - R_0(p_k) = C_1(p_k)(r_1 - r_0) + \frac{C_2(p_k)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)}. \quad (12)$$

Итак, при каждом заданном текущем наборе двух параметров Ламе необходимо для каждого уровня давления $p_k, k = \overline{1, N}$ решить нелинейную систему уравнений (9)–(10) для того только, чтобы определить три константы решения и вычислить с помощью (12) значение невязки (11).

Чтобы минимизировать невязку по двум параметрам Ламе и определить материальные константы, необходимо провести большой объем вычислений, например сканировать допустимую область параметров Ламе с небольшим шагом. При этом нужно каждый раз получать достаточно хорошее решение нелинейной системы уравнений (9)–(10). Таким образом, даже при наличии решения задачи о больших деформациях цилиндра в конечном виде задача определения материальных констант остается нетривиальной.

Полученные выражения можно несколько упростить, если предположить, что цилиндр бесконечно длинный, тогда $\alpha = 1$. В этом случае нам не нужно уравнение (7) (или, что то же – (9)). Система (10) упрощается, она становится линейной относительно неизвестных констант решения C_1, C_2 :

$$\lambda(2C_1 + 1) + 2\mu\left(C_1 - \frac{C_2}{r_0^2}\right) = -p\left(C_1 + \frac{C_2}{r_0^2}\right) + 3\lambda + 2\mu,$$

$$\lambda(2C_1 + 1) + 2\mu\left(C_1 - \frac{C_2}{r_1^2}\right) = 3\lambda + 2\mu. \quad (13)$$

Отсюда можно получить явные выражения для C_1, C_2

$$C_1 = \frac{2\mu\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) - p}{2\mu\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) - p\left[1 + (1 - 2\nu)\frac{r_0^2}{r_1^2}\right]},$$

$$C_2 = \frac{pr_0^2}{2\mu\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) - p\left[1 + (1 - 2\nu)\frac{r_0^2}{r_1^2}\right]}, \quad (14)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Здесь в качестве искоемых независимых материальных констант выступают коэффициент Пуассона и модуль сдвига. Теперь можно в явном виде выразить также текущий внутренний радиус и толщину стенки в актуальной конфигурации

$$R_0(p_k) = \frac{2\mu r_0(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2})}{2\mu(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}) - p_k[1 + (1 - 2\nu)\frac{r_0^2}{r_1^2}]},$$

$$h_k(p_k) = \frac{(r_1 - r_0)(1 + \frac{r_0}{r_1})[2\mu(1 - \frac{r_0}{r_1}) - p_k]}{2\mu(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}) - p_k[1 + (1 - 2\nu)\frac{r_0^2}{r_1^2}]} \quad (15)$$

Итак, для бесконечного цилиндра получены конечные расчетные выражения (15) толщины и радиуса цилиндра в актуальной конфигурации, входящие в невязку

$$\Psi = \sum_{k=1}^N \left\{ [R_0(p_k) - R_k^s(p_k)]^2 + [h_k(p_k) - h_k^s(p_k)]^2 \right\}. \quad (16)$$

Ситуация несколько упрощается, поскольку для минимизации невязки не нужно при каждом вычислении текущей геометрии цилиндра решать нелинейную систему трех уравнений. Данный вариант бесконечного цилиндра может использоваться при оценке материальных констант в качестве первого приближения и для предварительной оценки параметров потенциала склерозированных артериальных сосудов.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Применим предложенную методику определения параметров потенциала Джона для склерозированных сонных артерий с помощью данных эксперимента [2].

Для нахождения параметров Ламе был использован метод сканирования величин λ и μ с достаточно мелким шагом. Для каждой пары параметров были решены уравнения (9)–(10) с граничными условиями (8) для нахождения неизвестных констант C_1, C_2, α . На основе констант вычислялись радиальные перемещения R_c , которые в дальнейшем сравнивались с соответствующими экспериментальными данными R_e [2]. Найденные значения параметров Ламе (МПа), соответствующие им радиусы (мм) и погрешности $\delta = (|R_c - R_e| / R_e) \cdot 100\%$ для различных давлений (в мм рт. ст. и МПа) приведены в таблице.

Степень атеросклероза	μ	λ	80 мм рт. ст.			120 мм рт. ст.			160 мм рт. ст.		
			0,018072			0,016308			0,021744		
			R_e	R_c	δ	R_e	R_c	δ	R_e	R_c	δ
1	0,050	0,900	5,560	4,618	16,94	5,800	5,115	11,81	6,000	6,796	13,27
2	0,054	0,965	5,240	4,560	12,98	5,440	4,982	8,42	5,600	5,779	3,20
3	0,056	1,005	4,920	4,535	7,83	5,040	4,927	2,24	5,200	5,602	7,73
4	0,057	1,034	4,720	4,554	3,52	4,920	4,902	0,37	5,000	5,530	10,60

За нулевое значение радиуса принимался радиус артерии при давлении 40 мм рт. ст. Как следует из таблицы, величина погрешности падает с ростом степени атеросклероза, то есть полулинейный материал Джона лучше описывает артерии, находящиеся на последних стадиях атеросклероза. Это связано с тем, что с ростом патологии материал стенок сосудов становится более жестким и меньше проявляет нелинейные свойства.

Установлено, что параметры λ и μ изменяются в зависимости от степени патологии по закону

$$\mu = 0,05 \cdot S^{0,1}, \quad (17)$$

$$\lambda = 0,9 \cdot S^{0,1}, \quad (18)$$

где $S = \overline{1,4}$ – стадия атеросклероза.

Ниже для различных стадий атеросклероза на основе соотношений (6) и полученных значений параметров Ламе приведены распределения тангенциальных напряжений вдоль стенок сосудов при давлении 120 мм рт. ст. (рис. 1).

Построенный нелинейный потенциал позволяет оценить уровень сжимаемости стенок артерий. Относительный объем выражается как

$$V/V_0 = \delta_1 \delta_2 \delta_3 = \alpha \frac{1}{r} f(r) f'(r) = \alpha (C_1^2 - C_2^2 / r^4). \quad (19)$$

На рис. 2 показаны кривые распределения относительного объема по толщине сосудистой стенки при различных давлениях для 4-й стадии атеросклероза. Налицо наличие сильной сжимаемости стенки артерии, возрастающей с ростом внутрисосудистого давления. Характерным поведением является уменьшение, а не увеличение объема материала стенки.

На рис. 3 показаны аналогичные кривые для различных стадий атеросклероза при давлении 120 мм рт. ст. Заметно уменьшение объемной сжимаемости с ростом патологии.

Факт уменьшения объема материала стенки, отмеченный ранее авторами [2],

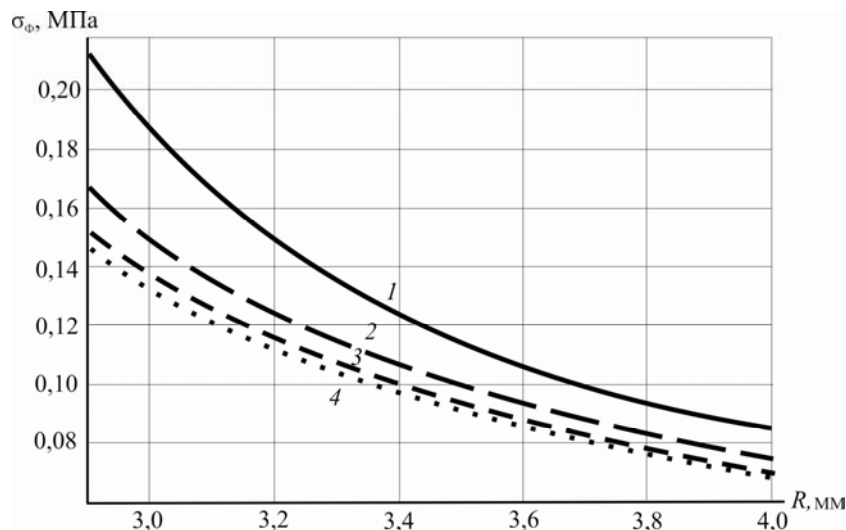


Рис. 1. Распределение тангенциальных напряжений (МПа) по толщине сосудистой стенки (мм) при давлении 120 мм рт. ст. для артерий, находящихся на различных стадиях атеросклероза (1–4 соответствуют 1–4-й стадиям)

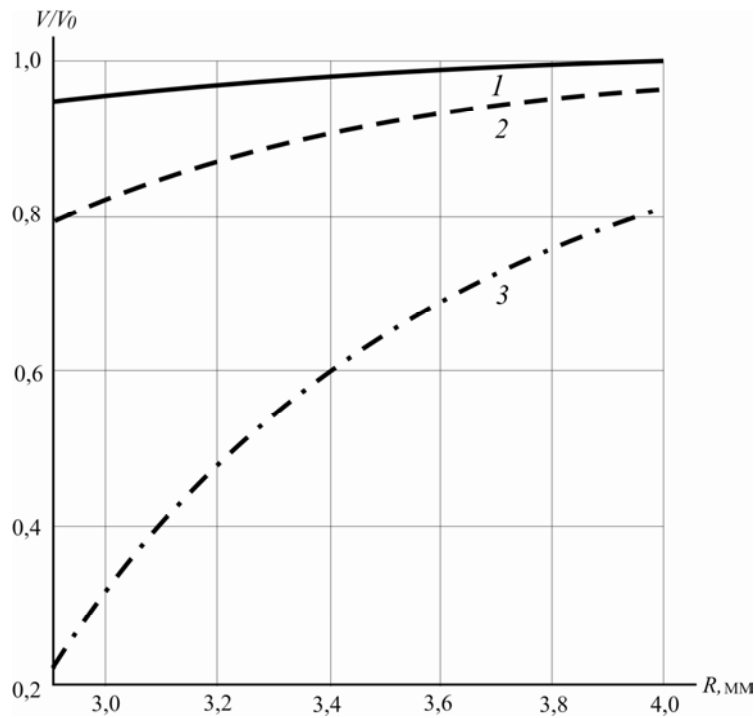


Рис. 2. Распределение относительного объема по толщине сосудистой стенки (мм) при различных давлениях: 1 – 80 мм рт. ст.; 2 – 120 мм рт. ст.; 3 – 200 мм рт. ст.)

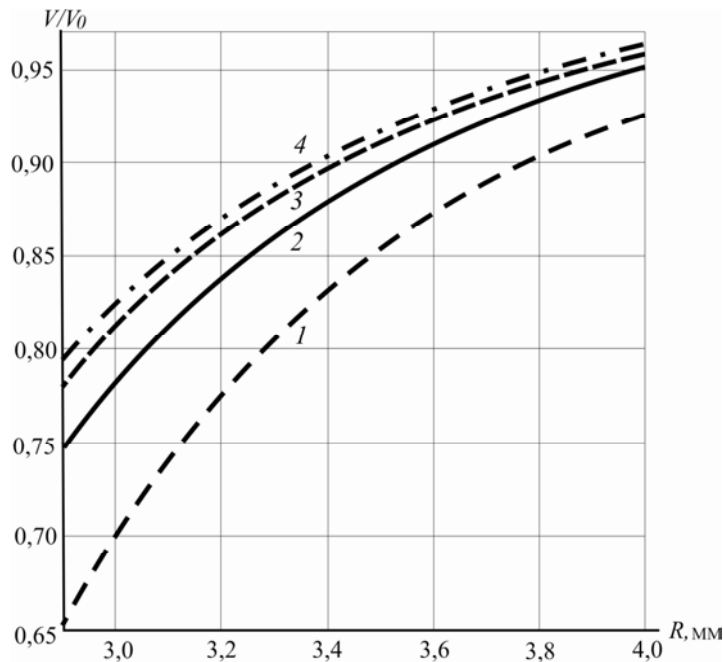


Рис. 3. Распределение относительного объема по толщине сосудистой стенки (мм) при давлении 120 мм рт. ст. для сосудов на разных стадиях атеросклероза (1–4 соответствуют 1–4-й стадиям)

свидетельствует о том, что артерия ведет себя подобно толстостенному цилиндрическому сосуду (а не подобно тонкостенной оболочке), когда эластичный внутренний и срединный слои раздавливаются под действием внутреннего давления о

более жесткую внешнюю адвентицию. Полученные результаты говорят о необходимости использования уравнений сжимаемых материалов при моделировании механического поведения кровеносных сосудов человека.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на основе аналитического решения А.И. Лурье получены конечные зависимости для вычисления параметров потенциала Джона при деформировании цилиндрического сегмента артерии под действием внутреннего давления. С помощью экспериментальных данных определены параметры потенциала для сонной артерии человека при различных стадиях атеросклероза. Показано, что полулинейный материал Джона лучше описывает кривые деформирования на последних стадиях атеросклероза. Дан анализ величины и характера сжимаемости стенки сонной артерии при различной патологии. Сделан вывод о необходимости учета эффекта сжимаемости при решении задач биомеханики кровеносных сосудов человека.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аптуков, В.Н.* Оценка влияния стадий атеросклероза на напряженно-деформированное состояние артериальных сосудов / В.Н. Аптуков, Л.А. Осоргина // Российский журнал биомеханики. – 2005. – Т. 9, № 4. – С. 45–51.
2. *Вагнер, Е.А.* Механическое поведение сосудистого анастомоза на склерозированных артериях и его моделирование / Е.А. Вагнер, С.Г. Суханов, В.Н. Аптуков // Механика композитных материалов. – 1982. – № 2. – С. 336–342.
3. *Лурье, А.И.* Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980.
4. *Пуриня, Б.А.* Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека / Б.А. Пуриня, В.А. Касьянов. – Рига: Зинатне, 1980.
5. *Tickner, E.G.* A theory for the static elastic behavior of blood vessels / E.G. Tickner, A.H. Sacks // Biorheology. – 1967. – Vol. 4, No. 4. – P. 151–168.

DETERMINATION OF POTENTIAL PARAMETERS FOR NONLINEAR COMPRESSED MATERIAL OF THE HUMAN CAROTID AT VARIOUS STAGES OF THE ATHEROSCLEROSIS

V.N. Aptukov, L.Yu. Osorgina (Perm, Russia)

In the previous paper [1], the authors estimated the Young's modules of sclerotic arteries at different stages of the atherosclerosis in the framework of linear model. The stress-strain state of a vessel's wall around the atherosclerosis plaque was analyzed. As a result, there was made a conclusion on the necessity to solve the given problem in nonlinear statement taking into account finite deformations. On the basis of analytical solution for the cylinder made from the semi-linear John's material proposed by A.I. Lurie, the method to determine the parameters of nonlinear compressible material potential is presented. The exact values of the parameters for the human carotid at different atherosclerosis stages are obtained.

Key words: biomechanics, sclerotic artery, nonlinear potential, compressibility.

Получено 15 мая 2008