

УДК 531/534: [57+61]

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОТЕЗА СТОПЫ

М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

Аннотация. Приведен обзор новых результатов по оптимизации конструкции упругого элемента (УЭ) протеза стопы. Протез моделируется в виде консольно закрепленной многолистовой рессоры. Между листами имеет место контакт с возможным отставанием; задача изгиба поэтому относится к контактным задачам теории балок. Найдена переменная толщина равнонапряженного однолиствого УЭ при сильном изгибе. Показано, что такой УЭ имеет эллиптический профиль. Найдены переменные толщины листов равнонапряженного двухлиствого УЭ при слабом изгибе для некоторых значений отношения длин листов. Показано, что при неравных длинах листов более длинный лист такого УЭ имеет внутренний шарнир. Доказано, что при дополнительных слабых ограничениях равнонапряженный УЭ может не существовать. Рассмотрен коэффициент использования материала УЭ. Сопоставлены задачи максимизации этого коэффициента и минимизации массы УЭ и выяснено, что связь этих задач не является простой. Обе задачи могут не иметь решений; первая задача может иметь решения, а вторая – не иметь; первая задача может иметь много решений, одно из которых является единственным решением второй.

Ключевые слова: протез стопы, упругий элемент, листовая рессора, линейный и нелинейный изгиб, контактная задача, равнонапряженный упругий элемент, коэффициент использования материала, минимизация массы.

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование и оптимизация протеза стопы являются одним из актуальных направлений протезостроения. Протез стопы должен воспроизводить ряд функций естественной стопы – опорную, функцию амортизации переднего толчка, функцию накопления потенциальной энергии, рессорную (распластывание под действием вертикальных сил), балансирующую (регуляция позы), адаптационную (способность ходьбы по наклонным поверхностям). Протез стопы должен также обладать достаточной прочностью.

Перечисленным требованиям наиболее полно удовлетворяют конструкции, содержащие так называемый упругий элемент (УЭ), который представляет собой консольно закрепленную многолистовую рессору. УЭ может быть стальным. На рис. 1, а показан серийный образец, изготовленный на экспериментальном заводе средств протезирования, г. Реутово, Московская область. Такие протезы сейчас наиболее распространены. Однако более перспективными являются УЭ, изготовленные из легких композиционных материалов. На рис. 1, б показан опытный образец УЭ, изготовленный в Пермском НИИ композиционных материалов из углепластика КМУ-4Л. На рис. 1, в представлен УЭ протеза *Carbon Copy*, изготовленный фирмой

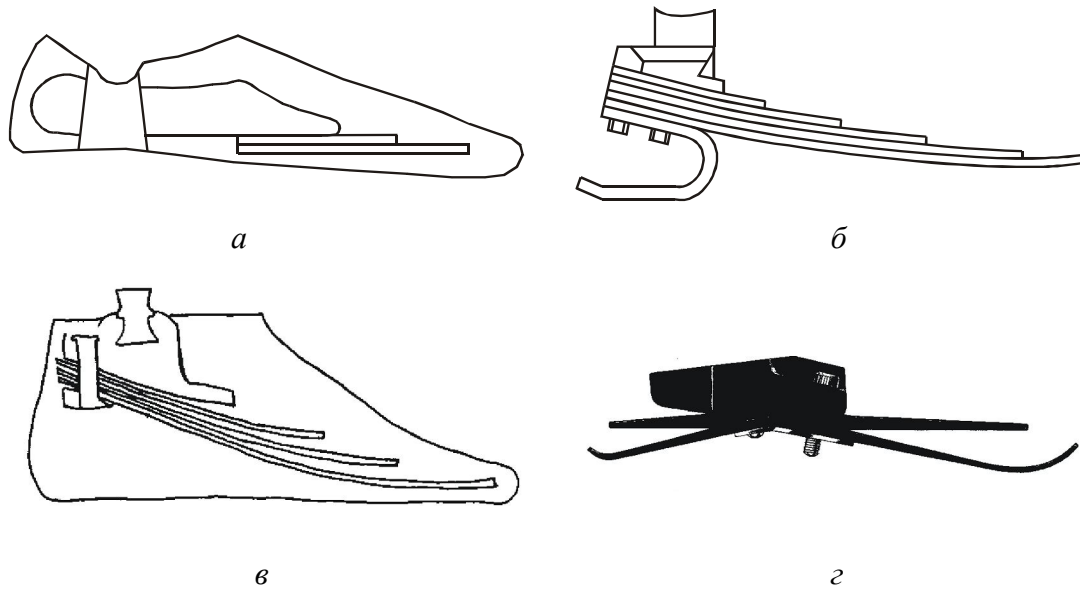


Рис. 1. Разновидности упругого элемента протеза стопы

Ohio Willow Wood Company, США [6]. На рис. 1, г показан УЭ протеза стопы *Quantum Foot*, изготовленный фирмой *Hanger Inter Med*, Великобритания.

Такие конструктивно сложные элементы протеза, будучи более эффективными при эксплуатации, требуют применения более новых методов проектирования, в частности, метода математического моделирования, который позволяет также оптимизировать конструкцию протеза стопы. В настоящей статье изложен ряд результатов по оптимизации УЭ протеза стопы, полученных авторами в последние годы. Эти результаты представляют интерес для специалистов в области расчета рессор и общей теории листовых рессор.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УЭ

Простейшая модель УЭ [2, 3, 7] представляет собой пачку N консольно закрепленных балок (листов) одинаковой ширины w , но с различными длинами l_1, \dots, l_N и различными переменными толщинами $h_1(x), \dots, h_N(x)$ (x – координата, отсчитываемая вдоль балки) (рис. 2).

В естественном состоянии (без нагрузки) листы являются плоскими и плотно прилегают друг к другу; трение между листами отсутствует. К краю самого длинного листа, перпендикулярно листу, приложена сосредоточенная следящая сила \mathbf{F} . Форма изогнутого листа (в равновесии) задается функцией $\varphi(x)$, где φ – угол между профилями изогнутого и неизогнутого листов (рис. 3). Если лист изогнут, то в точке с координатой x со стороны правой (по отношению к данной точке) части листа на левую действует сосредоточенный момент

$$M(x) = Ewh^3(x)\varphi'(x)/12, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга. При этом напряжение (единственная существенная компонента σ_{xx}) на нижней поверхности листа

$$\sigma(x) = Eh(x)\varphi'(x)/2. \quad (2)$$

Оптимальными считаются [1, 5] равнонапряженные УЭ, т.е. удовлетворяющие условию

$$|\sigma_n(x)| \equiv \sigma = \text{const}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3)$$

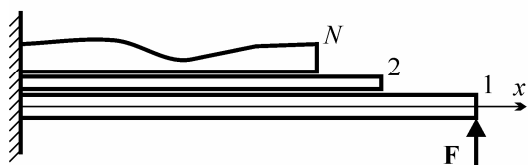


Рис. 2. Модель упругого элемента

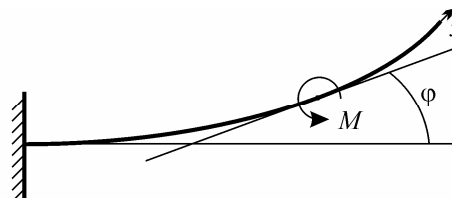


Рис. 3. Схема изгиба одного листа

Равнонапряженность может быть достигнута подбором функций $h_n(x)$. Рассмотрим вопрос об отыскании этих функций в некоторых частных случаях.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ОДНОЛИСТОВОГО УЭ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ИЗГИБЕ

Пусть УЭ однолистовой. Уравнение равновесия листа следует из (1) с учетом сделанного предположения о нагрузке (сосредоточенная сила):

$$Ewh^3(x)\varphi'(x)/12 = F \int_x^l \cos(\varphi(l) - \varphi(s)) ds. \quad (4)$$

Из (2)–(4) и условия защемления листа (при $x = 0$) находим

$$\begin{cases} \varphi''/\varphi'^3 = \lambda \cos(\varphi(l) - \varphi), \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(l) = +\infty, \end{cases} \quad (5)$$

где $\lambda = 3E^2F/4\sigma^3w$. Нелинейность задачи (5) означает, что рассматривается сильный изгиб. Решение (5) существует (и единственно) при $l/\lambda \leq 2$ и имеет вид

$$\varphi(x) = \arccos(1 - l/\lambda) - \arccos(1 - (l - x)/\lambda). \quad (6)$$

Тогда из (2), (3) получаем

$$h(x) = (2\sigma\lambda/E) \sqrt{1 - (1 - (l - x)/\lambda)^2}, \quad (7)$$

т.е. однолистовой равнонапряженный УЭ имеет эллиптический профиль.

Практически при нахождении профиля задается не σ , а прогиб УЭ

$$\Delta = \int_0^l \sin \varphi(x) dx.$$

Тогда из (6) находим, что $l/\lambda = 1 - \cos \alpha$, где $0 < \alpha \leq \pi$ – корень уравнения

$$(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)/(1 - \cos \alpha) = 2\Delta/l. \quad (8)$$

Легко установить, что при $\Delta/l \leq \pi/4$ это уравнение имеет единственное решение.

Если $\Delta/l \ll 1$ (слабый изгиб; эквивалентное условие: $|\varphi(x)| \ll 1$), то из (7), (8) получаем известный результат [5] – $h(x) = 2l(F/Ew\Delta)^{1/3} \sqrt{1 - x/l}$ – однолистовой равнонапряженный УЭ при слабом изгибе имеет параболический профиль.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОФИЛИ ДВУХЛИСТОВОГО УЭ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ИЗГИБЕ

Теперь рассмотрим двухлистовой УЭ при слабом изгибе. Предположим, что а) листы УЭ контактируют (кроме точки защемления) только в точке, расположенной на краю более короткого листа; б) $\sigma_n(x) \equiv \sigma$ (а не модуль, что требуется в (3)). Тогда уравнения равновесия листов УЭ имеют вид

$$Ewh_1^3(x)\varphi_1'(x)/12 = \begin{cases} -P(l_2 - x) + F(l_1 - x) & (0 \leq x \leq l_2), \\ F(l_1 - x) & (l_2 \leq x \leq l_1), \end{cases} \quad (9)$$

$$Ewh_2^3(x)\varphi_2'(x)/12 = P(l_2 - x), \quad (10)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad (11)$$

где P – сила взаимодействия листов, которая находится из условия контакта листов в точке $x = l_2$:

$$y_1(l_2) = y_2(l_2); \quad (12)$$

$$y_n(x) = \int_0^x \varphi_n(s) ds. \quad (13)$$

Из (9)–(13), (2), (3) (с учетом предположения (б)) можно получить уравнение для P в виде

$$\xi + 2\beta = (\xi + \beta)^2 / \sqrt{1 - \xi^2},$$

где $\beta = \sqrt{1 - l_2/l_1}$, $\xi = \sqrt{1 - Pl_2/F l_1}$. Легко установить, что при $0 \leq \beta < 1$ это уравнение имеет единственное решение ξ . Однако находя из (9)–(11), (2), (3) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и затем из (13) $y_1(x)$, $y_2(x)$, можно показать, что при $l_2 < l_1$ $\lim_{x \rightarrow 0} y_2(x)/y_1(x) < 1$ (верхний лист «проникает» под нижний), а при $l_2 = l_1$ $y_1(x) \equiv y_2(x)$. Таким образом, при $l_2 = l_1 = l$ получаем одинаковые параболические профили листов $h_1(x) = h_2(x) = 2l(F/2Ew\Delta)^{1/3} \sqrt{1 - x/l}$, а при $l_2 < l_1$ равнонапряженный УЭ, для которого выполняются принятые выше предположения (а) и (б), не существует.

Докажем, что при сохранении предположения (б) при $l_2 < l_1$ равнонапряженный УЭ не существует, даже если ослабить предположение (а) и допустить, что листы могут контактировать в произвольном конечном числе точек $0 < x_M < \dots < x_1 < x_0 = l_2 < l_1$. Учитывая, что при $0 \leq x \leq x_M$

$$Ewh_1^3(x)\varphi_1'(x)/12 = F(l_1 - x) - \sum_{m=0}^M P_m(x_m - x),$$

$$Ewh_2^3(x)\varphi_2'(x)/12 = \sum_{m=0}^M P_m(x_m - x),$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0,$$

где P_m – силы взаимодействия листов, получим с учетом (2), (3), (13) из условий $\varphi_1(x_M) = \varphi_2(x_M)$ и $y_1(x_M) = y_2(x_M)$ соответственно:

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4, \quad (A_1 + 2A_2)/(A_1 + A_2)^2 = (A_3 + 2A_4)/(A_3 + A_4)^2, \quad (14)$$

где

$$A_1 = \sqrt{F(l_1 - x_M) - \sum_{m=0}^{M-1} P_m(x_m - x_M)}, \quad A_2 = \sqrt{F l_1 - \sum_{m=0}^M P_m x_m}, \quad (15)$$

$$A_3 = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} P_m(x_m - x_M)}, \quad A_4 = \sqrt{\sum_{m=0}^M P_m}. \quad (16)$$

Из (14)–(16) следует, что $\sum_{m=0}^M P_m = F/2$ и $\sum_{m=0}^M P_m x_m / l_1 = F/2$, но эти два равенства противоречивы, так как $P_m > 0$ и $x_m < l_1$. Поэтому высказанное выше утверждение доказано.

Откажемся тогда от предположения (б), сохранив (а). Из (9), (2) следует, что если

$$Pl_2 > Fl_1, \quad (17)$$

то $\sigma_1(x)$ меняет знак в точке $x_* = (Pl_2 - Fl_1)/(P - F)$. Тогда из (9)–(13), (2), (3) получаем уравнение для P в виде

$$(1 + \eta)^2 = \left(2 - \sqrt{\eta(\eta + 3)}\right) \sqrt{\eta + \gamma/(\gamma - 1)},$$

где $\gamma = l_1/l_2$, $\eta = (P/F - \gamma)/(\gamma - 1)$. Легко установить, что при $\gamma > 1$ это уравнение имеет единственное решение η , которому соответствует P , удовлетворяющее условию (17). Тогда профиль нижнего листа

$$h_1(x) = \begin{cases} \sqrt{6(P - F)(x_* - x)/\sigma w} & (0 \leq x \leq x_*), \\ \sqrt{6(P - F)(x - x_*)/\sigma w} & (x_* \leq x \leq l_2), \\ \sqrt{6F(l_1 - x)/\sigma w} & (l_2 \leq x \leq l_1). \end{cases}$$

Заметим, что $h_1(x_*) = 0$; это означает, что в точке $x = x_*$ нижний лист имеет внутренний шарнир. Профиль верхнего листа параболический:

$$h_2(x) = \sqrt{6P(l_2 - x)/\sigma w}.$$

Для проверки непротиворечивости предположения (а) и требования равнонапряженности УЭ нужно исследовать знак разности $y_2(x) - y_1(x)$. Это исследование проводилось численно. Установлено, что $y_2(x) \geq y_1(x)$ при $\zeta < l_2/l_1 < 1$, где $\zeta = 2(4 - \sqrt{2})/7$, а при $l_2/l_1 < \zeta$ существуют $0 < x < l_2$, для которых $y_2(x) < y_1(x)$. Тем самым равнонапряженный УЭ с найденными выше профилями существует только при $l_2/l_1 > \zeta$. Вопрос о существовании равнонапряженных двухлистных УЭ при слабом изгибе для $l_2/l_1 < \zeta$ остается открытым и требует дальнейшего исследования.

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕРИАЛА УЭ

К вопросу об оптимизации УЭ протеза стопы можно подойти и с другой стороны. В литературе [4], [5] качество УЭ характеризуется коэффициентом использования материала (КИМ). Пусть УЭ изготовлен из материала с модулем упругости E и находится в равновесии под некоторой нагрузкой; U – потенциальная энергия упругой деформации УЭ, V – объем УЭ, σ_{\max} – максимальный модуль главного напряжения в УЭ. Тогда по определению КИМ – это величина

$$T = \frac{2EU}{V\sigma_{\max}^2}.$$

Для вычисления КИМ однолиствого УЭ обычно используется несколько более общая, чем рассмотренные выше, модель листа. Эта модель показана на рис. 4. Поперечное сечение – зависящая, вообще говоря, от x область $D(x)$. Главные центральные оси y, z сечения имеют постоянную (не зависящую от x) ориентацию. Изгиб листа происходит в плоскости xz под действием поперечной нагрузки с заданной эпюрой моментов $M(x)$. Для многолиствого УЭ при вычислении КИМ обычно используется модель рис. 2 с листами постоянной толщины.

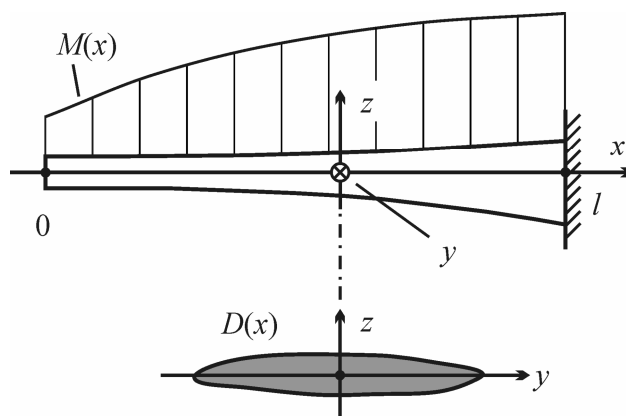


Рис. 4. Модель однолистового упругого элемента, используемая при вычислении

В рамках этих моделей можно найти [4], что для однолистового УЭ с произвольным переменным сечением

$$T = \int_0^l \frac{M^2(x) dx}{J(x)} \bigg/ \int_0^l S(x) dx \left[\max_{0 \leq x \leq l} \frac{\zeta(x) M(x)}{J(x)} \right]^2,$$

где $S(x)$ – площадь сечения,

$$J(x) = \iint_{D(x)} z^2 dy dz, \quad \zeta(x) = \max_{(y,z) \in D(x)} |z|.$$

Для двухлистового УЭ

$$T = \frac{\mu(1 + \mu^3) [\lambda^2(3 + \lambda) + 4\mu^3]}{9(1 + \mu - \lambda) \left\{ \max \left[\mu^2(2 + \lambda), |2\mu^3 - \lambda|, 2\lambda(1 + \mu^3) \right] \right\}^2},$$

где $\lambda = 1 - l_2/l_1$, $\mu = h_1/h_2$.

По отношению к КИМ можно ставить две различные задачи оптимизации.

Задача 1. Найти параметры УЭ, для которых $T = \max$.

Задача 2. При заданных E , l , $M(x)$ (для двухлистового УЭ – E , l_1 , P) и при условиях

$$f = f_0, \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_0, \quad (18)$$

где f – прогиб УЭ (f_0 , σ_0 заданы), найти параметры УЭ, для которых $V = \min$ (плотность материала считаем постоянной, поэтому минимизация объема эквивалентна минимизации массы).

Можно показать [4], что для решений этих задач справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для однолистового УЭ с произвольным переменным сечением задача 1 не имеет решения: $T < 1$ и существует последовательность УЭ, для которой $T \rightarrow 1$. В этом случае и задача 2 не имеет решения: существует число V_{1*} такое, что $V > V_{1*}$, и существует последовательность УЭ, для которой (18) выполнены и $V \rightarrow V_{1*}$.

Утверждение 2. Для однолистового УЭ с произвольным постоянным сечением задача 1 не имеет решения: существует число T_* такое, что $T < T_*$, и существует последовательность УЭ, для которой $T \rightarrow T_*$. В этом случае и задача 2 не имеет решения: существует число V_{2*} такое, что $V > V_{2*}$, и существует последовательность УЭ, для которой (18) выполнены и $V \rightarrow V_{2*}$.

Утверждение 3. Для однолистового УЭ с сечением в виде прямоугольника постоянной ширины и произвольной переменной высоты задача 1 имеет неединственное решение: $h(x) = \text{const} \sqrt{M(x)}$, причем $T = 1/3$. В этом случае существование решения задачи 2 зависит от значения величины

$$B = \int_0^l \frac{x dx}{\sqrt{M(x)}}.$$

Если $B < \infty$, то задача 2 имеет единственное решение:

$$h(x) = \frac{2\sigma_0 B \sqrt{M(x)}}{f_0 E}, \quad w = \frac{3f_0^2 E^2}{2\sigma_0^3 B^2},$$

причем

$$V = \frac{3f_0 E}{\sigma_0^2 B} \int_0^l \sqrt{M(x)} dx.$$

Если $B = \infty$, то задача 2 не имеет решений: существует последовательность УЭ, для которой (18) выполнены и $V \rightarrow 0$.

Утверждение 4. Для двухлистового УЭ задача 1 имеет неединственное решение: $\lambda = 9/13$, $\mu = 3/2$ (неединственность состоит в том, что определяются только отношения l_2/l_1 и h_1/h_2), причем $T = 71/423$. В этом случае задача 2 имеет единственное решение:

$$l_2 = 4l_1/13, \quad h_1 = (142/169) \cdot (l_1^2 \sigma_0 / E f_0), \quad h_2 = 2h_1/3, \\ w = (59319/10082) \cdot (P f_0^2 E^2 / \sigma_0^3 l_1^3),$$

причем

$$V = (423/71) \cdot (P f_0 E / \sigma_0^2).$$

Аналогично результату утверждения 4, можно найти оптимальное значение КИМ для N -листвого УЭ с листами постоянного прямоугольного сечения. Соответствующий результат приведен на рис. 5. При больших N величина T близка к значению $1/3$, соответствующему однолистному УЭ параболического профиля.

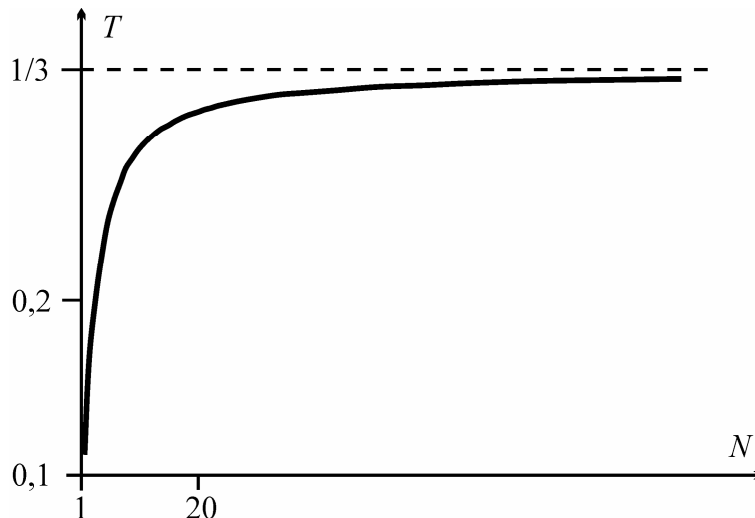


Рис. 5. Зависимость оптимального КИМ от числа листов упругого элемента

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ряд новых результатов оптимизации конструкции УЭ протеза стопы позволяет перейти к проектированию новых нестандартных конструкций. При сильном изгибе следует использовать не параболический, а эллиптический профиль листа. Также можно применить конструкцию с внутренним шарниром. Установлена связь задач максимизации КИМ и минимизации массы УЭ. Эта связь не является простой, что говорит о необходимости с некоторой осторожностью использовать данный коэффициент для оценки оптимальности УЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брынских С.И., Осипенко М.А., Няшин Ю.И. Оптимизация двухлистового упругого элемента протеза стопы с использованием линейной и нелинейной теорий изгиба // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 2. – С. 9–19.
2. Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н. К теории изгиба листовой рессоры // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 6. – С. 134–143.
3. Осипенко М.А., Брынских С.И. Отыскание толщин листов равнонапряженных листовых рессор // Вычислительная механика. – Пермь, 2004. – № 2. – С. 51–54.
4. Осипенко М.А., Таланцев Н.Ф. О свойствах коэффициента использования материала листовой рессоры // Изв. вузов. Поволжский регион. Технические науки. – 2009. – № 2(10). – С. 134–144.
5. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. – М.: Машиностроение, 1978. – 227 с.
6. Geil M.D., Parnianpour M., Berme N. Significance of nonsagittal power terms in analysis of a dynamic elastic response prosthetic foot // Journal of Biomechanical Engineering. – 1999. – Vol. 121. – P. 521–524.
7. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40. – P. 3129–3136.

ON OPTIMIZATION OF THE FOOT PROSTHESIS ELASTIC ELEMENT

M.A. Osipenko, Y.I. Nyashin (Perm, Russia)

The survey of the new results on the optimization of the foot prosthesis elastic element (EE) is given. The prosthesis is modelled as the cantilever multileaf spring. There is the unbonded contact between the leaves, therefore the bending problem belongs to the beam contact problems. The variable thickness of the uniform-strength of the one-leaf EE is found in the case of the strong bending. It appears that such EE has the elliptic profile. The variable thicknesses of the uniform-strength two-leaf EE leaves are found in the case of the weak bending for some values of the leaves lengths ratio. It appears that in the case of different leaves lengths the longer leaf has the internal joint. It is proved that the uniform-leaf EE may not exist under the additional weak constraints. The material utilization coefficient of the EE is considered. The problems of this coefficient maximization and EE mass minimization are compared. It turns out that the relations of these problems are not simple. The both problems can have no solutions; the first problem can have the solution, while the second problem has no solutions; the first problem can have many solutions, one of them being the unique solution of the second problem.

Key words: foot prosthesis, elastic element, leaf spring, linear and nonlinear bending, contact problem, uniform-strength elastic element, material utilization coefficient, mass minimization.

Получено 11 мая 2011