

УДК 531/534: [57+61]

НЕЗАВИСИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В РАСТУЩИХ ЖИВЫХ ТКАНЯХ

В.С. Туктамышев, В.А. Лохов, Ю.И. Няшин

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: nyashin@inbox.ru

Аннотация. В представленной статье рассматривается концепция независимого управления напряжениями и деформациями применительно к живым тканям, в которых протекают ростовые процессы. Целенаправленное управление ростовыми деформациями может привести к изменению конфигурации рассматриваемой живой системы без влияния на её напряжённое состояние, что, в свою очередь, может быть полезным для исправления некоторых патологий развития у детей. Для решения подобных задач в данной работе предлагается численный алгоритм, основанный на результатах, полученных в механике сплошной среды. Кроме того, для учёта ограничений, налагаемых природой ростовых процессов, делается попытка математической формализации закономерностей распределения ростовых деформаций в живых тканях.

Ключевые слова: независимое управление напряжениями и деформациями, живые ткани, ростовые деформации, теорема о декомпозиции, численный алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Накопление знаний в сфере лечения некоторых патологий человеческого организма, таких как расщелина твёрдого нёба, сколиоз, различные переломы и т.д., приводит к выводу о важности механического фактора. Управление напряжённо-деформированным состоянием в соответствующих проблемных областях является одним из основополагающих методов исправления таких патологий [2, 6]. Такое управление особенно актуально для детей, поскольку у них процессы роста проходят с большей интенсивностью. Более того, появляется необходимость в независимом управлении напряжениями и деформациями в биологических тканях, так как в процессе исправления данных патологий очень важно, чтобы ростовые деформации не вызывали напряжений.

Вместе с тем в механике деформируемого твёрдого тела разработан подход [7, 9], позволяющий рассматривать неупругие деформации любой природы в рамках единой теории. Эта теория объединяет различные виды неупругих деформаций под термином «собственные деформации». Таким образом, собственными могут быть как ростовые деформации, так и температурные, пьезоэлектрические, пластические деформации, деформации фазовых переходов и т.д. Данный подход интересен тем, что находит своё развитие в работе [8], где доказывается фундаментальная теорема о декомпозиции собственной деформации на составляющую, свободную от напряжений [7], и составляющую, свободную от деформаций [5].

С точки зрения биомеханики, один из результатов данной теоремы заключается в том, что при определённых условиях ростовые деформации могут менять конфигурацию некоторой биологической системы без влияния на её напряжения (независимое управление деформациями).

Однако для применения теоремы о декомпозиции к решению прикладных задач, в частности задач биомеханики, необходима разработка численных алгоритмов независимого управления. Кроме этого, требуется развитие методов исследования ограничений, налагаемых закономерностями распределения ростовых деформаций в биологических тканях. Таким образом, целью данной работы является исследование алгоритмов независимого управления деформациями в растущих тканях с учётом распределения в них деформаций ростовых процессов.

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С СОБСТВЕННЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Для решения вопроса об исследовании напряжённо-деформированного состояния растущих биологических тканей будет использован вышеупомянутый подход, в котором собственными деформациями являются деформации ростовых процессов.

Рассмотрим ограниченную область V трехмерного евклидова пространства E^3 . Замыкание области обозначим через \bar{V} , границу – через S ($\bar{V} = V \cup S$). Тогда обобщённая постановка краевой задачи формулируется следующим образом.

Назовём обобщённым решением задачи симметричный тензор напряжений σ , который определяется обобщённым законом Гука

$$\sigma = C \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^g), \quad (1)$$

где $\mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3$, $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in S_u$, C – тензор упругих модулей. Следует отметить, что тензор малой деформации ε является суммой упругой ε^e и собственной деформаций ε^* , в качестве которых, как уже упоминалось, в данной работе принимаются ростовые деформации ε^g .

Для тензора σ работа внешних и внутренних сил на возможных перемещениях \mathbf{w} равна нулю:

$$\int_V \sigma \cdot \varepsilon(\mathbf{w}) dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} dS - \int_V \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} dV = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(S))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u. \quad (2)$$

Здесь W_2^1 – пространство Соболева, состоящее из функций, имеющих первую обобщённую производную и интегрируемых с квадратом вместе с первыми производными. Деформации $\varepsilon(\mathbf{u})$ и $\varepsilon(\mathbf{w})$ определяются геометрическими соотношениями Коши, где производные понимаются в обобщённом смысле. Значения перемещений \mathbf{u} и \mathbf{w} на границе вычисляются посредством оператора следа [3]. В обобщённой постановке задачи считается, что $\mathbf{P} \in (L_2(S_\sigma))^3$, $\mathbf{Q} \in (L_2(V))^3$, $\varepsilon^g \in (L_2(V))^6$, компоненты C_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) являются кусочно-непрерывными функциями координат.

СОБСТВЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ, СВОБОДНЫЕ ОТ НАПРЯЖЕНИЙ И СВОБОДНЫЕ ОТ ПОЛНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Для дальнейшего исследования вновь обратимся к общим свойствам собственных деформаций.

Пусть собственная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}_1^*$ распределена таким образом, что не вызывает напряжений в теле, тогда для краевой задачи с учётом отсутствия объёмных и поверхностных сил справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}_1^*) = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad \mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}_1)$ вычисляется по геометрическим соотношениям Коши.

В результате полная деформация равна собственной деформации.

Кроме этого, собственная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}_2^*$, создаваемая в теле, может приводить к возникновению в нём напряжений при отсутствующих полных деформациях (нильпотентная собственная деформация). В этом случае

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_2 = -\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2^*, \quad \mathbf{x} \in V, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \\ \int_V \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) dV = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(V))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u. \end{cases} \quad (4)$$

В результате полная деформация равна нулю.

Отметим, что вышеупомянутые задачи имеют неединственное решение и определяют множества собственных деформаций, свободных от напряжений и свободных от полных деформаций.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Более детальное исследование свойств собственных деформаций при решении краевой задачи проведено посредством аппарата функционального анализа, т.е. введения энергетического функционального пространства собственных деформаций.

Рассмотрим множество H симметричных тензоров второго ранга. Пусть компоненты тензоров являются вещественными функциями пространственных координат и принадлежат функциональному пространству L_2 [3]. Скалярное произведение в пространстве H введено следующим образом:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_H = \int_V \alpha_{ij} C_{ijkl} \beta_{kl} dV, \quad (5)$$

норма в пространстве определяется через скалярное произведение:

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_H = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})_H}. \quad (6)$$

Можно показать, что (6) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения.

Так как пространство $(L_2)^6$ является полным, то и пространство H также полное и потому – гильбертово.

Далее выделено подпространство H_u совместных собственных деформаций.

Некоторый симметричный тензор собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_u^* \in H$ принадлежит подпространству H_u , если для него существует такая вектор-функция (перемещение) $\exists \mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3$, что $\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ и

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u^* = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla). \quad (7)$$

Производные в уравнении (7) понимаются в обобщенном смысле, а значение функции \mathbf{u} на границе Γ_u определяется посредством оператора следа.

Доказано [8], что подпространство H_u образует множество элементов собственных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_u^*$, свободных от напряжений. Другими словами, элементы H_u удовлетворяют уравнению (3).

Следующее подпространство H_σ введено посредством условия, что собственная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$ является нильпотентной, т.е. полные деформации системы (при отсутствии внешних сил) равны нулю. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^* = -\mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \quad (8)$$

где напряжения удовлетворяют уравнению равновесия (2) при отсутствии внешних сил:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) dV = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(V))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u. \quad (9)$$

Множество собственных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$ в выражении (8) образует линейное подпространство H_σ [8]. Элементы этого подпространства удовлетворяют системе уравнений (4).

ТЕОРЕМА О ДЕКОМПОЗИЦИИ СОБСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Эта теорема отражает фундаментальное свойство собственной деформации.

Теорема. Любая собственная деформация, существующая в теле, может быть единственным образом разложена на составляющую $\boldsymbol{\varepsilon}_u^*$, свободную от напряжений, и составляющую $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$, свободную от полных деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}_u^* + \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H$, $\boldsymbol{\varepsilon}_u^* \in H_u$, $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma$. В работе [8] доказаны существование и единственность этого разложения.

Можно также доказать, что подпространства H_u и H_σ взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения (5).

Представленная теорема, в частности, открывает возможность независимого управления напряжениями и полными деформациями системы, соответственно, при помощи собственных деформаций, свободных от полных деформаций, и собственных деформаций, свободных от напряжений:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^0 = -\mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^0, \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0$ – требуемое поле напряжений, удовлетворяющее уравнению равновесия (9), $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ – требуемое поле совместных деформаций.

ЗАДАЧА НЕЗАВИСИМОГО УПРАВЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ

В реально существующих телах желаемые поля собственных деформаций зачастую не могут быть созданы произвольно. Например, деформации температурного расширения в изотропном теле могут быть только шаровыми. Точно также ростовые деформации в биологических тканях подчиняются своим закономерностям распределения, которые необходимо учитывать при независимом управлении. Поэтому в данной работе описанное ограничение предлагается записать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^K a_k \boldsymbol{\xi}_k, \quad (13)$$

где элемент $\boldsymbol{\xi}_k$ отвечает за распределение ростовых деформаций в некоторой (k -й) подобласти исследуемого объёма, параметр a_k – за величину соответствующей ростовой деформации ($\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_K\}^T$).

Детальное исследование соотношения (13) применительно к частным случаям растущих биологических тканей не может быть проведено в рамках одной статьи, но некоторые замечания по моделированию ростовых деформаций у детей будут сделаны в отдельном параграфе ниже.

Условием отсутствия напряжений при управлении полными деформациями в биологических тканях является принадлежность ростовой деформации (13) подпространству H_u :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g(\mathbf{a}) \in H_u. \quad (14)$$

Другими словами, коэффициенты a_k ($k=1..K$) должны быть такими, что выполняется равенство (14).

Целевой функцией задачи управления является функционал, характеризующий отклонение $\boldsymbol{\varepsilon}^g(\mathbf{a})$ от $\boldsymbol{\varepsilon}^0$:

$$\Phi(\mathbf{a}) = \|\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}^g(\mathbf{a})\|_H \rightarrow \inf(\mathbf{a}), \quad (15)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^0 \in H_u$ – требуемые ростовые деформации, свободные от напряжений, а норма вычисляется согласно (6). Таким образом, задача независимого управления полными деформациями сводится к поиску минимума функционала Φ при ограничениях (13) и (14).

Далее рассмотрим алгоритм построения функционала Φ . Для этого разложим тензор ростовой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^g$ по базису $\boldsymbol{\pi}_j$ ($j=1..n, n = \dim H_u$) подпространства H_u :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_u^g = \sum_{j=1}^n c_j \boldsymbol{\pi}_j. \quad (16)$$

Построение базиса собственных деформаций, свободных от напряжений, следует проводить, руководствуясь методикой, описанной в работе [4], согласно которой деформации дискретизированной системы, вычисляемые при поочерёдном единичном смещении незакреплённых узлов в направлениях координатных осей, образуют базис подпространства H_u .

Условие независимого управления полными деформациями (14), учитывая выражения (13) и (16), имеет вид

$$\sum_{k=1}^K a_k \boldsymbol{\xi}_k = \sum_{j=1}^n c_j \boldsymbol{\pi}_j. \quad (17)$$

Далее определим коэффициенты разложения c_j в (17). Для этого скалярно умножим левую и правую части соотношения (17) на некоторый базисный элемент π_i . Получим

$$\sum_{k=1}^K a_k (\xi_k, \pi_i)_H = \sum_{j=1}^n c_j (\pi_j, \pi_i)_H.$$

При $i = 1.. \dim H_u$ последнее соотношение можно переписать в матричной форме:

$$[\pi\xi]\{a\} = [\pi\pi]\{c\}. \tag{18}$$

Отсюда следует формула (19):

$$\{c\} = [\pi\pi]^{-1} [\pi\xi]\{a\}, \tag{19}$$

где $[\pi\pi]_{ij} = (\pi_i, \pi_j)_H$, $[\pi\xi]_{ik} = (\pi_i, \xi_k)_H$, $i, j = 1..n$, $k = 1..K$, $n = \dim H_u$.

Скалярное умножение уравнения (18) на элементы ξ_l ($l = 1..K$) с последующей подстановкой коэффициентов c_j ($j = 1.. \dim H_u$) (см. формулу (19)) приводит к системе уравнений относительно параметров a_k ($k = 1..K$):

$$[\Omega]\{a\} = 0, \tag{20}$$

где $[\Omega] = [\xi\xi] - [\pi\xi]^T [\pi\pi]^{-1} [\pi\xi]$, $[\xi\xi]_{lk} = (\xi_l, \xi_k)_H$, ($l, k = 1..K$), $n = \dim H_u$.

Если определитель матрицы $[\Omega]$ не равен нулю, то система уравнений (20) имеет только тривиальное решение.

Физически условие $\det[\Omega] \neq 0$ означает, что в системе нет возможности проводить независимое управление полными деформациями. Если матрица $[\Omega]$ оказывается нулевой, то это значит, что условие (14) выполняется для любых a_k ($k = 1..K$).

Независимое управление возможно только тогда, когда $\det[\Omega] = 0$. При этом множество линейно независимых вектор-столбцов $\{\omega\}$, удовлетворяющих (20), образует так называемое нуль-пространство (ядро) [1] матрицы $[\Omega]$:

$$[\omega] = \left[\begin{matrix} \{\omega\}_1, & \{\omega\}_2, & \dots, & \{\omega\}_S \end{matrix} \right],$$

тогда параметры a_k ($k = 1..K$) ростовой деформации определяются формулой

$$\{a\} = X_1 \{\omega\}_1 + X_2 \{\omega\}_2 + \dots + X_S \{\omega\}_S. \tag{21}$$

Соотношение (13) с учётом (21) принимает вид

$$\epsilon^g = \sum_{m=1}^S X_m \sum_{k=1}^K \omega_{km} \xi_k, \tag{22}$$

а задача (15) представляется в форме

$$\Phi \rightarrow \inf(X_m), \quad (23)$$

где X_m – теперь искомые параметры управления.

Таким образом, алгоритм управления можно сформулировать следующим образом: 1) необходимо знать соотношение (13) и базис в подпространстве H_u ; 2) необходимо вычислить матрицу $[\Omega]$ в формуле (20); 3) необходимо проверить возможность независимого управления деформациями $\det[\Omega] = 0$; 4) если независимое управление деформациями возможно, то необходимо найти ядро матрицы $[\Omega]$, т.е. матрицу $[\omega]$, решая при этом уравнение (20); 5) далее вычисляются собственные деформации ϵ^g согласно (22) (с точностью до известных пока компонент X_m); 6) вычисляется функционал $\Phi = \|\epsilon^0 - \epsilon^g\|_H$; 7) из (23) находятся параметры X_m ; 8) по формуле (21) находятся параметры собственной деформации a_1, a_2, \dots, a_k , которая не меняет напряжений и наилучшим образом приближается к заданной деформации ϵ^0 .

НЕЗАВИСИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ РОСТОВЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Рассмотренный подход, по мнению авторов, может быть успешно применен для моделирования процесса лечения расщелины твердого неба у детей. Для лечения применяются различные ортопедические устройства, например, зубодесневая пластинка, показанная на рисунке.

Пластинка оказывает постоянное давление на фрагменты твердого неба, что влияет на процессы роста. Правильно подобранное давление может вызвать низведение фрагментов твердого неба друг к другу, что существенно облегчит процедуру их хирургического соединения. С точки зрения биомеханики, эта задача видится как задача независимого управления ростовыми деформациями.

В работах [2, 6] показано, что определяющее соотношение для скорости ростовой деформации имеет вид

$$\xi^g = A\mathbf{I} + B\sigma, \quad (24)$$

где A и B – экспериментально определяемые параметры.

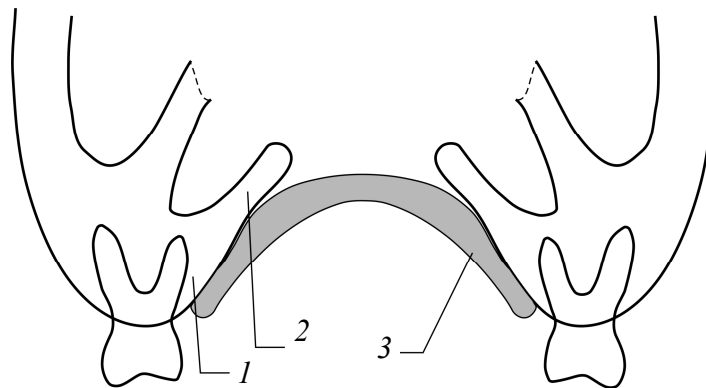


Рис. Схематичное представление двусторонней расщелины и ортопедической пластинки: 1 – альвеолярный отросток; 2 – фрагмент неба; 3 – ортопедическая пластинка

Применение метода конечных элементов к рассмотренной проблеме позволит записать напряжения в системе как линейную функцию узловых сил, возникающих в зоне контакта пластинки с фрагментами твердого неба. Следовательно, возможно будет записать ростовые деформации в виде формулы (13) и решать задачу независимого управления ростовыми деформациями во фрагментах твердого неба, используя разработанный авторами подход.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная в данной работе концепция позволяет приблизиться к решению задач независимого управления напряжениями и деформациями биологических тканей, в которых присутствуют ростовые процессы. Целенаправленное управление ростовыми деформациями для создания необходимого деформированного состояния исследуемой биологической системы без влияния на её напряжения с помощью разработанного алгоритма позволит эффективно исправлять такие патологии, как расщелина твёрдого неба, сколиоз и т.д. Однако для непосредственного решения таких задач необходимо провести дополнительные исследования особенностей распределения ростовых деформаций в частных случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
2. Няшин Ю.И., Лохов В.А. Основы биомеханики: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. – 210 с.
3. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
4. Туктамышев В.С., Лохов В.А. Метод независимого управления механическими напряжениями в деформируемых системах // Мех. композ. матер. и констр. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 269–281.
5. Irschik H., Ziegler F. Eigenstrain without stress and static shape control of structures // AIAA J. – 2001. – Vol. 39, No. 10. – P. 1985–1990.
6. Masich A.G., Chernopazov S.A., Simanovskaya E.Yu., Nyashin Yu.I., Dolgopolova G.V. The role of mechanical factor in orthopedic treatment of congenital palate cleft in children // Russian Journal of Biomechanics. – 2000. – Vol. 4, No. 1, – P. 33–42.
7. Mura T. Micromechanics of defects in solids. – 2nd ed. – Kluwer, Dordrecht, 1991. – 601 p.
8. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // ZAMM – Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – Vol. 85, No. 8. – P. 557–570.
9. Reissner H. Eigenspannungen und eigenspannungsquellen // ZAMM. – 1931. – Vol. 11. – P. 1–8.

INDEPENDENT STRESS AND DEFORMATION CONTROL IN GROWING LIVING TISSUES

V.S. Tuktamyshev, V.A. Lokhov, Y.I. Nyashin (Perm, Russia)

In this article, the concept of independent stress and deformation control in living tissues with growth processes is considered. Specified control of growth strains can change the configuration of a given living system without affecting its stress state, which in turn may be useful for treatment of some pathology in children. To solve such problems, a numerical algorithm based on the results obtained from mechanics of solids is suggested. In addition, to account the restrictions imposed by the nature for growth processes, the attempt to mathematical formalization of the growth strains distribution in living tissues is performed.

Key words: independent stress and deformation control, living tissues, theorem on decomposition, numerical algorithm.