

УДК 531/534: [57+61]

## **ДИНАМИКА СПОРТИВНЫХ СНАРЯДОВ И СПОРТСМЕНОВ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ**

**Р.Н. Рудаков**

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: rrn@theormech.pstu.ac.ru

**Аннотация.** Работа посвящена оптимизации различных спортивных движений в сопротивляющейся среде. На спортивные снаряды и на спортсменов при их движении действуют аэродинамические силы: лобовое сопротивление и подъёмная сила. В настольном теннисе, как показали расчёты, наиболее опасной является подача с сильным верхним вращением шарика (накат). Приведены дифференциальные уравнения движения центра масс мяча, которые справедливы и для других видов спорта. Так, в футболе из решения краевой задачи следует, что при подаче углового боковое вращение мяча позволяет поразить ворота соперника. В прыжках с трамплина большое влияние на полёт оказывает угол наклона лыж к скорости движения центра масс системы лыжник–лыжи. Найден угол, при котором дальность прыжка максимальна. В слаломе оптимизированы основные параметры слаломной траектории с учётом лобового сопротивления и трения скольжения. Предполагается дальнейшее исследование динамики спортсменов и спортивных снарядов, в частности, математическое моделирование игры в гольф, где мяч пролетает большие расстояния.

**Ключевые слова:** биомеханика спортивных движений, сопротивляющаяся среда, оптимизация.

### **Введение**

Во многих видах спорта существенное влияние на движение спортсменов и спортивных снарядов оказывают аэродинамические силы, возникающие при движении тел в воздушной среде. Исследованию движения спортивных мячей посвящены работы [4–7, 16], прыжков с трамплина – [3, 14, 15, 17], горнолыжного спорта – [8–11], опубликованные в «Российском журнале биомеханики».

Центральной задачей исследований является определение аэродинамических коэффициентов. Для спортивных мячей использованы известные зависимости этих коэффициентов от параметров движения. Для прыгунов с трамплина и горнолыжников аэродинамические коэффициенты найдены авторами публикаций [3, 8–11, 14, 15, 17]. В работе [6] представлена новая методика обработки видеозаписей спортивных движений, связанная с интегрированием дифференциальных уравнений движения центра масс движущегося объекта.

Целью исследований движения спортивных объектов в сопротивляющейся среде является нахождение оптимальных режимов движения.

## 1. Динамика шарика в настольном теннисе

### 1.1. Система сил, действующих на шарик

Для примера рассмотрим плоскую траекторию движения шарика [4] (аналогичное рассмотрение верно и для движения мяча). На рис. 1 приведена траектория движения центра масс шарика в вертикальной плоскости  $Oxy$ . Однако приведенные ниже уравнения позволяют исследовать и пространственные движения.

Кинематические характеристики движения – вектор скорости поступательного движения  $\mathbf{V}$ , направленный по касательной к траектории центра масс, и вектор угловой скорости  $\omega$ , направленный по оси  $z$  в случае подрезки – обратного вращения мяча.

При полете на шарик действуют следующие силы: сила тяжести  $P=mg$ , где  $m$  – масса шарика,  $g$  – ускорение свободного падения; лобовое сопротивление  $R$  и подъемная сила  $Q$ .

$$R = \frac{1}{2} \rho C_D S V^2, \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho C_L S V^2, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность воздуха,  $S$  – площадь наибольшего сечения шара, перпендикулярная  $\mathbf{V}$ ,  $C_D$  и  $C_L$  – аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы; момент сил трения относительно центра масс не учитывался ввиду его малости.

Сила тяжести  $\mathbf{P}$  направлена вертикально вниз. Вектор силы лобового сопротивления  $\mathbf{R}$  направлен противоположно вектору скорости  $\mathbf{V}$ .

$$\mathbf{R} = -\frac{\mathbf{V}}{V}. \quad (3)$$

Сложнее обстоит дело с определением направления подъемной силы  $\mathbf{Q}$ , обусловленной эффектом Магнуса. Теоретического обоснования этого эффекта нет, однако основной механизм возникновения поперечной силы состоит в том, что при полете шарика встречный поток воздуха взаимодействует с потоком воздуха, приводимого в движение вращающимся шариком.

В зоне смешанных потоков образуется область повышенного давления. Так, при полете шарика после подрезки область смещения находится вблизи нижней части шарика, и поэтому возникает подъемная сила. Термин «подъемная сила» используется и при других направлениях поперечной аэродинамической силы. В эксперименте подъемная сила измеряется как сила, направленная перпендикулярно векторам  $\omega$  и  $\mathbf{V}$ . Из опыта также известно, что она направлена в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора  $\omega$  к вектору  $\mathbf{V}$  виден происходящим против часовой стрелки.

Это позволяет применить правило векторного произведения двух векторов

$$\mathbf{Q} = Q \frac{\omega \times \mathbf{V}}{|\omega \times \mathbf{V}|}, \quad (4)$$

где прямые скобки означают модуль векторного произведения. Для случая подрезки вектор  $\omega$  направлен параллельно оси  $z$  (см. рис. 1) и из (4) следует

$$Q_x = -Q \frac{V_y}{V},$$

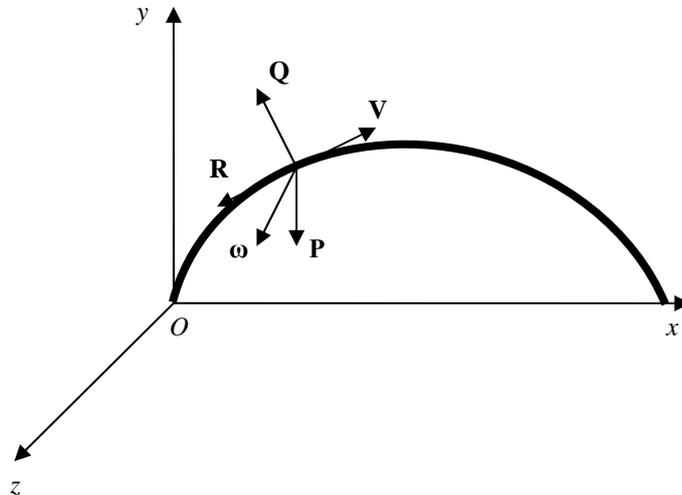


Рис.1. Система сил, действующих на теннисный шарик при его обратном вращении

$$Q_y = -Q \frac{V_x}{V}, \quad (5)$$

$$Q_z = 0.$$

Для наката знаки сил противоположны. При произвольном вращении могут быть отличны от нуля все три проекции подъемной силы.

## 1.2. Аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы

Определение аэродинамических коэффициентов – центральная задача исследования движения тел в сплошных средах. Для шара при отсутствии вращения коэффициент лобового сопротивления экспериментально найден в большом диапазоне изменения скоростей [12], а при наличии вращения [13] – в более узкой области параметров.

### 1.2.1. Отсутствие вращения

Полагаем, что после приема мяч летит поступательно или медленно вращается. Эффект Магнуса невелик, и можно принять коэффициент  $C_L=0$ . Для поступательного движения шара известна зависимость аэродинамического сопротивления  $C_D$  от числа Рейнольдса ( $Re$ ) [12] ( $Re=Vd/\nu$ ,  $d$  – диаметр шарика,  $\nu$  – кинематическая вязкость воздуха).

Эта зависимость приведена на рис. 2. На графике видно, что в области чисел  $Re$  от 1000 до 250 000 коэффициент лобового сопротивления  $C_D$  – практически постоянная величина, равная приблизительно 0,45. Для теннисного шарика, летящего в воздухе ( $d = 0,038$  м,  $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с), приведенные значения чисел Рейнольдса соответствуют скоростям от 0,4 м/с до 100 м/с, что с большим запасом охватывает диапазон скоростей шарика при игре в настольный теннис. Таким образом, при отсутствии вращения шарика для расчетов можно принять  $C_D=0,45$ ,  $C_L=0$ . Для волейбольного мяча [5] приняты такие же коэффициенты, но в футболе [16] учтено явление резкого падения сопротивления при больших скоростях движения.

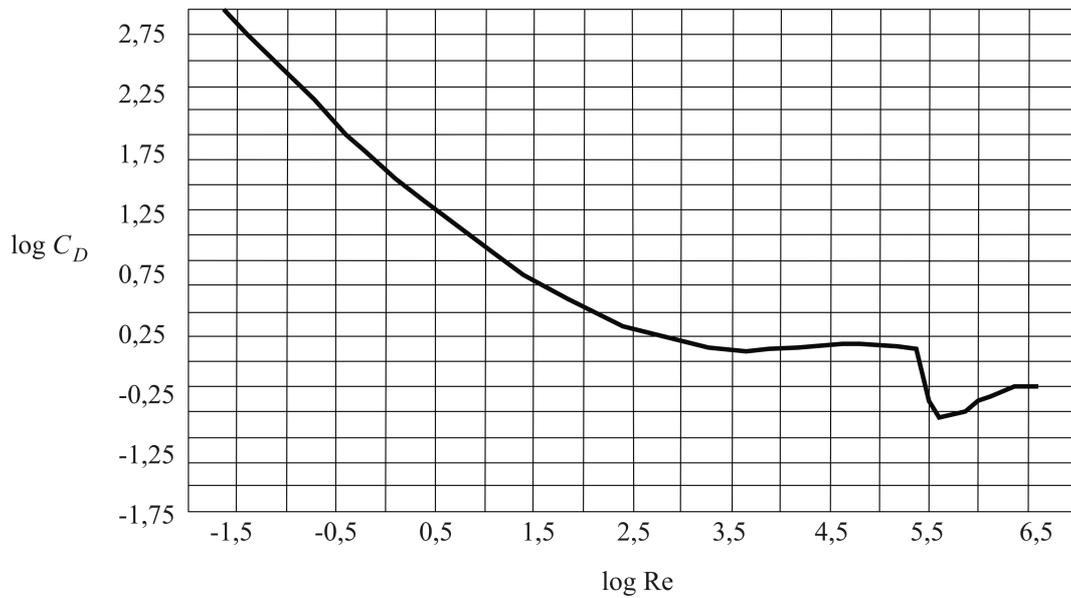


Рис. 2. Зависимость аэродинамического коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса (Re)

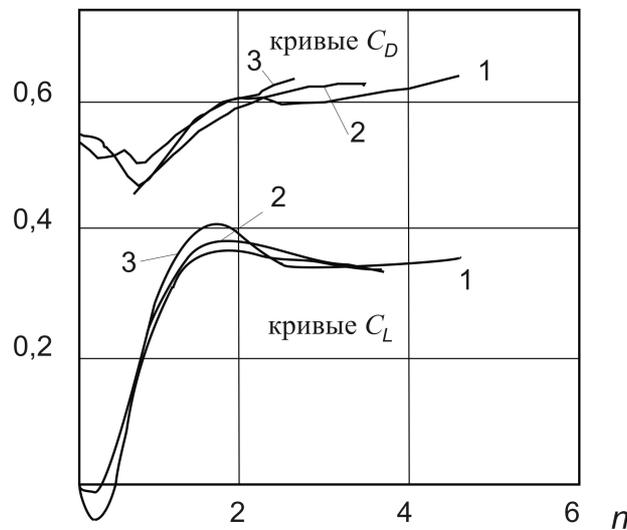


Рис. 3. Зависимость аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления  $C_D$  и подъемной силы  $C_L$  от отношения экваториальной скорости к скорости потока: 1 –  $Re = 6,15 \cdot 10^4$ ; 2 –  $Re = 7,74 \cdot 10^4$ ; 3 –  $Re = 10,70 \cdot 10^4$

### 1.2.2. Наличие вращения

Рассмотрим сложное движение шарика, состоящее из поступательного движения со скоростью  $\mathbf{V}$  и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс с угловой скоростью  $\omega$ . Важной характеристикой движения является отношение экваториальной скорости, обусловленной вращением, к скорости поступательного движения

$$n = \frac{\omega d}{2V}.$$

В работе [13] приведены зависимости значений коэффициентов  $C_D$  и  $C_L$  от этого отношения для некоторых значений числа Рейнольдса. Эти зависимости показаны на рис. 3. На графиках видно, что при достаточно быстром вращении мяча аэродинамические коэффициенты слабо зависят от отношения  $n$ . Как показано в следующем параграфе, при ударе по неподвижному мячу достигается  $n = 1,5$ . При ударе по вращающемуся мячу это отношение может быть и больше. В соответствии с рис. 3 примем  $C_D = 0,6$ ,  $C_L = 0,35$ .

Значения аэродинамических коэффициентов  $C_D$  и  $C_L$  получены для больших скоростей мяча – от 25 до 40 м/с. Однако поскольку они слабо зависят от  $Re$ , то это дает основание принять такие же значения коэффициентов для меньших скоростей. Такое соотношение оправдывается также согласованием расчетных траекторий с реальными.

### 1.3. Оценка угловой скорости вращения теннисного шарика

Рассмотрим удар ракеткой по неподвижному шарiku (рис. 4). Полагаем, что нет проскальзывания шарика по ракетке, когда достигается наибольший эффект вращения шарика.

Скорость ракетки  $U$  и составляет угол  $\alpha$  с плоскостью ракетки. После удара центр масс ракетки получает скорость  $V$ , составляющие которой  $V_\tau$  и  $V_n$ , и шар вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Составляющая скорости  $V_n$  находится через скорость  $U$ .

$$V_n = kU \sin \alpha, \quad (6)$$

где  $k$  – коэффициент восстановления при ударе (для мягких покрытий ракеток  $k \approx 0,5$ ).

Для определения  $V_\tau$  и  $\omega$  воспользуемся теоремами об изменении количества движения и кинетического момента шарика при ударе. Так как до удара шарик был неподвижен, из теорем имеем

$$mV_\tau = S_\tau, \quad (7)$$

$$J_c \omega = S_\tau r, \quad J_c = \frac{2}{3} mr^2, \quad (8)$$

где  $J_c$  – момент инерции шарика, полого внутри, относительно оси, проходящей через центр масс;  $r = \frac{d}{2}$  – радиус шарика;  $S_\tau$  – касательный компонент ударного импульса, действующего на шарик со стороны ракетки. Система уравнений (7)–(8) дает решение  $\frac{\omega r}{V_\tau} = 1,5$ .

Наиболее эффективное вращение происходит при малых углах  $\alpha$ , когда  $V_n$  мало. Тогда, допуская, что  $V = V_\tau$ , окончательно получим отношение скоростей

$$n = \frac{\omega r}{V} = 1,5,$$

используемое в предыдущем параграфе.

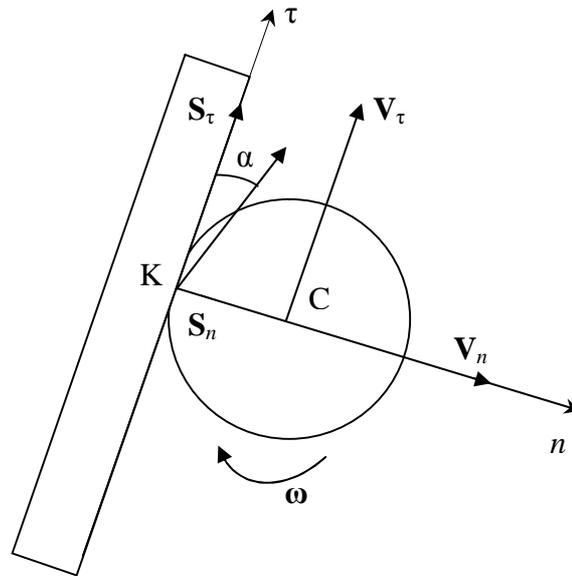


Рис. 4. Схема взаимодействия теннисного мячика с ракеткой

#### 1.4. Уравнения движения центра масс шарика

Уравнение движения центра масс шарика в векторной форме имеет вид

$$m \mathbf{a}_c = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{Q}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{a}_c$  – ускорение центра масс шарика ( $\mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ ),  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  – силы, описанные в параграфе 1.

Проектируя левую и правую части (9) на оси координат и вводя обозначения  $V_x = u$ ,  $V_y = v$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{du}{dt} &= -R \frac{u}{V} \mp Q \frac{v}{V}, \\ \frac{dx}{dt} &= u, \\ m \frac{dv}{dt} &= -mg - R \frac{v}{V} \pm Q \frac{u}{V}, \\ \frac{dy}{dt} &= v, \end{aligned} \quad (10)$$

$$R = \frac{1}{2} \rho C_D S V^2,$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho C_L S V^2,$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2},$$

где  $x, y$  – координаты центра масс шарика, верхний знак в слагаемом с подъемной силой относится к подрезке, нижний – к накату. Задаваемые параметры задачи:

$\rho = 1,23 \text{ кг/м}^3, m = 0,0023 \text{ кг}, S = \frac{\pi d^2}{4}$  ( $d = 0,0038 \text{ м}$ ). В случае прямого удара  $C_D = 0,45,$

$C_L = 0$ , при накате и подрезке  $C_D = 0,6, C_L = 0,35$ .

Решается задача Коши с начальными условиями для функций  $x(t), y(t), u(t), v(t)$ . Решение находилось численно методом Эйлера.

### 1.5. Оптимизация приема мяча

Оптимизация траекторий полета теннисного шарика [4] проводилась в визуальном режиме. Задавалось начальное положение шарика, модуль и направление его начальной скорости. Расчетная траектория выводилась на экран компьютера и подбирались такие начальные условия для скорости, чтобы шарик упал на сторону стола соперника с максимальной скоростью, не задев при этом сетки. В параметрах траектории, изображенных на рис. 5, 6,  $V_k$  – конечная скорость шарика при ударе о стол на половине соперника.

Выяснено, что при приеме мяча в ближней зоне наиболее эффективен накат (рис. 5), при котором скорость падения шарика на сторону соперника более чем в два раза превышает скорость при прямом ударе и приеме подрезкой.

При приеме мяча в дальней зоне скорость падения шарика на сторону соперника существенно ниже и более эффективен прямой удар (рис. 6). Несколько меньшие скорости получают при приеме накатом.

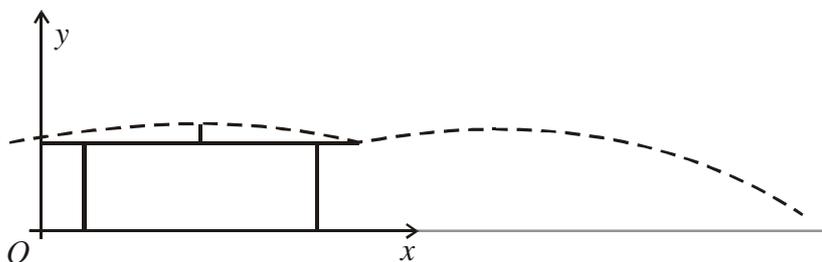


Рис. 5. Оптимальная траектория после приема мяча в ближней зоне накатом. Параметры:  $\alpha = 11^\circ, V_0 = 28 \text{ м/с}, V_k = 14,26 \text{ м/с}$ , расстояние до стола – 0,3 м, высота – на уровне стола, удар – накат

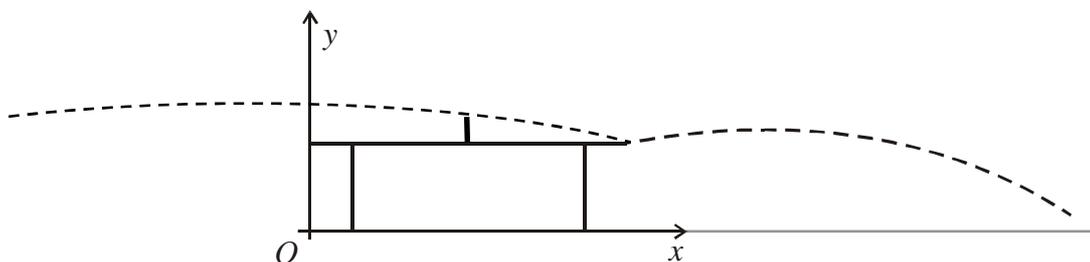


Рис. 6. Оптимальная траектория после приема мяча в дальней зоне прямым ударом. Параметры:  $\alpha = 5,15^\circ, V_0 = 26,7 \text{ м/с}, V_k = 9,2 \text{ м/с}$ , расстояние до стола – 3,13 м, высота – на уровне стола, удар – прямой

### 1.6. Оптимизация подачи волейбольного мяча

В работе [5] описана проведенная компьютерная оптимизация подачи волейбольного мяча.

Наибольший интерес представляет оптимизация подачи из ближней зоны – с линии игровой площадки. При силовой подаче начальная высота мяча бралась равной 2,5 м, а в качестве варьируемых параметров были приняты модуль начальной скорости и угол, составляемый вектором начальной скорости мяча с горизонтом. Мяч должен пролететь над сеткой высотой 2,43 м и упасть на площадку соперника, длина которой равна 9 м. При оптимальной подаче мяч должен иметь максимальную скорость перед касанием площадки. Оптимизация была проведена путем анализа различных траекторий, выведенных на экран компьютера, и отбора траектории с максимальной скоростью падения. Траектория, близкая к оптимальной, приведена на рис. 7. Мяч подается с начальной скоростью 22,8 м/с, что несколько выше показателей исследуемой группы спортсменов, под углом 7,5° к горизонту. Конечная скорость мяча равна 13,5 м/с. Еще более эффективна подача в прыжке из зоны игровой площадки при более высоком начальном положении мяча.

При силовой подаче из дальней зоны достигаются приблизительно такие же показатели, что и при подаче из ближней зоны, однако требуется существенно более высокая начальная скорость мяча.

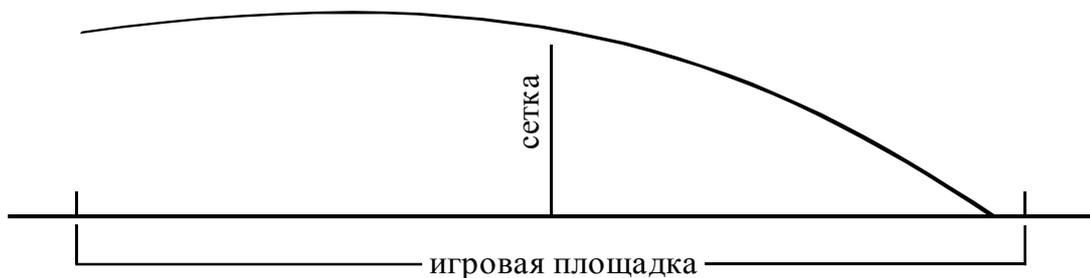


Рис. 7. Силовая подача с края площадки: начальная высота 2,5 м; начальная скорость 22,8 м/с; начальный угол 7,5 град; расстояние от передней линии 0,0 м; максимальная высота 2,9 м; расстояние над сеткой 0,3 м; время полета 1,1 с; расстояние до задней линии 0,2 м; конечная скорость 13,5 м/с

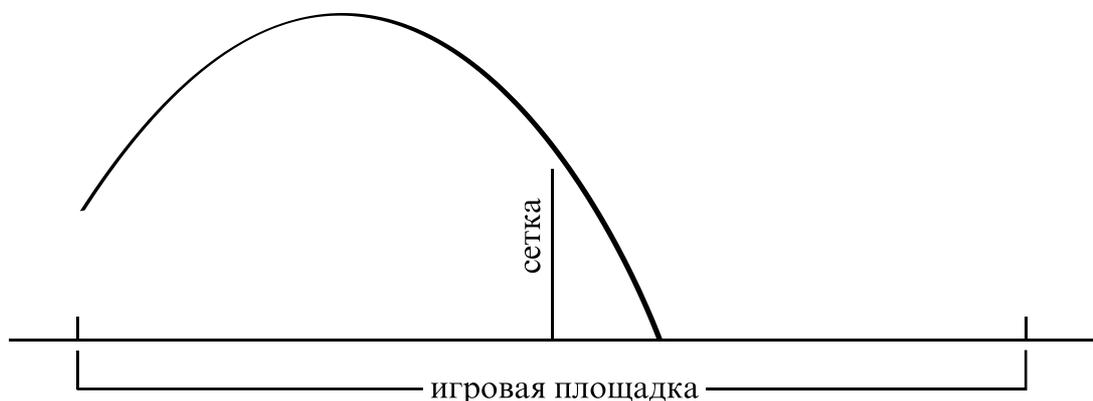


Рис. 8. Силовая подача с края площадки: начальная высота 1,5 м; начальная скорость 12,0 м/с; начальный угол 55 град; расстояние от передней линии 0,0 м; максимальная высота 5,5 м; расстояние над сеткой 0,5 м; время полета 2,0 с; расстояние до задней линии 7,5 м; конечная скорость 102 м/с

На рис. 8 приведена оптимальная траектория при навесной подаче. Критерий оптимизации – минимальное расстояние точки падения мяча от сетки.

При ограничении на высоту траектории (6 м) оптимальная начальная скорость равна 12 м/с, а угол подачи составляет с горизонтом 55°. В этом случае мяч приземляется на расстоянии 2,5 м от сетки.

Таким образом, проведенное численное исследование подачи мяча при игре в волейбол показало, что наиболее эффективна силовая подача из ближней зоны. В работе [16] решено несколько задач, связанных с полётом футбольного мяча после удара со стандартных положений. Исследован прямой удар по неподвижному мячу. Показано, что при реально достижимом значении начальной скорости мяча ( $V_0 = 30$  м/с) можно с центра поля поразить ворота соперника. Найден оптимальный угол вылета мяча ( $\alpha = 29^\circ$ ). При решении этой задачи впервые учтена зависимость аэродинамического коэффициента лобового сопротивления  $C_D$  от скорости мяча, представленная на рис. 2.

Рассмотрена в [16] также подача углового. Рассчитана пространственная траектория движения центра масс мяча при его боковом вращении после удара. Выяснены условия удара, при которых мяч может попасть в створ ворот соперника.

## 2. Биомеханические проблемы прыжка на лыжах с трамплина

Прыжки с трамплина – один из наиболее технически сложных видов спорта. Достижения в нём связаны в основном с практической деятельностью тренеров и спортсменов, а строгое математическое моделирование прыжка, учитывающее индивидуальность спортсмена, находится пока на пути становления.

### 2.1. Основные фазы прыжка с трамплина

Весь прыжок можно условно разделить на четыре фазы: разгон, отталкивание, полёт и приземление. Основной является фаза полёта, однако успешность прыжка готовят предыдущие фазы; не менее важно и успешное приземление. Экспериментальные и теоретические исследования посвящены рассмотрению отдельных фаз прыжка, хотя наиболее обоснованные теоретические результаты могут быть достигнуты лишь на основе комплексного решения проблемы.

На рис. 9 изображён трамплин в разрезе. Трамплины создаются на определённую максимальную дальность прыжка, которая вычисляется как длина нити, натянутой между кромкой стола отрыва и точкой приземления на склоне горы (точкой приземления считается та точка, где касается земли место лыж, к которому крепятся ботинки). Например, в Перми есть детские трамплины, рассчитанные на дальность 10, 15, 20 и 29 метров, и два трамплина для соревнований с дальностью 48,5 и 70 метров. Для вычисления геометрических размеров трамплинов (их называют профильными характеристиками) существуют специальные уравнения и нормы, призванные предотвратить травмы лыжников из-за чрезмерной дальности прыжка.

Трамплин состоит из склона разгона и так называемого стола отрыва, с которого лыжники уходят в свободный полёт. Стол отрыва имеет небольшой отрицательный угол к горизонтали  $\theta$ , обычно составляющий от  $6^\circ$  до  $12^\circ$ . Здесь, собственно, трамплин заканчивается и то, что дальше, строго говоря, уже является горой приземления. Склон приземления состоит из трёх участков: участка высотой  $H$  и длиной  $N$ , участка приземления и закругляющегося вверх участка торможения. Участок приземления –

это плоскость с углом к горизонту от  $-25^\circ$  до  $-40^\circ$ . Высота стола отрыва над склоном горы приземления обозначается буквой  $T$  и обычно составляет 2–4% от максимальной дальности (см. рис. 9).

### 2.1.1. Фаза разгона

В этой фазе формируется скорость лыжника, которая обеспечивает дальность прыжка. Существует, по-видимому, оптимальная скорость, так как при очень больших скоростях вылета лыжнику трудно принять обтекаемую позу в следующей фазе прыжка.

Разгон лыжника при спуске с горы подробно рассмотрен в книге В.А. Петрова и Ю.А. Гагина [2]. На рис. 10 показаны силы, действующие на лыжника при спуске: сила тяжести  $P = mg$ , нормальная реакция лыжника  $N$ , сила трения  $F_{тр} = \mu N$ , сила лобового сопротивления  $R = 0,5\rho C_D S v^2$  и подъёмная сила  $Q = 0,5\rho C_L S v^2$ , где  $m$  – масса лыжника,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность воздуха,  $S$  – площадь миделя,  $v$  – скорость спуска,  $C_D$  и  $C_L$  – аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъёмной силы. В [2] приводятся значения некоторых параметров при низкой стойке, характерной при прыжках с трамплина:  $S = 0,34 \div 0,5 \text{ м}^2$ ,  $C_L = 0,55 \div 0,65$ ,  $C_D = 0,3 \div 0,4$ . Коэффициент трения  $\mu = 0,05$ .

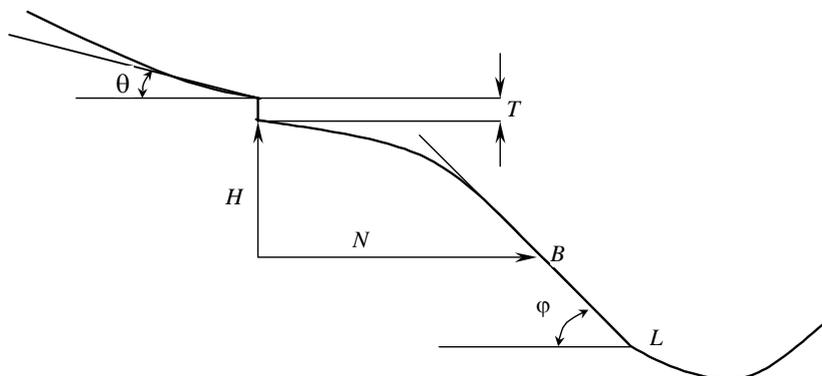


Рис. 9. Геометрические элементы трамплина

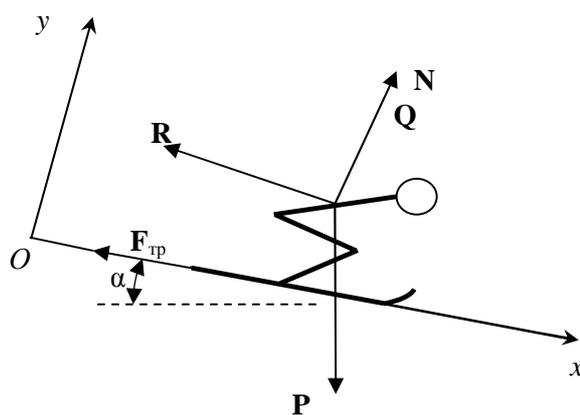


Рис.10. Силы, действующие на лыжника при спуске

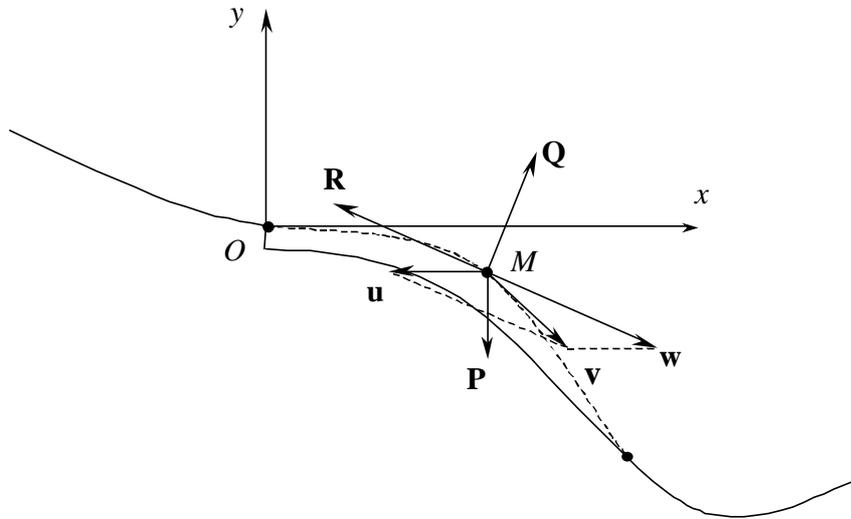


Рис. 11. Схематическое изображение полёта лыжника (пояснения в тексте)

Лыжник рассматривается как материальная точка. На основе второго закона Ньютона составляются уравнения движения

$$m \frac{dv}{dt} = P \sin \alpha - F_{\text{тр}} - R, \quad (11)$$

$$0 = -P \cos \alpha + N + Q. \quad (12)$$

Из уравнения (12) находится нормальная реакция, которая зависит от скорости. Уравнение (11) показывает зависимость скорости от пройденного расстояния  $x$ :

$$v = a \sqrt{1 - e^{-\frac{2gK^2}{a^2}x}}, \quad (13)$$

где

$$K = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad a = \sqrt{\frac{2mgK^2}{C_D \rho S}}.$$

Подъёмная сила в уравнении (13) не учтена.

### 2.1.2. Фаза полёта

В основной фазе полёта движение лыжника поступательно, поэтому по теореме о движении центра масс механической системы оно может быть описано как движение материальной точки под воздействием силы тяжести  $\mathbf{P}$ , лобового сопротивления  $\mathbf{R}$  и подъёмной силы  $\mathbf{Q}$  (рис. 11). Силы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{Q}$  зависят от скорости лыжника относительно воздуха  $\mathbf{w}$ , которая равна разности скорости лыжника относительно земли  $\mathbf{v}$  и скорости ветра  $\mathbf{u}$  в той области, в которой лыжник находится в данный момент времени,

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \quad (14)$$

В рамках гидравлического приближения подъёмная сила и сила лобового сопротивления имеют вид

$$|\mathbf{R}| = \frac{1}{2} C_D \rho S w^2, \quad |\mathbf{Q}| = \frac{1}{2} C_L \rho S w^2. \quad (15)$$

Сила лобового сопротивления  $\mathbf{R}$  направлена противоположно скорости  $\mathbf{w}$ .

$$\mathbf{R} = -k w \mathbf{w}, \quad (16)$$

где

$$k = \frac{1}{2} C_D \rho S. \quad (17)$$

Направление подъёмной силы  $\mathbf{Q}$  (рис. 11) может быть найдено с помощью орта  $\mathbf{e}$  оси  $Oz$ , направленной из плоскости рисунка на читателя.

$$\mathbf{Q} = f w (\mathbf{e} \times \mathbf{w}), \quad (18)$$

где

$$f = \frac{1}{2} C_L \rho S. \quad (19)$$

Второй закон Ньютона связывает массу экипированного лыжника  $m$  и его ускорение  $\mathbf{a}$  с приложенными к лыжнику силами:

$$m \mathbf{a} = \mathbf{P} - k w \mathbf{w} + f w (\mathbf{e} \times \mathbf{w}). \quad (20)$$

Разделив уравнение (20) на  $m$  и спроектировав на оси координат, приходим к системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} = g - \frac{k w (\dot{x} - u_x) + f w (\dot{y} - u_y)}{m}, \\ \ddot{y} = \frac{-k w (\dot{y} - u_y) + f w (\dot{x} - u_x)}{m}, \end{cases} \quad (21)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $w = |\mathbf{w}|$  – модуль скорости лыжника относительно воздуха,

$$w = \sqrt{(\dot{x} - u_x)^2 + (\dot{y} - u_y)^2}, \quad (22)$$

$u_x$  и  $u_y$  – проекции скорости ветра на оси координат (без учёта влияния лыжника на скорость движения воздуха).

Результаты решения задачи оптимизации приведены на рис. 12 и 13. Из рис. 12 видно, что чем тяжелее спортсмен, тем выше он должен поднимать носки лыж. На рис. 13 изображены линии равной дальности в координатах масса лыжника – длина лыж.

Этот рисунок построен для оптимальных траекторий полёта, поэтому указанные дальности полёта максимальны для каждого лыжника. Для достижения большей дальности полёта масса лыжника со снаряжением важнее, чем длина лыж: изменение массы лыжника на 1% равносильно изменению длины лыж на 2%.

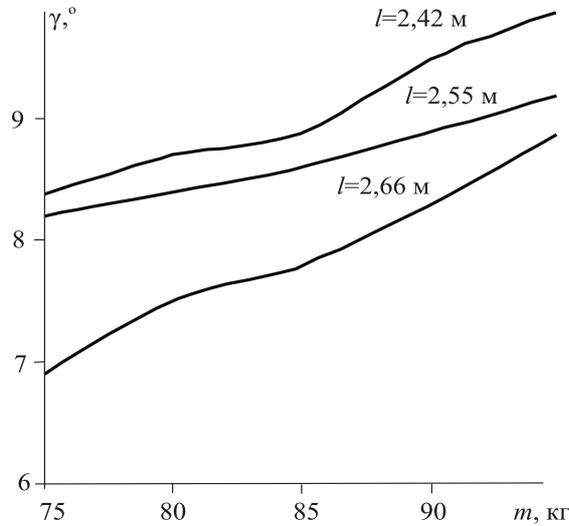


Рис. 12. Оптимальные углы лыж к горизонту  $\gamma$  для различных масс полностью экипированного лыжника и различных длин лыж

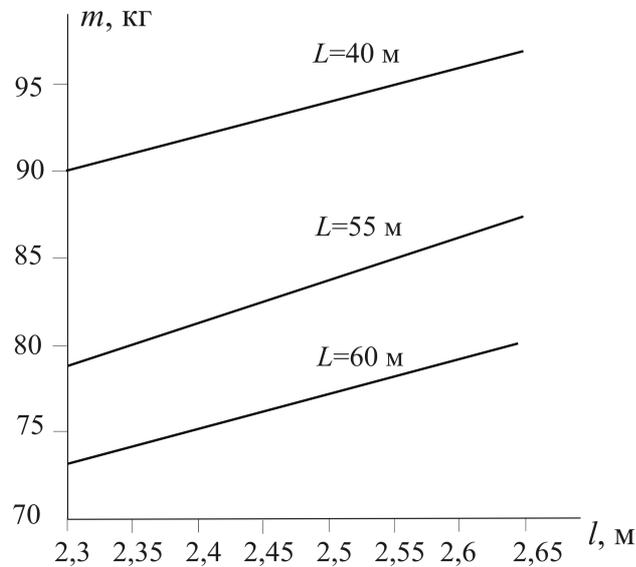


Рис. 13. Изолинии максимальной полётной дальности в координатах масса–длина системы лыжник – лыжи

## 2.2. Проблема определения аэродинамических коэффициентов

В работе [14] сделана попытка численного и экспериментального определения аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления  $C_D$  и подъёмной силы  $C_L$ . Численно методом конечных разностей решалась задача обтекания плоской модели лыжника потоком воздуха. Полученные результаты численного анализа достаточно хорошо согласуются с результатами обработки видеозаписей прыжков на пермском трамплине.

Зависимость аэродинамических коэффициентов от угла наклона лыж представлена на рис. 14. Усредненные значения коэффициентов, найденных теоретически в работах [3, 14, 15, 17], представлены сплошными линиями, а результаты обдува моделей лыжников в аэродинамической трубе [1] – пунктирными линиями.

Дальнейшее решение проблемы нахождения  $C_D$  и  $C_L$  связано с численным решением пространственной задачи обтекания лыжника потоком воздуха и совершенствованием методов обработки видеозаписей полёта лыжника [6].

### 2.3. Задачи математического моделирования прыжка на лыжах

При математическом моделировании прыжка с трамплина необходим учёт индивидуальных особенностей прыгуна на лыжах. На первом месте стоит задача определения зависимости аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления и подъёмной силы от параметров системы лыжник–лыжи. В решении этой задачи пока предпочтительнее экспериментальные методы. Современная вычислительная техника позволяет при расчёте аэродинамических коэффициентов учитывать лишь некоторые особенности системы лыжник–лыжи: размеры, угол атаки. Однако решение трёхмерной задачи обтекания системы лыжник–лыжи потоком воздуха – одна из важнейших задач математического моделирования прыжка на лыжах.

Необходимой составляющей успешности прыжка является устойчивость полёта прыгуна на лыжах. До сих пор рассматривалась простейшая модель прыжка – движение материальной точки. Требуется рассмотрение движения свободного твёрдого тела или, по крайней мере, модель плоскопараллельного движения и исследование устойчивости этого движения.

В некоторых работах рассматривался вопрос безопасности приземления, экспериментально исследованы нагрузки, которые испытывает прыгун в фазе приземления. Требуется рассмотрения сложная биомеханическая модель лыжника с теоретическим анализом усилий, которые испытывают суставы и мышцы нижних конечностей прыгуна при приземлении.

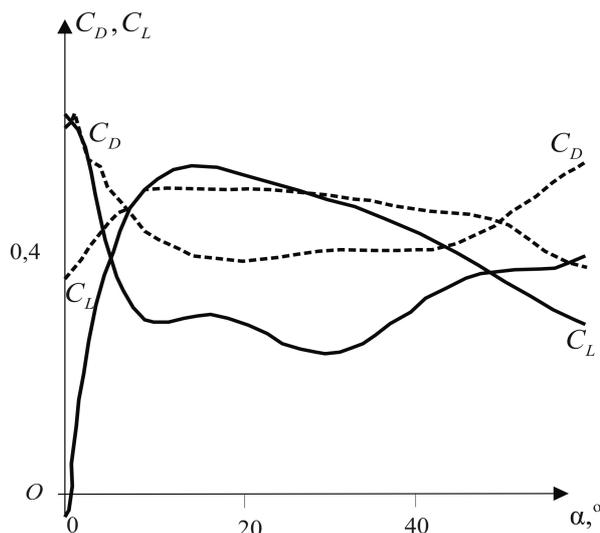


Рис. 14. Зависимость аэродинамических коэффициентов подъёмной силы и силы лобового сопротивления от угла атаки. Сплошная линия – аэродинамические коэффициенты, полученные из решения задачи обтекания модели лыжник – лыжи потоком воздуха, штриховая линия – найденные экспериментально в аэродинамической трубе для фигурок прыгунов в полётных стилях 1960-х годов [1]

Как перспективная рассматривается задача учёта проницаемости костюма лыжника и её влияния на дальность и устойчивость полёта.

И, наконец, теоретически не исследованной остаётся фаза отталкивания и формирования обтекаемой и устойчивой позы лыжника. Известные экспериментальные данные по исследованию этой фазы являются базой для теоретического анализа вопроса.

### 3. Оптимизация слаломной траектории

Решается задача математического моделирования прохождения горнолыжником слаломной трассы. В работе [8] из сопоставления опытных и расчетных данных был найден аэродинамический параметр системы лыжник–лыжи при спуске горнолыжника по снежному склону.

Рассматривается проблема спуска на горных лыжах по трассе, особенно важная для спортсменов-горнолыжников. Она состоит в том, что при прохождении соревновательной трассы спортсмены должны так формировать траекторию спуска, чтобы время движения было минимальным. Исходя из этого, в работе рассматривается задача минимизации времени прохождения горнолыжником размеченной шестью горнолыжной трассы.

При решении задачи принято допущение о замене системы лыжник–лыжи одной материальной точкой, расположенной в общем центре масс и движущейся по склону, а при определении угла наклона лыжника рассматривается модель невесомого стержня с материальной точкой на конце.

#### 3.1. Уравнения движения точки по криволинейной поверхности в естественных координатах

Рассмотрим движение лыжника по цилиндрической поверхности, образующая которой горизонтальна, а касательная  $\tau_1$  к линии наибольшего ската  $l$  составляет угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью (рис. 15). Профиль склона в этом случае можно задать уравнением

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{1}{R_C} l, \quad (23)$$

где  $l$  – криволинейная координата, отсчитываемая от  $l = l_0$  по линии наибольшего ската,  $\alpha_0$  – значение угла при  $l = l_0$ , а  $R_C$  – переменный радиус кривизны склона.

Рассмотрим движение лыжника как движение материальной точки, которая движется по траектории

$$y = y(l), \quad (24)$$

где  $y$  – её отклонение от осевой линии наибольшего ската  $l$ . В произвольной точке  $M$  касательная к траектории  $\tau$  составляет угол  $\varphi$  с касательной  $\tau_1$  к линии наибольшего ската в этой же точке. Значение угла  $\varphi$  находится по формуле

$$\varphi = \arctg y'. \quad (25)$$

Здесь и далее штрих означает производную по  $l$ .

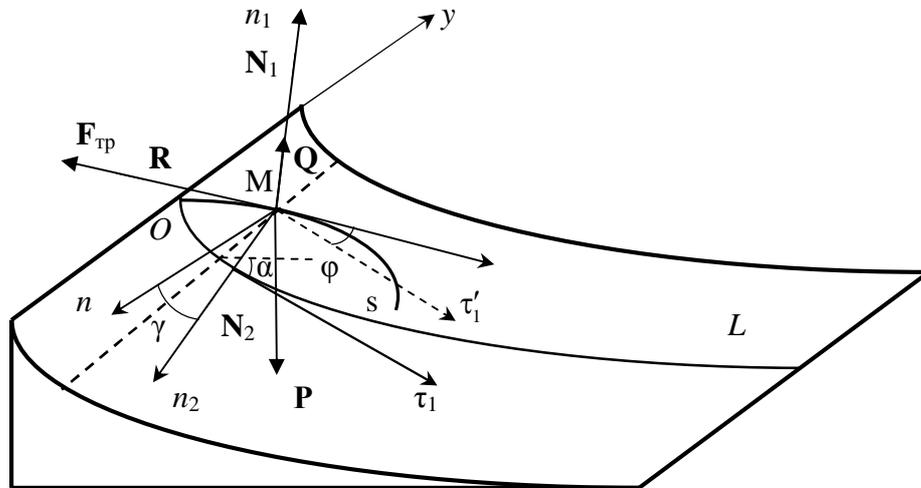


Рис. 15. Геометрия слаломной траектории и силы, действующие на систему лыжник–лыжи

Рассматривая движение лыжника как движение материальной точки, совпадающей с центром масс, запишем II закон Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (26)$$

где  $m$  – масса системы лыжник – лыжи,  $\mathbf{a}$  – ускорение ее центра масс,  $\mathbf{F}$  – главный вектор всех внешних сил, действующих на эту систему.

Левую и правую части уравнения (26) спроектируем на оси, связанные как с траекторией, так и с поверхностью горы. Выберем в качестве естественных осей следующие оси:  $\tau$  – касательную к траектории,  $n_1$  – нормаль к поверхности горы, направленную к центру кривизны линии наибольшего ската,  $n_2$  – нормаль к траектории, лежащей в плоскости, касательной к поверхности горы в данной точке траектории.

Главная нормаль  $n$  к траектории отходит от поверхности из-за ее изгиба и составляет угол  $\gamma$  с осью  $n_2$  (рис. 15).

Введем орты касательной  $\phi_0$  и главной нормали  $\mathbf{n}_0$  к траектории. Тогда ускорение точки может быть записано в виде

$$\mathbf{a} = a_\tau \phi_0 + a_n \mathbf{n}_0, \quad (27)$$

а уравнение (26) с учетом формул касательного и нормального ускорений примет вид

$$m \left( \frac{dV}{dt} \phi_0 + \frac{V^2}{\rho} \mathbf{n}_0 \right) = \mathbf{F}, \quad (28)$$

где  $V$  – скорость точки,  $\rho$  – радиус кривизны траектории. Проектируя левую и правую части (28) на оси естественного трехгранника  $M\tau n_1 n_2$ , получим уравнения

$$m \frac{dV}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{V^2}{\rho} \sin \gamma = F_{n_1}, \quad m \frac{V^2}{\rho} \cos \gamma = F_{n_2}, \quad V = \frac{ds}{dt}. \quad (29)$$

Здесь  $s$  – криволинейная координата, отсчитываемая от начального значения  $s_0$  по траектории.

Проведем через касательную  $\tau$  плоскость, перпендикулярную к поверхности в точке  $M$ . Получим нормальное сечение поверхности, радиус кривизны которого в точке  $M$  обозначим через  $R_N$ . Кроме того, рассечем поверхность соприкасающейся плоскостью  $M\tau_n$  и получим наклонное сечение, которое составляет угол  $90^\circ - \gamma$  с нормальным сечением. По теореме Менье радиус кривизны наклонного сечения, совпадающий с радиусом кривизны траектории  $\rho$ , находится по формуле

$$\rho = R_N \sin \gamma. \quad (30)$$

Радиус кривизны  $R_N$  может быть найден через главные кривизны  $K_1$  и  $K_2$  в данной точке поверхности по формуле Эйлера

$$\frac{1}{R_N} = K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi, \quad (31)$$

где  $\varphi$  – угол между произвольно ориентированным нормальным сечением и сечением с кривизной  $K_1$ .

Подставляя формулу (30) в уравнения (29), получим естественные уравнения движения по траектории, лежащей на любой криволинейной поверхности,

$$m \frac{dV}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{V^2}{R_N} = F_{n_1}, \quad m \frac{V^2}{R_N \operatorname{tg} \gamma} = F_{n_2}, \quad V = \frac{ds}{dt}. \quad (32)$$

Для цилиндрического склона горы эти уравнения существенно упрощаются. Главные кривизны склона  $K_1 = 1/R_C$ ,  $K_2 = 0$ . Тогда из формулы (31) получим

$$R_N = \frac{R_C}{\cos^2 \varphi}. \quad (33)$$

Из геометрических построений легко находится угол  $\gamma$ . Он удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r_C}{R_N}, \quad (34)$$

где  $r_C$  – радиус кривизны траектории (24), лежащей на плоском склоне, который может быть определен по формуле

$$r_C = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{|y''|}. \quad (35)$$

Подставим (33) и (34) в уравнения (32) и получим естественные уравнения движения точки по цилиндрической поверхности:

$$m \frac{dV}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{V^2}{R_C} \cos^2 \varphi = F_{n_1}, \quad \frac{mV^2}{r_C} = F_{n_2}, \quad V = \frac{ds}{dt}. \quad (36)$$

В случае плоского склона в уравнениях (36) достаточно положить  $R_C = \infty$ , тогда ось  $n_2$  совпадет с главной нормалью к траектории  $n$ .

### 3.2. Силы, действующие на лыжника при движении по слаломной траектории

На рис. 15 изображены внешние силы, действующие на лыжника при его движении по слаломной траектории. На него действует сила тяжести  $P$ , сила лобового сопротивления  $R$ , подъемная сила  $Q$ , сила трения  $F_{\text{тр}}$  и реакция снежного покрова склона с составляющими  $N_1$  и  $N_2$ .

$$P = mg, \quad R = \frac{1}{2}\rho S C_D V^2, \quad Q = \frac{1}{2}\rho S C_L V^2, \quad F_{\text{тр}} = f\sqrt{N_1^2 + N_2^2},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho$  – плотность воздуха,  $S$  – площадь миделя системы лыжник–лыжи,  $f$  – коэффициент трения лыж о снег,  $C_D$  и  $C_L$  – аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы. Составляющие реакции  $N_1$  и  $N_2$  будут определены ниже. Главный вектор всех внешних сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2. \quad (37)$$

Его проекции на естественные оси координат в соответствии с рис. 15 запишутся в виде

$$F_{\tau} = P \sin \alpha \cos \varphi - R - F_{\text{тр}}, \quad (38)$$

$$F_{n_1} = (-mg \cos \alpha + Q + N_1) \left( -\frac{\alpha'}{|\alpha'|} \right), \quad (39)$$

$$F_{n_2} = -mg \sin \alpha \sin \varphi \frac{y''}{|y''|} + N_2. \quad (40)$$

В формуле (39) в рассматриваемом случае вогнутой горы  $\alpha' < 0$ . В формуле (40) знак первого слагаемого в правой части зависит от угла между осями  $\tau_1$  и  $n_2$ . Если угол острый, то знак плюс, в противном случае – минус.

Если подставить формулы (38)–(40) в уравнения (36), то получатся естественные уравнения движения лыжника по цилиндрическому склону горы с учетом действующих на него сил. Эти уравнения приводятся к двум дифференциальным уравнениям первого порядка следующего вида:

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin \alpha \cos \varphi - R - f\sqrt{N_1^2 + N_2^2}, \quad \frac{ds}{dt} = V. \quad (41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{mV^2 \cos^2 \varphi |\alpha'|}{R_c \alpha'} + mg \cos \alpha - Q \geq 0, \\ N_2 &= \frac{mV^2}{r_c} + mg \sin \alpha \sin \varphi \frac{y''}{|y''|}, \\ R &= \frac{1}{2}\rho S C_D V^2, \quad Q = \frac{1}{2}\rho S C_L V^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Искомые функции удовлетворяют начальным условиям

$$t = 0: \quad s = s_0, \quad V = V_0. \quad (43)$$

Задача Коши (41)–(43) решается численно методами пошагового интегрирования. На каждом шаге по времени, кроме  $V$  и  $s$ , определяются криволинейная координата  $l$ , углы  $\alpha$  и  $\varphi$ .

### 3.3. Определение коэффициента сопротивления скольжению лыж в повороте

Во время практических экспериментов, проведенных на горнолыжной базе «Снежинка» (г. Чайковский Пермской области), был промерен профиль склона на участке горнолыжной трассы. Обработка результатов измерений показала, что вогнутый профиль склона близок к поверхности цилиндра и имеет радиус  $R_C$ , равный

520 метрам. Начальный угол склона  $\alpha_0$  составил  $32,8 \frac{\pi}{180}$  радиан. При произвольном значении криволинейной координаты  $l$  угол склона определяется по формуле (23).

На промеренном участке были проведены два эксперимента. В первом эксперименте измерялось время прямого спуска горнолыжника в средней стойке без поворотов на трассе длиной 180 м. Для системы лыжник–лыжи общей массой 78,08 кг среднее время спуска составило  $10,32 \pm 0,03$  с. Из сопоставления этого времени с расчетным временем на трассе был найден аэродинамический параметр системы  $\gamma$ , который характеризует воздействие всех аэродинамических сил:

$$\gamma = S(C_D - f C_L). \quad (44)$$

Коэффициент  $\gamma$  оказался равным 0,46.

Во втором эксперименте была проведена модельная разметка реальной трассы таким образом, чтобы траекторию спуска горнолыжника можно было представить следующей моделью. Модель имеет, как и трасса, участок прямого разгона длиной пять метров, а далее движение горнолыжника с обходом симметрично расположенных ворот происходит по синусоиде. Положение тела горнолыжника в среднем соответствует позе прямого спуска в предыдущем эксперименте. Уравнение синусоиды следующее:

$$y = a \sin\left(\frac{2\pi}{L} l\right), \quad (45)$$

где амплитуда  $a = 4$  м, а период синуса  $L = 20$  м. Общая длина спуска по линии наибольшего ската составляет 180 м. Среднее время спусков для того же лыжника, найденное в опыте, оказалось равным  $39,60 \pm 0,04$  с.

Для определения расчетного времени спуска было принято, что коэффициент сопротивления движению лыж в поворотах линейно зависит от тангенса угла наклона лыжника к нормали к поверхности. В одноточечной модели лыжника (материальная точка на конце невесомого стержня) получается, что тангенс этого угла равен отношению составляющих реакции лыжни  $N_2/N_1$  (46). Тогда

$$f = 0,05 + K \frac{N_2}{N_1}. \quad (46)$$

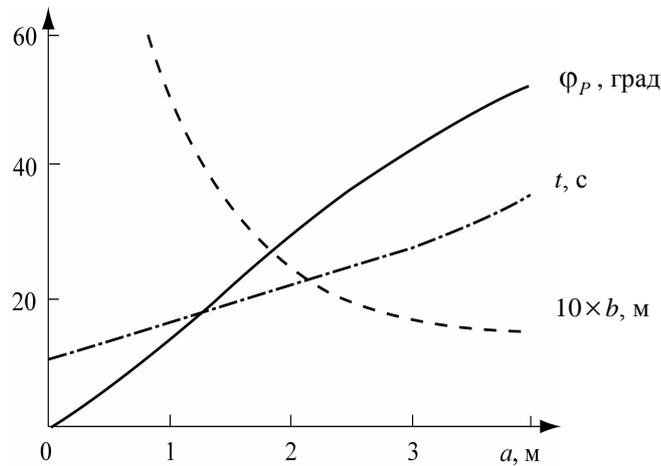


Рис. 16. Зависимость оптимального угла входа в поворот  $\varphi_p$  (сплошная линия), радиуса кривизны траектории  $b$  при обходе шеста (штриховая линия) и времени спуска  $t$  (штрихпунктирная) от расстояния ворот  $a$  до осевой линии при периоде траектории  $L=20$  м

При этом вблизи точек перегиба траектории горнолыжника, при переходах от одного поворота вокруг шестов разметки трассы к другому, составляющая  $N_2$  проходит через нулевое значение и коэффициент сопротивления  $f$  равен коэффициенту трения  $0,05$ , как это принималось при прямом спуске без поворотов.

При решении задачи Коши (41)–(43) было принято, что коэффициент  $C_L = 0$ , а ранее найденный аэродинамический параметр  $\gamma = SC_D$  составил величину  $0,46$ . Численное решение задачи Коши дало время спуска  $t = 39,6$  с при  $K=0,25$ . На каждом периоде синусоиды коэффициент  $f$  изменяется от  $0,05$  до максимального значения. Как и следовало ожидать, наибольшее значение коэффициент сопротивления движению принимает при обходе горнолыжником шеста разметки трассы, в этом случае угол наклона лыжника к нормали по отношению к поверхности доходит до  $66$  градусов, а значение  $f_{\max}$  до  $0,6$ .

Модель траектории (45) при заданных  $a$  и  $L$  не имеет варьируемых параметров. Поэтому была предпринята попытка построения периодической траектории движения горнолыжника из полиномов достаточно высокого порядка таким образом, чтобы некоторые параметры траектории можно было изменять.

### 3.4. Варьируемая модель слаломной траектории

Сначала для заданных амплитуды  $a$  и периода  $L$  построена одна четверть периода  $L$  траектории  $y_1 = y_1(l_1)$ . Считалось, что на осевой линии ( $l_1 = 0$ ) задается угол входа в поворот  $\varphi_c$  и эта точка кривой является точкой перегиба, а при обходе флажка ( $l_1 = L/4$ ) радиус кривизны траектории составляет величину  $b$ .

$$\begin{aligned} l_1 = 0: \quad y_1 = 0, \quad y_1' = \operatorname{tg} \varphi_c, \quad y_1'' = 0, \\ l_1 = \frac{L}{4}: \quad y_1 = a, \quad y_1' = 0, \quad y_1'' = -\frac{1}{b}. \end{aligned} \quad (47)$$

Построим траекторию в виде полинома

$$y_1 = C_1 + C_2 l_1 + C_3 l_1^2 + C_4 l_1^3 + C_5 l_1^4 + C_6 l_1^5. \quad (48)$$

Выполнение условий (47) определяет коэффициенты  $C_i$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \quad C_2 = \operatorname{tg} \varphi_C, \quad C_3 = 0, \\ C_4 &= \frac{1}{L_4^3} \left( 10a - 6L_4 \operatorname{tg} \varphi_C - \frac{1}{2b} L_4^2 \right), \\ C_5 &= \frac{1}{L_4^4} \left( -15a + 8L_4 \operatorname{tg} \varphi_C + \frac{1}{b} L_4^2 \right), \\ C_6 &= \frac{1}{2L_4^5} \left( 12a - 6L_4 \operatorname{tg} \varphi_C - \frac{1}{2b} L_4^2 \right), \quad L_4 = \frac{L}{4}. \end{aligned} \quad (49)$$

Полученная часть траектории достраивается до полного периода. Пусть переменная  $l$  изменяется от 0 до  $L$ . При построении траектории  $y(l)$  учтена следующая симметрия кривой:

$$0 \leq l \leq L/4: \quad l_1 = l, \quad y(l) = y_1(l_1);$$

$$L/4 < l \leq L/2: \quad l_1 = L/2 - l, \quad y(l) = y_1(l_1);$$

$$L/2 < l \leq 3L/4: \quad l_1 = l - L/2, \quad y(l) = -y_1(l_1);$$

$$3L/4 < l \leq L: \quad l_1 = L - l, \quad y(l) = -y_1(l_1).$$

Строится требуемое число периодов кривой и получается зависимость  $y(l)$  на всей модельной трассе.

### 3.5. Минимизация времени спуска по модельной слаломной трассе

В работе рассмотрен только один аспект минимизации времени спуска – за счет оптимизации формы траектории движения центра масс системы лыжник–лыжи. Горнолыжник спускается по варьируемой траектории при расстановке ворот, удовлетворяющей условиям проведения эксперимента. У траектории варьировался независимый параметр – угол входа лыжника в поворот  $\varphi_C$  на осевой линии модельной трассы. Радиус кривизны  $b$  при обходе флажка подбирался таким образом, чтобы время спуска при заданном угле  $\varphi_C$  было минимальным. Численно решалась система уравнений (41) при начальных условиях (43), соответствующих условиям проведения эксперимента.

Расчеты показали, что существует оптимальный угол входа в поворот  $\varphi_p = 52^\circ$  при  $b = 1,37$  м, дающий минимальное время спуска  $t = 34$  с. Эти результаты получены при следующей расстановке ворот:  $a = 4$  м,  $L = 20$  м. На рис. 16 показана зависимость оптимального угла входа в поворот  $\varphi_p$  и соответствующего радиуса кривизны траектории  $b$  при обходе шеста, а также времени спуска  $t$  от отклонения ворот  $a$  от осевой линии при периоде  $L = 20$  м.

Дано теоретическое обоснование и решена задача минимизации времени прохождения горнолыжником размеченной шестами горнолыжной трассы при сделанных авторами допущениях.

Полученные результаты представляют интерес для теории и методики горнолыжного спорта, для тренеров и спортсменов-горнолыжников, и могут быть использованы для постановки новых экспериментов.

### Список литературы

1. Грозин, Е.А. Прыжки с трамплина / Е.А. Грозин. – М.: Физкультура и спорт, 1971.
2. Петров, В.А. Механика спортивных движений / В.А. Петров, Ю.А. Гагин. – М.: Физкультура и спорт, 1974.
3. Подгаец, А.Р. Биомеханические проблемы прыжка на лыжах с трамплина / А.Р. Подгаец, Р.Н. Рудаков // Российский журнал биомеханики. – 2000. – Т. 4, № 2. – С. 20–30.
4. Рудаков, Р.Н. Оптимизация траектории теннисного шарика / Р.Н. Рудаков, А.В. Каменских, П.В. Шульгин // Российский журнал биомеханики. – 2000. – Т. 4, № 2. – С. 42–49.
5. Рудаков, Р.Н. Математическое моделирование подачи волейбольного мяча / Р.Н. Рудаков, Т.А. Ширинкин, Н.Ю. Артюшков, А.И. Братчиков, С.А. Михеева // Российский журнал биомеханики. – 2000. – Т. 4, № 2. – С. 50–55.
6. Рудаков, Р.Н. Новый метод обработки видеозаписей движения спортсменов и спортивных снарядов / Р.Н. Рудаков // Российский журнал биомеханики. – 2004. – Т. 8, № 1. – С. 9–20.
7. Рудаков, Р.Н. Удар по спортивному мячу / Р.Н. Рудаков, Р.М. Подгаец // Российский журнал биомеханики. – 2005. – Т. 9, № 4. – С. 67–75.
8. Рудаков, Р.Н. Косвенное определение аэродинамического сопротивления при скоростном спуске на лыжах / Р.Н. Рудаков, П.П. Галёв, С.В. Василенко, П.В. Шульгин // Российский журнал биомеханики. – 2000. – Т. 4, № 2. – С. 31–35.
9. Рудаков, Р.Н. Оптимизация слаломной траектории на криволинейном склоне / Р.Н. Рудаков, А.Ф. Лисовский, А.Р. Гайсина, В.В. Хитрюк // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 2. – С. 53–61.
10. Рудаков, Р.Н. Оптимизация траектории центра масс горнолыжника в специальном слаломе, в слаломе-гиганте и супер-гиганте / Р.Н. Рудаков, А.Р. Гайсина, А.Ф. Лисовский, А.А. Разумов // Российский журнал биомеханики. – 2004. – Т. 8, № 2. – С. 12–18.
11. Рудаков, Р.Н. Оптимизация слаломной траектории с учётом наклона лыжника / Р.Н. Рудаков, А.А. Разумов, А.Ф. Лисовский, Р.М. Подгаец // Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 85–90.
12. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости / под ред. С. Гольдштейна. М.: Государственное издательство иностранной литературы. Т. 1, 1948.
13. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости / под ред. С. Гольдштейна. М.: Государственное издательство иностранной литературы. Т. 2, 1948.
14. Podgayets, A.R. Aerodynamic coefficients of a ski-jumper / A.R. Podgayets, R.N. Rudakov, V.S. Tuktamishev, R.S. Kerov, B.S. Shvetsov // Russian Journal of Biomechanics. – 2002. – Vol. 6, No. 1. – P. 78–94.
15. Podgayets, A.R. Evaluation of the effect of ski-jumper's aerodynamic quality on safety of landing / A.R. Podgayets, R.N. Rudakov // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3, No. 3. – P. 91–98.
16. Rudakov, R.N. On influence of the resistance crisis on the football flight dynamics / R.N. Rudakov, V.A. Lochov, A.F. Fedorov // Russian Journal of Biomechanics. – 2002. – Vol. 6, No. 2. – P. 95–106.
17. Rudakov, R.N. Mechanics of a ski jump / R.N. Rudakov, A.R. Podgayets // Russian Journal of Biomechanics. – 1998. – Vol. 1, No. 1–2. – P. 89–97.

## DYNAMICS OF SPORT PROJECTILES AND SPORTSMEN IN RESISTANT MEDIUM

R.N. Rudakov (Perm, Russia)

The topic of present paper is optimization of different sport movements in resistant medium. When sportsmen and sport projectiles move in the medium, they are subjected to the action of aerodynamic forces, namely drag force and lift force. In the problem of optimization of ball service in table tennis, the most effective one is service with great upper rotation of the ball. That is suggested by calculations. Differential equations of motion of center of mass of ball are presented. These equations also describe ball behavior in the other kinds of sport. For example, from the solution of boundary value problem, it is seen that reverse rotation of ball allows us to score a goal at the corner kick in football. At ski-jumping, the skis-to-velocity angle of the skier-on-skis system has a great influence on a sportsmen flight. The angle of maximal flight distance is obtained. At slalom, the main parameters of trajectory are optimized taking into account drag force and sliding friction. The further investigation of dynamics of sportsmen and sport projectiles is supposed, in particular, mathematical modelling of golf. This problem is interesting because the ball has a distant way during the flight.

**Key words:** biomechanics of sport movements, resistant medium, optimization.

*Получено 7 Ноября 2007*