

УДК 531/534: [57+61]

## **РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СРЕДНЕГО УША ПРИ ЕГО ТОТАЛЬНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ОСТАТКОВ ТИМПАНАЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ**

**С.А. Ермоченко<sup>1</sup>, Г.И. Михасев<sup>2</sup>, Л.Г. Петрова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра прикладной математики и механики Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, Беларусь, 210030, Витебск, Московский проспект, 33, e-mail: yermochenko@tut.by

<sup>2</sup> Кафедра теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета, Беларусь, 220030, Минск, проспект Независимости, 4, e-mail: mikhasev@bsu.by

<sup>3</sup> Кафедра оториноларингологии Белорусской медицинской академии последипломного образования, Беларусь, 220714, Минск, ул. Петруся Бровки, 3, e-mail: Petrova\_L@tut.by

**Аннотация.** Предлагается модель среднего уха человека при его тотальной реконструкции, позволяющая рассчитывать начальные напряжения, вызванные вводом протеза, замещающего звено «молоточек–наковальня». Целью исследований является выяснение влияния места установки протеза на восстановленной тимпанальной мембране на усилие в сочленении «протез–стремля», а также на смещение и поворот основания стремени косточки. При построении модели было учтено наличие остатков тимпанальной мембраны; реконструированная барабанная перепонка при этом моделировалась как упругая двухслойная кольцевая пластинка. В качестве метода решения уравнений анизотропной слоистой пластинки был выбран асимптотический метод с малым параметром, характеризующим близость центров основания протеза и реконструированной мембраны при их склеивании.

**Ключевые слова:** реконструированное среднее ухо, протез, двухслойная кольцевая пластина, математическая модель, напряженно-деформированное состояние, асимптотический метод.

### **1. ВВЕДЕНИЕ**

В оториноларингологии существует несколько видов хирургических операций по реконструкции среднего уха. Механические аспекты подобных операций и их классификация в зависимости от дефектов и степени патологии приведены в статье [11]. Наиболее трудным как с точки зрения техники операционного вмешательства, так и с точки зрения достижения ощутимых результатов по восстановлению или улучшению слуха является случай тотальной реконструкции. Часто данный вид операций предполагает реконструкцию тимпанальной мембраны (ТМ), а также замену цепи косточек «молоточек–наковальня» на имплантат – искусственный Т-образный протез [11] (рис. 1). Данный протез своим основанием склеивается с мембраной, а другим концом анкируется на головку стремени косточки в случае ее подвижности.

С целью фиксации протеза и достижения его устойчивости в послеоперационный период длина протеза  $l$  выбирается несколько больше расстояния от барабанной перепонки до головки стремени в нормальном состоянии. Наличие указанного положительного приращения длины протеза неизбежно влечет за собой

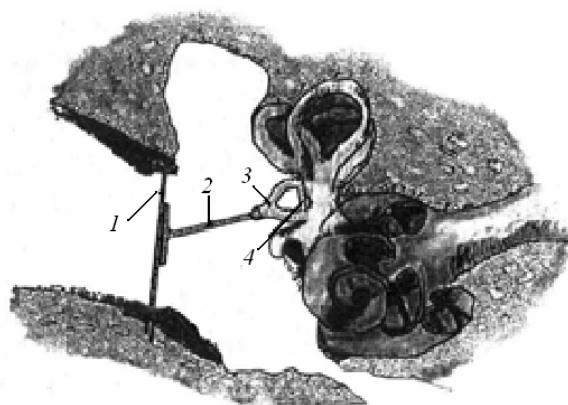


Рис. 1. Реконструированное среднее ухо: 1 – тимпанальная мембрана, 2 – Т-образный протез, 3 – стремя, 4 – основание стремени

появление начальных напряжений и деформаций в восстановленной ТМ, в связке овального окна, а также в сочленении «протез–стремля» [8]. Как следствие, данные напряжения приводят к смещению спектра собственных частот восстановленной колебательной системы среднего уха [4]. Степень искажения собственных частот может быть значительной и приводит к заметной потере порога восприимчивости звукового сигнала, присущего нормальному уху. Другими негативными последствиями выбора неоптимальной длины протеза и его неправильной пространственной ориентации может быть ограниченная подвижность основания стремени, а также «преждевременная» преднапряженность мышцы стремени (которая в норме имеет место лишь при большой интенсивности воспринимаемого звукового сигнала).

Напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха и его пространственная конфигурация сильно зависят от геометрических параметров протеза, от места его установки на барабанную перепонку и от способа реконструкции самой барабанной перепонки.

В случае тимпанопластики используются несколько видов Т-образных протезов, которые изготавливаются, как правило, из золота или титана. На рис. 2 изображены два типа протезов, выпускаемых фирмой *KURZ Medical, Inc* [10]. Протез типа «*CliP® Partial Prosthesis Dresden*» отличается тем, что имеет очень гибкий стержень, который при анкировании на головку стремени может быть изогнут с учетом индивидуальной архитектуры среднего уха пациента; для протеза «*Düsseldorf BELL Partial Prosthesis*» характерно эксцентричное расположение стержня относительно основания протеза.



Рис. 2. Типы используемых протезов: а, б – *CliP® Partial Prosthesis Dresden*, в – *Düsseldorf BELL Partial Prosthesis*

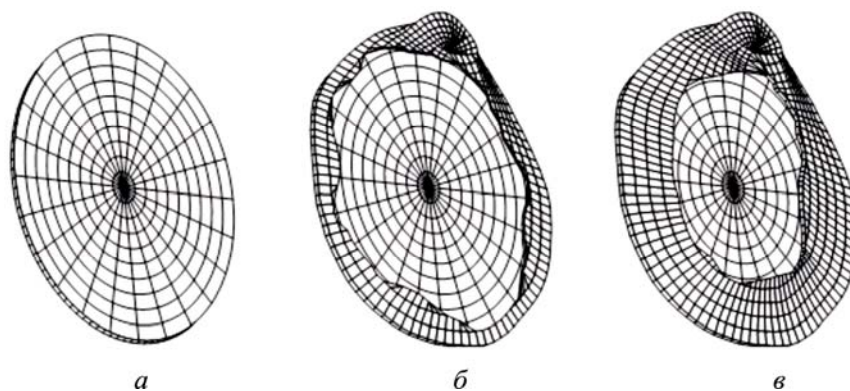


Рис. 3. Способы реконструкции барабанной перепонки с использованием хряща: *а* – техника «*cartilage plate*», *б* – техника «*large island*», *в* – техника «*small island*»

Данные протезы сильно различаются своими динамическими характеристиками (в частности, моментами инерции), а значит, выбор в пользу одного из них может сильно повлиять на успех операции. Следует отметить, что вопрос об оптимальном выборе протеза до сих пор остается неизученным. В нашем случае, при решении статической задачи о расчете начальных напряжений, выбор типа протеза является непринципиальным.

Перейдем к классификации техники реконструкции ТМ [15]. В зависимости от степени повреждения производят полную замену поврежденной мембраны имплантатом (рис. 3, *а*), а также наложение имплантата на остатки барабанной перепонки (рис. 3, *б*, *в*). Часто в качестве материала используется хрящевая ткань (*cavum conchae, tragus*).

Расчет начальных напряжений при тимпанопластике в случае полной реконструкции мембраны (см. рис. 3, *а*) был выполнен в работах [5, 9, 14]. При этом в статье [14], применяя асимптотический метод, исследовали случай, когда центр основания протеза расположен вблизи центра восстановленной мембраны. Наоборот, в работе [9] методом конечных разностей изучен случай эксцентричного крепления протеза и мембраны. В работе [5] показано, что наряду с основным устойчивым положением равновесия восстановленной колебательной системы среднего уха существуют смежные устойчивые и неустойчивые равновесные положения, характеризующиеся более высоким уровнем потенциальной энергии.

В настоящей работе мы будем рассматривать технику «*small island*» (см. рис. 3, *в*). В этом случае основание протеза практически полностью закрывает отверстие в поврежденной барабанной перепонке, что позволяет рассматривать восстановленную ТМ как двухслойную пластинку.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Не умаляя общности, любой из изображенных на рис. 2 протезов будем рассматривать как твердое тело, состоящее из двух частей: круглой абсолютно твердой пластинки радиусом  $b$  и гибкого стержня, наклоненного к плоскости основания (круглой пластинке) под углом  $\psi$ . Общую длину протеза обозначим через  $l$ .

Рассматривая технику реконструкции мембраны типа «*small island*» (см. рис. 3, *в*), восстановленную ТМ будем трактовать как двухслойную круглую пластинку. Слой живой ткани барабанной перепонки имеет сложную структуру и сам по себе состоит из четырех слоев. Наружный слой является продолжением кожи слухового прохода, а внутренний – продолжением слизистой оболочки среднего уха.

Ненатянутая часть барабанной перепонки, носящая название *pars flaccida* (или мембрана Шрапнелля), состоит только из этих двух слоев, в то время как натянутая часть *pars tensa* включает еще два дополнительных слоя: радиальные волокна под кожным слоем и нерадиальные волокна, расположенные между слоями радиальных волокон и слизистой оболочки. Учет анизотропии и неоднородности важен при исследовании динамики барабанной перепонки в норме [15]. В нашем (статическом) случае рассматривается упрощенная модель, согласно которой остаток тимпанальной мембраны трактуется как один однородный изотропный слой толщиной  $h_1$ . В качестве модуля упругости  $E_1$  и коэффициента Пуассона  $\sigma_1$  для данного слоя примем значения, совпадающие с соответствующими величинами для *pars tensa* барабанной перепонки в норме. Для хрящевого слоя (имплантата) аналогичные параметры –  $h_2, E_2, \sigma_2$ .

Считаем, что в результате склеивания реконструированной ТМ с основанием протеза по линии сопряжения (окружности) реализуются условия жесткой заделки для круглой пластинки. Таким образом, восстановленную ТМ можно моделировать как двухслойную кольцевую упругую пластинку с внешним и внутренним радиусами  $a$  и  $b$  соответственно.

Введем глобальную систему координат  $Oxyz$ , связанную с центром пластины (рис. 4). Здесь ось  $Oz$  направлена в сторону внешнего уха, а ось  $Oy$  – по линии “*malleus manubrium*”, то есть вдоль линии сопряжения молоточка с тимпанальной мембраной в норме. После фиксации протеза в полости среднего уха внутренний контур кольцевой пластины перемещается вдоль оси  $Oz$  на величину  $w_p$  и поворачивается вокруг некоторой оси  $O'O''$ , проходящей через центр основания протеза  $C(x_c, y_c, 0)$ , на угол  $\theta_p$  (рис. 5, а). Введем также систему координат  $Cx'y'z'$ , связанную с центром основания протеза, так чтобы ось  $Cy'$  совпала с осью поворота  $O'O''$ . Обозначим угол между осями  $Oy$  и  $Cy'$  через  $\phi$ . Заметим, что ориентация оси поворота  $O'O''$  протеза является неизвестной и подлежит определению.

Пусть  $S\xi\eta\zeta$  – система координат, связанная с основанием стремени в ненапряженном состоянии (то есть до анкирования протеза на стремя). Здесь точка  $S$  совпадает с центром основания стремени, а ось  $S\xi$  направлена к головке стремени косточки. Заметим, что ориентация стремени в пространстве зависит от индивидуальной архитектуры пациента. Однако будем считать, что направляющие косинусы осей системы координат  $S\xi\eta\zeta$  по отношению к глобальной системе координат  $Oxyz$  известны.

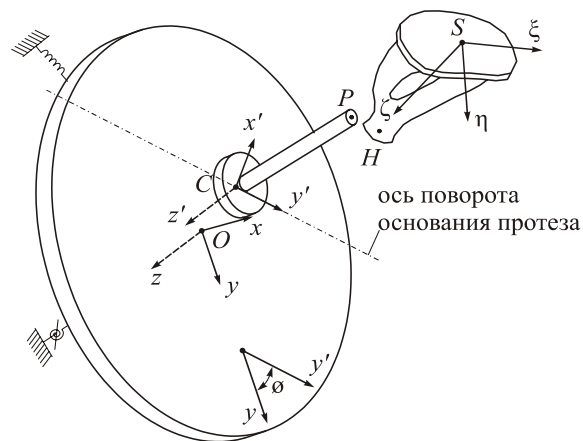


Рис. 4. Восстановленная ТМ, протез и стремя в ненапряженном состоянии

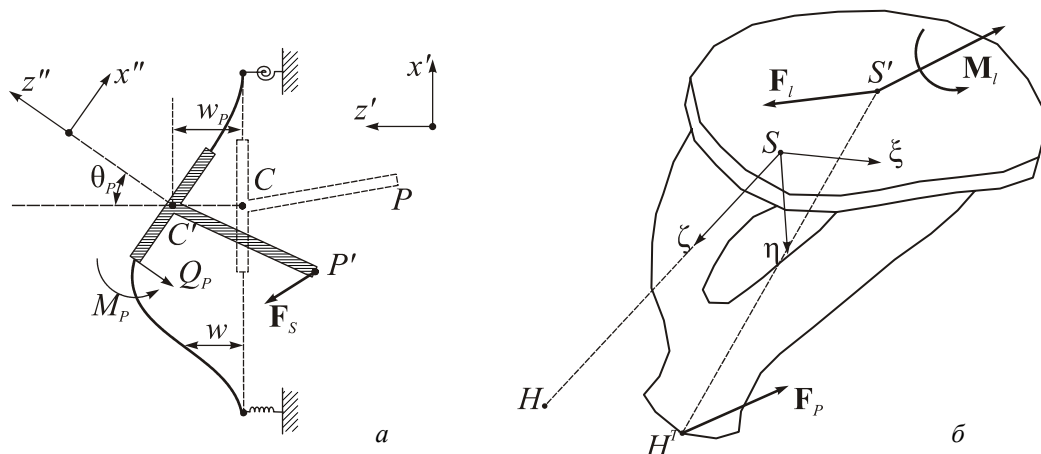


Рис. 5. Перемещения и повороты протеза (а) и стремени (б)

Проводимость звукового сигнала через реконструированную трансформационную систему среднего уха зависит от условий сопряжения протеза и стремени косточки. Как указывает Ойбер [8], жесткое крепление протеза на головке стремени косточки гарантирует передачу звукового сигнала с минимальной потерей энергии. С другой стороны, фиксация протеза на головке стремени должна быть в некоторой степени мягкой, исключающей возможный вывих стремени (*stapedial luxation*). Данный вывих наблюдается при усилии в сочленении «протез–стремля», равном  $350 \times 10^{-3}$  Н [12]. Даже если лепестки протеза (см. рис. 2) прижаты к головке стремени достаточно плотно, существует малая брешь между протезом и косточкой, которая впоследствии заполняется жидкостью или кровью. Следует также принять во внимание разность внешнего атмосферного давления и давления в полости среднего уха. Во время операции разность давлений равна нулю, однако в послеоперационный период оно возрастает и через 2–4 месяца достигает величины  $P_s = 20$  Па. Возрастающая разность давлений и наличие малой бреши в сочленении «протез–стремля» приводят к малым поворотам протеза и стремени. Данные повороты позволяют допускать (с некоторой долей погрешности) реализацию условий шарнирного соединения в соединении «протез–стремля». Обозначим через  $F_s(X_s, Y_s, Z_s)$  силу, действующую со стороны стремени на протез в данном соединении. Соответственно, сила, действующая со стороны протеза на стремя, есть величина  $F_p = -F_s$ .

После введения протеза в область среднего уха основание стремени переместится в точку  $S'$  с координатами  $(\xi_{s'}, \eta_{s'}, \zeta_{s'})$  и повернется на углы  $\alpha_\xi$ ,  $\alpha_\eta$ ,  $\alpha_\zeta$  вокруг соответствующих осей (см. рис. 5, б).

Двенадцать введенных параметров  $X_s$ ,  $Y_s$ ,  $Z_s$ ,  $w_p$ ,  $\theta_p$ ,  $\phi$ ,  $\xi_{s'}$ ,  $\eta_{s'}$ ,  $\zeta_{s'}$ ,  $\alpha_\xi$ ,  $\alpha_\eta$ ,  $\alpha_\zeta$  характеризуют напряженно-деформированное состояние и пространственную конфигурацию реконструированного среднего уха. Для нахождения этих параметров необходимо выписать 12 уравнений равновесия реконструированной системы среднего уха.

### 3. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНКИ

В полярной системе координат, связанной с  $Oxuz$ , введем прогиб пластинки  $w(r, \varphi)$ . В качестве уравнения равновесия слоистой пластинки рассмотрим уравнение [2]

$$(1 - c_1 \Delta) \Delta^2 \chi(r, \varphi) = P, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа в полярной системе координат,  $\chi(r, \varphi)$  – функция прогиба, связанная с самим прогибом  $w(r, \varphi)$  соотношением

$$w(r, \varphi) = (1 - c_2 \Delta) \chi(r, \varphi). \quad (2)$$

Здесь  $c_1 = \frac{\theta h^2}{\beta}$ ,  $c_2 = \frac{h^2}{\beta}$ ,  $h$  – общая толщина пластинки,  $P$  – разность атмосферного давления и давления в полости среднего уха, а параметры  $\theta$  и  $\beta$  зависят от количества слоев пластинки. В нашем случае приняты значения  $\theta = 0,02$ ,  $\beta = 6$ , соответствующие двухслойной пластинке. Заметим, что в первые послеоперационные дни разность давлений мала, так что можно принять  $P = 0$ , однако с течением времени она возрастает, достигая через 2–3 месяца величины  $P = 20$  Па.

Рассмотрим граничные условия для уравнений (1), (2). На внутреннем и внешнем контуре примем условие жесткой заделки [2]:

$$w|_{r=b} = w_p + b \cos \varphi \operatorname{tg} \theta_p, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=b} = \cos \varphi \operatorname{tg} \theta_p, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0, \quad (3)$$

$$w|_{r=\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{r=\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где

$$r = \Gamma(\varphi) = \sqrt{a^2 - \delta_c^2 \sin^2(\varphi + \phi - \varphi_c)} - \delta_c \cos(\varphi + \phi - \varphi_c), \quad (5)$$

$$\delta_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}, \quad \cos \varphi_c = x_c / \delta_c, \quad \sin \varphi_c = y_c / \delta_c.$$

Считаем, что центр основания протеза (точка  $C$ ) находится на относительно малом расстоянии от центра восстановленной мембраны (точка  $O$ ), так что параметр  $\mu = \delta_c / a$  можно считать малым. Разложим функцию (5) в ряд по степеням малого параметра  $\mu$ .

$$r = a \left[ 1 - \mu \cos(\varphi + \phi - \varphi_c) - \mu^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2(\varphi + \phi - \varphi_c) \right) + O(\mu^3) \right]. \quad (6)$$

Здесь и ниже символ  $O(\mu^v)$  означает величину, имеющую порядок  $\mu^v$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Следуя [14], решение уравнения (1) будем искать в виде асимптотического разложения по степеням  $\mu$ , представив каждый член данного разложения в виде ряда Фурье

$$\chi(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \chi_i(r, \varphi), \quad (7)$$

$$\chi_i(r, \varphi) = \chi_i^0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \chi_{ik}^c(r) \cos k(\varphi + \phi - \varphi_c) + \chi_{ik}^s(r) \sin k(\varphi + \phi - \varphi_c) \right]. \quad (8)$$

Подставим (7) в уравнение (1) и граничные условия (3), (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ . В результате получим последовательность краевых задач относительно функций  $\chi_i$ . При этом заметим, что в силу разложения (6) граничные условия относительно функции  $\chi_i$  на внешней кромке (4) будут однородными при  $i=0$  и неоднородными при  $i \geq 1$ . Решая каждую из возникающих краевых задач в виде (8), приходим к соотношениям относительно неизвестных функций  $\chi_i^0, \chi_{1k}^c, \chi_{1k}^s$ , фигурирующих в (8),

$$\chi_i^0(r) = A_i^0 + B_i^0 r^2 + C_i^0 \ln r + D_i^0 r^2 \ln r + E_i^0 I_0\left(\frac{r}{\sqrt{c_1}}\right) + F_i^0 K_0\left(\frac{r}{\sqrt{c_1}}\right),$$

$$\chi_{i1}^{c,s}(r) = A_{i1}^{c,s} r + B_{i1}^{c,s} r^3 + C_{i1}^{c,s} \frac{1}{r} + D_{i1}^{c,s} r \ln r + E_{i1}^{c,s} I_1\left(\frac{r}{\sqrt{c_1}}\right) + F_{i1}^{c,s} K_1\left(\frac{r}{\sqrt{c_1}}\right), \quad (9)$$

$$\chi_{ik}^{c,s}(r) = A_{ik}^{c,s} r^k + B_{ik}^{c,s} r^{k+2} + C_{ik}^{c,s} \frac{1}{r^k} + D_{ik}^{c,s} \frac{1}{r^{k-2}} + E_{ik}^{c,s} I_k\left(\frac{r}{\sqrt{c_1}}\right) + F_{ik}^{c,s} K_k\left(\frac{r}{\sqrt{c_1}}\right).$$

Здесь  $k = 2, 3, \dots$ ;  $I_n(x)$ ,  $K_n(x)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, а неизвестные коэффициенты находятся из граничных условий (3),(4) с учетом (6).

Найденный в соответствии с (2), (7)–(9) прогиб пластинки позволяет определить возникающие в срединной поверхности перерезывающие силы и изгибающие моменты.

$$Q = D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \quad (10)$$

Здесь  $D = E h^3 / [12(1 - \sigma^2)]$  и  $h$  – усредненная цилиндрическая жесткость и общая толщина двухслойной пластинки соответственно, а  $E, \sigma$  – приведенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона, определяемые по формулам [2],

$$\sigma = \frac{\frac{E_1 h_1 \sigma_1}{1 - \sigma_1^2} + \frac{E_2 h_2 \sigma_2}{1 - \sigma_2^2}}{\frac{E_1 h_1}{1 - \sigma_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1 - \sigma_2^2}}, \quad E = \frac{1 - \sigma}{h} \left( \frac{E_1 h_1}{1 - \sigma_1^2} + \frac{E_2 h_2}{1 - \sigma_2^2} \right). \quad (11)$$

Напомним, что стоящие в (11) величины с индексами 1 соответствуют живой ткани остатков тимпанической мембраны, а параметры с индексами 2 – используемому для реконструкции мембраны хрящу.

Интегрируя перерезывающие силы и изгибающие моменты (10) по внутреннему контуру  $r = b$ , получим результирующие силы и моменты, действующие со стороны реконструированной мембраны на основание протеза (см. рис 5, а):

$$Q_p = -2\pi b D \left[ \kappa_1 w_p + \mu \kappa_2 \cos(\phi - \phi_c) \sin \theta_p + O(\mu^2) \right],$$

$$M_p = -\pi b D \left[ \kappa_3 \sin \theta_p w_p + \mu \kappa_4 \cos(\phi - \phi_c) w_p + O(\mu^2) \right], \quad (12)$$

$$M_Q = -\pi b D \left[ \kappa_5 w_p + \mu \kappa_6 \cos(\phi - \phi_c) \sin \theta_p + O(\mu^2) \right].$$

Здесь  $M_Q$  – главный вектор моментов перерезывающих сил  $Q$  относительно оси поворота  $Sy'$  (см. рис. 4) основания протеза, а соотношения для коэффициентов  $\kappa_i$  в силу их громоздкости здесь не выписаны.

#### 4. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОТЕЗА

Поскольку протез совершает перемещение и поворот в плоскости, перпендикулярной оси  $Sy'$ , условия его равновесия могут быть записаны в виде трех скалярных уравнений. В силу того, что тангенциальные перемещения реконструированной пластинки в нашей (линейной) постановке во внимание не принимаются, мембранные усилия, действующие со стороны пластинки на основание протеза, могут быть проигнорированы. Таким образом, уравнение равновесия протеза в направлении оси  $x''$  в данном приближении может быть опущено. Оставшиеся два уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} (X_s \cos \phi + Y_s \sin \phi) \sin \theta_p - Z_s \cos \theta_p - Q_p = 0, \\ l \left[ (X_s \cos \phi + Y_s \sin \phi) (\cos \psi \cos(\phi - \phi_p) \sin \theta_p - \sin \psi \cos \theta_p) - \right. \\ \left. - Z_s (\cos \psi \cos(\phi - \phi_p) \cos \theta_p + \sin \psi \sin \theta_p) \right] + M_p + M_Q = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

К уравнениям (13) необходимо добавить условие того, что сила  $F_s$  лежит в плоскости поворота протеза

$$Y_s \cos \phi - X_s \sin \phi = 0. \quad (14)$$

#### 5. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ СТРЕМЕНИ

Геометрическое положение стремени в ненапряженном состоянии (до введения протеза) задается двумя точками  $H(\xi_H, \eta_H, \zeta_H)$  и  $S(\xi_S, \eta_S, \zeta_S)$  (см. рис. 5). Тогда длина стремени

$$l_s = \sqrt{(\xi_H - \xi_S)^2 + (\eta_H - \eta_S)^2 + (\zeta_H - \zeta_S)^2}. \quad (15)$$

После введения протеза длина стремени не изменится. Это можно записать соотношением

$$l_s = \sqrt{(\xi_{H'} - \xi_{S'})^2 + (\eta_{H'} - \eta_{S'})^2 + (\zeta_{H'} - \zeta_{S'})^2}, \quad (16)$$

где  $H'(\xi_{H'}, \eta_{H'}, \zeta_{H'})$  – новое положение головки стремени, которое будет совпадать с координатами конца стержня протеза.

Углы поворота стремени вокруг координатных осей находятся из формул

$$\begin{aligned} \sin \alpha_\xi &= \frac{(\zeta_H - \zeta_S)(\eta_{H'} - \eta_{S'}) - (\eta_H - \eta_S)(\zeta_{H'} - \zeta_{S'})}{(\zeta_H - \zeta_S)^2 + (\eta_H - \eta_S)^2}, \\ \sin \alpha_\eta &= \frac{(\xi_H - \xi_S)(\zeta_{H'} - \zeta_{S'}) - (\zeta_H - \zeta_S)(\xi_{H'} - \xi_{S'})}{(\xi_H - \xi_S)^2 + (\zeta_H - \zeta_S)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$



Заметим, что угол поворота  $\alpha_\zeta$  стремени вокруг собственной оси  $\zeta$  здесь не выписан; он может быть найден из уравнений равновесия стремени (см. ниже).

*Békésy* [7] удалось экспериментально показать, что общая жесткость внутреннего уха зависит как от жесткости связки овального окна, так и от жесткости мембраны круглого окна, которое расположено на дне *scala tympani*. При этом у некоторых людей почти вся упругость приходится на кольцевидную связку стремени, в то время как у других сила упругого противодействия возникает только в мембране круглого окна [1]. В нашей работе рассматривается первый случай, когда силы упругости связок овального окна являются определяющими.

В работе [6] экспериментально получена матрица, описывающая упругие свойства связок овального окна,

$$C_{RB} = c_{ref} \begin{bmatrix} 51,4 & -0,24 & -1,37 & 0,04 & 9,66 & 0,35 \\ -0,24 & 49,2 & -0,6 & -7,87 & -1,01 & -8,4 \\ -1,37 & -0,6 & 27,8 & 0,37 & 17,1 & 0,96 \\ 0,04 & -7,87 & 0,37 & 8,29 & 0,58 & 2,6 \\ 9,66 & -1,01 & 17,1 & 0,58 & 29,7 & 1,6 \\ 0,35 & -8,4 & 0,96 & 2,6 & 1,6 & 12,9 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где коэффициент  $c_{ref}$  у разных людей может варьироваться от  $0,035 \text{ Нмм}^{-1}$  до  $0,05 \text{ Нмм}^{-1}$ . Здесь принято среднее значение  $c_{ref} = 0,0425 \text{ Нмм}^{-1}$ . Произведение матрицы (6) на вектор перемещений и поворотов стремени определяет вектор соответствующих сил и моментов, возникающих со стороны связки овального окна,

$$(f_{l\xi}, f_{l\eta}, f_{l\zeta}, m_{l\xi}, m_{l\eta}, m_{l\zeta})^T = C_{RB} (\xi_{s'}, \eta_{s'}, \zeta_{s'}, \alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta)^T, \quad (19)$$

где  $\mathbf{F}_l(f_{l\xi}, f_{l\eta}, f_{l\zeta})$ ,  $\mathbf{M}_l(m_{l\xi}, m_{l\eta}, m_{l\zeta})$  – силы и моменты, действующие со стороны связок овального окна (см. рис. 5).

Тогда уравнения равновесия стремени запишутся в следующем виде:

$$f_{l\xi} - f_{p\xi} = 0, \quad f_{l\eta} - f_{p\eta} = 0, \quad f_{l\zeta} - f_{p\zeta} = 0, \quad (20)$$

$$m_{l\xi} + \eta_H \cdot f_{p\zeta} - \zeta_H \cdot f_{p\eta} = 0, \quad m_{l\eta} + \zeta_H \cdot f_{p\xi} - \xi_H \cdot f_{p\zeta} = 0, \quad m_{l\zeta} = 0, \quad (21)$$

где  $f_{p\xi}, f_{p\eta}, f_{p\zeta}$  – проекции силы  $\mathbf{F}_p$ , действующей со стороны протеза на стремя, на оси  $\xi, \eta, \zeta$  соответственно (см. рис. 5, б).

Из последнего уравнения в (21) находится угол поворота стремени  $\alpha_\zeta$  вокруг собственной оси после ввода протеза. Наши последующие расчеты показывают, что данный угол является очень маленьким и может быть принят во внимание лишь при очень больших перемещениях стремени, близких к его вывиху. Данный результат хорошо согласуется с данными [3], согласно которым стременинная косточка начинает закручиваться вокруг своей оси лишь при большой интенсивности падающей звуковой волны.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Выведенные двенадцать уравнений (13), (14), (16)–(21) позволяют найти параметры  $X_s, Y_s, Z_s, w_p, \theta_p, \phi, \xi_{s'}, \eta_{s'}, \zeta_{s'}, \alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta$ , характеризующие

напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха и его пространственную конфигурацию после ввода протеза.

На рис. 6 изображены точки центра основания протеза на восстановленной ТМ (точки 1–6); при этом точки 1–3 лежат на линии  $OC_m$ , совпадающей по направлению с “*malleus manubrium*”, а точки 4–6 – на линии  $OC_p$ . Здесь  $O$  – центр восстановленной ТМ,  $C_m$  – средняя точка на “*malleus manubrium*”, а  $C_p$  – проекции головки стремени в ненапряженном состоянии на мембрану (точка “*posterior point*”). Были рассмотрены следующие значения параметра  $\mu$ , характеризующего эксцентриситет соединения основания протеза и ТМ:  $\mu = 0,02$  для точек 1 и 4;  $\mu = 0,05$  для точек 2 и 5;  $\mu = 0,1$  для точек 3 и 6. Расчеты выполнялись при  $P = 0$  Па,  $a = 5$  мм,  $b = 1,5$  мм,  $h_1 = h_2 = 0,3$  мм,  $E_1 = 3$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,4$ ,  $E_2 = 3,4$  Н/мм<sup>2</sup>. В качестве координат головки стремени (точка  $H$ ) и центра ее основания (точка  $S$ ) (см. рис 5, б) до установки протеза в глобальной системе координат  $Oxyz$  были рассмотрены следующие значения:  $x_H = 2,29$  мм,  $y_H = -1,65$  мм,  $z_H = -3,32$  мм;  $x_S = 3,64$  мм,  $y_S = -1,5$  мм,  $z_S = -6,5$  мм. Приведенные параметры соответствуют архитектуре среднего уха среднестатистического взрослого человека.

На рис. 7 представлены графики зависимости модуля силы  $F_s$  в соединении «протез–стремля», перемещения  $\delta_s = \sqrt{\xi_{s'}^2 + \eta_{s'}^2 + \zeta_{s'}^2}$  основания стремени и угла его поворота  $\alpha_s = \arccos(\cos \alpha_\xi \cos \alpha_\eta)$  как функции приращения длины протеза  $\Delta l = l - l_{\min}$  для различных точек установки основания протеза на восстановленной ТМ. Здесь  $l_{\min}$  – расстояние от головки стремени в свободном ненапряженном состоянии до точки крепления основания протеза на ТМ. Кривые на рис. 7, а, б, в соответствуют случаю, когда центр основания протеза лежит на линии “*malleus manubrium*” (в точках 1, 2, 3), а линии на рис 7, г, д, е – случаю, когда центр основания протеза находится между центром ТМ и точкой “*posterior point*” ( в точках 4, 5, 6). Расчеты выполнялись для значений приращения длины протеза в интервале  $0 \leq \Delta l \leq 0,875$ . При этом, если усилие  $F_s$  достигало значения  $250 \times 10^{-3}$  Н, то расчеты прекращались (напомним, что при  $F_s \geq 350 \times 10^{-3}$  Н имеет место вывих стремени).

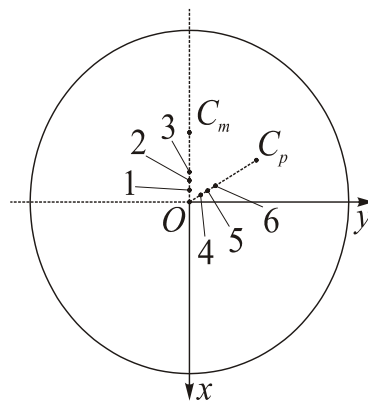


Рис. 6. Точки установки протеза на восстановленной ТМ

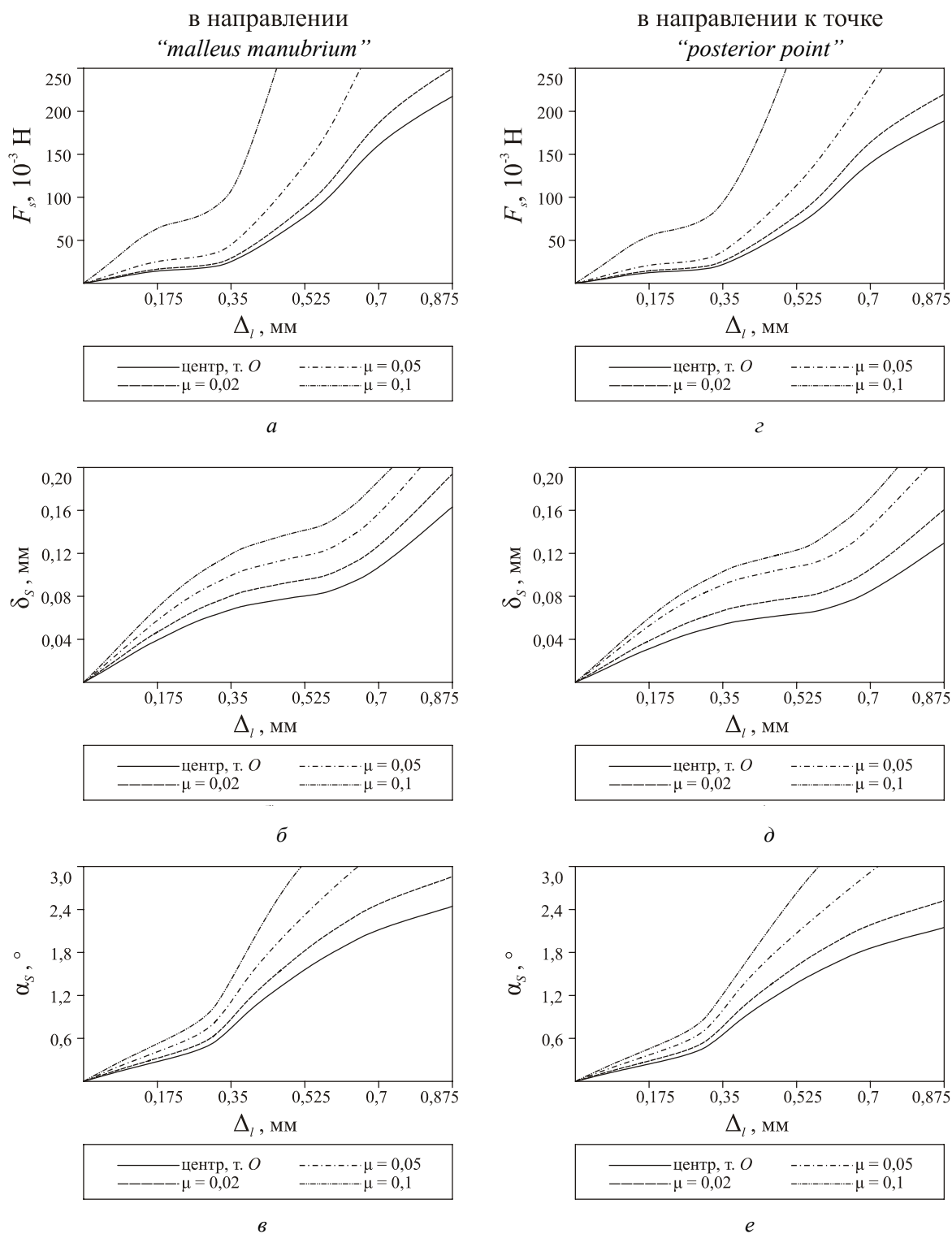


Рис. 7. Модуль силы  $F_s$ , перемещение основания стремени  $\delta_s$  и угол поворота стремени  $\alpha_s$  как функции параметра  $\Delta l$  для различных положений основания протеза на восстановленной ТМ

Как и следовало ожидать, с увеличением параметра  $\Delta l$  (при фиксированных точке крепления стремени с мембраной и угле  $\psi$  наклона стержня протеза к его плоскости) все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние системы, возрастают. Видно, что в интервале  $0 \leq \Delta l < 0,175$  зависимость  $F_s$ ,  $\delta_s$ ,  $\alpha_s$  от параметра  $\Delta l$  носит линейный характер, однако дальнейшее увеличение длины протеза

(о чем свидетельствуют кривые для  $F_S$  на рис. 7,  $a-z$ ) делает всю систему существенно нелинейной. При этом сравнение кривых, соответствующих различным параметрам  $\mu$  (при фиксированном  $\Delta l$ ), указывает на то, что свойство нелинейности наступает тем раньше, чем дальше крепится основание протеза от центра ТМ. Объясняется данный эффект увеличением жесткости всей системы среднего уха в случае попытки установки основания протеза в точки мембраны, удаленные от ее центра. Таким образом, в случае крепления протеза в точку  $C_p$  (“*posterior point*”) или в близкие к ней точки, когда длина протеза может быть минимальной, неправильный подбор длины протеза может привести к значительным начальным напряжениям, что является крайне нежелательным. Аналогичный вывод можно сделать и относительно точки  $C_m$  – средней точки на линии “*malleus manubrium*”. Другими словами, напряженно-деформированное состояние реконструированной системы среднего уха является наиболее чувствительным, если основание протеза устанавливается на мембране в местах, близких к точкам  $C_p$  и  $C_m$ . Наиболее предпочтительными с точки зрения минимизации начальных напряжений являются точки крепления протеза, близкие к точке  $O$  – центру ТМ. Данный вывод хорошо согласуется с результатами работы [13], в соответствии с которыми наилучшая трансформация энергии звукового сигнала во внутреннее ухо наблюдается в случае, когда протез крепится как можно ближе к центру ТМ.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования выполнены по заданию «Механика 4.09» Государственной комплексной программы научных исследований ГКПНИ «Механика» в Республике Беларуси на 2006–2010 гг.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вульштейн, Х. Слухоулучшающие операции / Х. Вульштейн. – М.: Медицина, 1972.
2. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988.
3. Кобрак, Г. Среднее ухо / Г. Кобрак. – М.: Гос. изд-во мед. лит., 1963.
4. Любина, Е.А. Влияние сил натяжения восстановленной барабанной перепонки, вызванных введением протеза, на собственные частоты колебательной системы реконструированного среднего уха / Е.А. Любина, Г.И. Михасев // Механика–2007: сб. науч. тр. III Белорусского конгресса по теорет. и прикл. механике / под общ. ред. акад. М.С. Высоцкого, Минск, 16–18 окт., 2007; ОИМ НАН Беларуси. – Минск, 2007. – С. 399–405.
5. Михасев, Г.И. Об устойчивости положения равновесия вводимого протеза при реконструкции среднего уха / Г.И. Михасев, С.А. Ермоchenko // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. / БНТУ. – Минск, 2007. – № 22. – С. 63–71.
6. Beer, H.-J. Modeling of components of the human middle ear and simulation of their dynamic behavior / H.-J. Beer, M. Bornitz, H.-J. Hardke, R. Schmidt, G. Hofman, U. Vogel, T. Zahnert, K.-B. Hüttenbrink // *Audiol. Neurootol.* – 1999. – Vol. 4. – P. 156–162.
7. Békésy, G. The structure of the middle ear and the hearing of one’s own voice by bone conduction / G. Békésy // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1949. – Vol. 21. – P. 217–232.
8. Eiber, A. On the coupling of prosthesis to the middle ear structure and its influence on sound transfer / A. Eiber, H.-G. Freitag, G. Schimanski, H.P. Zenner // *The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear* (edited by Rosowski, J. J., Merchant, S. N.). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publication, 2000. – P. 297–308.
9. Ermochenko, S. Finite Difference Method in Research of the Strain-Stress State of the Reconstructed Middle Ear / S. Ermochenko, G. Mikhasev // *Proceedings of the Int. Conf. on Computational Biomechanics and Biology*, Sept. 10–13, 2007, Plzen, Czech Republic, University of West Bohemia. – P. 101–103.
10. <http://www.kurz.med.com>

11. *Hüttenbrink, K.-B.* Mechanical aspects of middle ear reconstruction // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (edited by Hüttenbrink, K.-B.). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165–168.
12. *Hüttenbrink, K.-B.* Modification in prosthesis design for improved attachment onto the stapes head / K.-B. Hüttenbrink, Th. Zahnert, G. Hofmann // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (edited by Hüttenbrink, K.-B.). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 229–232.
13. *Koike, T.* Analysis of the finite-element method of transfer function of reconstructed middle ear and their postoperative changes / T. Koike, H. Wada, T. Kobayashi // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (edited by Rosowski, J. J., Merchant, S. N.). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 309–320.
14. *Mikhasev, G.* Calculation of the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Journal of Biomechanics: Abstracts of the 5th World Congress of Biomechanics, Munich, Germany, 29 July–4 August 2006. – 2006. – Vol. 39, Supplement 1. – P. S389.
15. *Murbe, D.* Assessment of vibration characteristics of different cartilage reconstruction techniques for the tympanic membrane using scanning laser vibrometry / D. Murbe, Th. Zahnert, M. Bornitz, K.-B. Hüttenbrink // The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear (edited by Rosowski, J. J., Merchant, S. N.). – The Hague, The Netherlands: Kugler Publications, 2000. – P. 321–329.

## **CALCULATION OF THE STRAIN–STRESS STATE OF THE MIDDLE EAR UNDER ITS TOTAL RECONSTRUCTION TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF THE TYMPANIC MEMBRANE REMNANTS**

**S. A. Ermochenko, G.I. Mikhasev, L.G. Petrova (Vitebsk, Minsk; Belarus)**

The model of the human middle ear under its total reconstruction allowing evaluating initial stresses caused by introducing a prosthesis replacing the “malleus–incus” chain is proposed. The goal of this study is to clear up the influence of the prosthesis installation place at the rehabilitated tympanic membrane on both stresses in the “prosthesis–stapes” articulation and the dislocation and rotation of the stapes footplate. The presence of the tympanic membrane remnants has been taken into account under simulation, the reconstructed tympanic membrane being modeled as an elastic two-layer annular plate. As a method for solving equations of an anisotropic layered plate, the asymptotic method with a small parameter characterizing nearness of the centers of the prosthesis footplate and the reconstructed membrane under their pasting together has been chosen.

**Key words:** reconstructed middle ear, prosthesis, two-layer annular plate, mathematical model, strain–stress state, asymptotic method.

*Получено 21 июля 2008*