

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДАЧИ ВОЛЕЙБОЛЬНОГО МЯЧА

Р.Н. Рудаков*, Т.А. Ширинкин**, Н.Ю. Артюшков***,
А.И. Братчиков****, С.А. Михеева****

* Россия, 614600, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, Пермский государственный технический университет, кафедра теоретической механики

** Россия, 614600, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, Пермский государственный технический университет, факультет прикладной математики и механики

*** Россия, 614600, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, Пермский государственный технический университет, электротехнический факультет

**** Россия, 614600, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, Пермский государственный технический университет, кафедра физического воспитания

Аннотация: Поддачи волейбольного мяча можно разделить на силовые, планирующие и навесные. Для силовых подач характерна высокая начальная скорость, планирующие подачи отличаются нерегулярностью движения мяча, а цель навесной подачи приземлить мяч на стороне соперника как можно ближе к сетке. В литературе теоретический анализ этих подач отсутствует. В настоящей работе исследуются силовая и навесная подачи. Механизм нерегулярности движения мяча при планирующей подаче пока не изучен. В первой части работы рассмотрены методы определения скорости мяча по высоте отскока и его деформации при ударе. Для волейболистов первого разряда эта скорость оказалась несколько меньше 20 м/с. Далее приводятся дифференциальные уравнения движения волейбольного мяча как материальной точки и разностные уравнения, которые решались численно. Анализ траекторий показал, что наиболее эффективна силовая подача из ближней зоны. При подаче с линии площадки на высоте 2.5 м при скорости мяча 22.8 м/с он приземляется на стороне соперника со скоростью 13.5 м/с. В навесной подаче при высоте зала 6 м оптимальная траектория получена при начальной скорости 12 м/с, угле вылета мяча 55°. Мяч приземляется в 2.5 м от сетки на стороне соперника.

Ключевые слова: волейбольный мяч, подача, оптимальная траектория

1. Определение максимальной скорости подачи мяча

В волейболе скорость движения мяча не регистрируется, поэтому нужны простые и надежные методы определения скорости подачи мяча без применения специальной техники. Такие методы разработаны и опробованы на базе сборной Пермского государственного технического университета по волейболу.

Первоначально был экспериментально определен коэффициент восстановления k скорости волейбольного мяча при прямом центральном ударе о деревянный пол. Мяч свободно падал с высоты H и отскакивал от преграды на высоту h . Известная формула для коэффициента восстановления $k = \sqrt{h/H}$ для волейбольного мяча при его падении с высоты нескольких метров неприемлема, так как существенное влияние на движение мяча оказывают силы аэродинамического сопротивления. При падении мяча с высоты H его конечная скорость определяется по формуле [1]

$$v = \frac{1}{f} \sqrt{1 - e^{-2gHf^2}}, \quad (1)$$

и аналогично находится скорость после отскока по высоте подъема мяча h :

$$u = \frac{1}{f} \sqrt{e^{-2gHf^2} - 1}, \quad (2)$$

где

$$f = \sqrt{\frac{c_x \rho S}{2mg}}, \quad (3)$$

где ρ – плотность воздуха, S – площадь миделя шара ($S = \pi R^2$), m – масса мяча, g – ускорение свободного падения, c_x – аэродинамический коэффициент лобового сопротивления движению мяча.

Коэффициент восстановления равен отношению скорости после удара и скорости до удара:

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{e^{2ghf^2}}{1 - e^{-2gHf^2}}}. \quad (4)$$

В проведенных опытах максимальная высота сбрасывания была равна 9 м. Расчетная скорость падения с этой высоты $V=11.5$ м/с, а коэффициент восстановления $k = 0.75$. С ростом скорости значение коэффициента k слабо падает и по экстраполяции при $v=20$ м/с было получено значение $k = 0.65$, которое принято для оценки максимальной начальной скорости подачи мяча.

Значение k позволяет оценить скорость мяча по высоте отскока h от горизонтальной преграды:

$$v = \frac{u}{k} = \frac{1}{kf} \sqrt{e^{2gHf^2} - 1}. \quad (5)$$

При $\rho = 1.3$ кг/м³, $R = 0.105$ м, $m = 0.27$ кг, $g = 9.8$ м/с², $k = 0.65$ и при максимальной высоте отскока $h = 6$ м, полученной экспериментально, формула (5) с учетом (2), (3) дает скорость $v = 18.7$ м/с.

Второй способ определения скорости мяча состоит в нахождении его деформации при ударе о преграду. На пол кладется лист белой бумаги, под который подкладывается копировальная бумага. По диаметру пятна d_k определяется деформация мяча s_k (рис.1).

При расчетах пренебрегаем изменением массы движущейся части мяча и изменением давления внутри мяча при ударе. Применяется теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в фазах торможения и восстановления формы. Так как в конце первой фазы мяч останавливается, то имеем:

$$\begin{aligned} -m \frac{V_0^2}{2} &= -A_1 - A_2, \\ m \frac{U^2}{2} &= A_1 - A_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где m – масса мяча, V_0 – скорость до удара, U – скорость после удара, A_1 и A_2 – абсолютные значения работ упругих сил и неупругих сил соответственно.

Работа упругих сил определяется работой сил избыточного давления воздуха в мяче и она не зависит от фазы удара. Также предполагается, что потеря энергии, равная A_2 , одинакова в обеих фазах.

Из уравнений (6) с учетом того, что $U = kV$ получим

$$V_0 = \sqrt{\frac{4A_1}{m(1+k^2)}}. \quad (7)$$

Величина упругой силы, действующей на мяч, равна избыточному давлению внутри мяча p , умноженному на площадь контакта с преградой

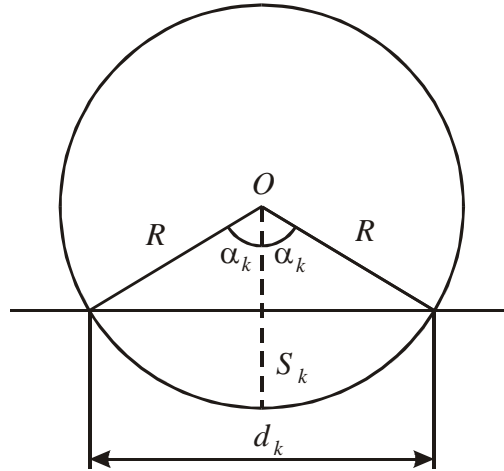


Рис. 1. Деформация мяча при ударе о преграду.

$$F = p\pi \frac{d^2}{4}, \quad (8)$$

где d – диаметр круга, изменяющийся от 0 до d_k .

Работа упругой силы

$$A_1 = \int_0^{S_k} F dS. \quad (9)$$

Выражая переменные через угол α и интегрируя получим:

$$A_1 = p\pi R^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha_k + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha_k \right), \quad (10)$$

где R – радиус мяча, а угол α_k может быть выражен через диаметр пятна и радиус шара:

$$\alpha_k = \arcsin \frac{d_k}{2R}. \quad (11)$$

Формулы (7), (10), (11) определяют начальную скорость мяча. Для волейбольного мяча $m=0.27$ кг, $R=0.105$ м, $p=0.44 \cdot 10^5$ Па. Из опыта при максимальной силе удара по мячу диаметр пятна оказался равным $d_k=0.17$ м. По этим значениям величин и при $k=0.65$ получилась величина начальной скорости $V_0=15.6$ м/с, что дает несколько заниженное значение по сравнению с первым способом, так как в расчетах не учтено изменение движущейся массы мяча и давления в мяче при ударе.

2. Математическое моделирование движения мяча

При полете мяча на него действует сила тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, направленная вертикально вниз, и сила сопротивления воздуха \mathbf{R} , направленная в сторону, противоположную скорости полета \mathbf{V} и пропорциональная квадрату скорости:

$$\mathbf{R} = -\mu V\mathbf{V},$$

где $\mu = 0.5\rho S C_x$, ρ – плотность среды, S – площадь миделя ($S = \pi R^2$), C_x – коэффициент аэродинамического сопротивления (для шара 0.45).

Направим ось x горизонтально в сторону движения мяча, ось y – вертикально вверх, обозначим через u , v проекции вектора скорости \mathbf{V} на оси x и y , соответственно, и запишем по II закону Ньютона дифференциальные уравнения движения мяча как материальной точки:

$$\begin{aligned}
m \frac{du}{dt} &= -\mu V u, \\
u &= \frac{dx}{dt}, \\
m \frac{dv}{dt} &= -mg - \mu V v, \\
v &= \frac{dy}{dt}, \\
V &= \sqrt{u^2 + v^2}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Все время полета разобьем на малые равные интервалы времени Δt и для i -го шага по времени запишем (7) в разностном виде

$$\begin{aligned}
m \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} &= -\mu V_i u_i, \\
\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} &= u_i, \\
m \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} &= -mg - \mu V_i v_i, \\
\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} &= v_i, \\
V_i &= \sqrt{u_i^2 + v_i^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Это явная разностная схема 1-го порядка точности, которая определяет функции на $i + 1$ шаге по времени по их значениям на i -м шаге. При $i = 0$ функции x_i, y_i, u_i, v_i заданы в соответствии с начальными условиями. Вычисления проводятся при $i = 0, 1, 2, \dots$, давая приближенное решение задачи Коши.

3. Компьютерная оптимизация подачи волейбольного мяча

Наибольший интерес представляет оптимизация подачи из ближней зоны – с линии игровой площадки. При силовой подаче начальная высота мяча бралась равной 2.5 м, а в качестве варьируемых параметров были приняты модуль начальной скорости и угол, составляемый вектором начальной скорости мяча с горизонтом. Мяч должен пролететь над сеткой высотой 2.43 м и упасть на площадку соперника, длина которой равна 9 м. При оптимальной подаче мяч должен иметь максимальную скорость перед касанием площадки. Оптимизация была проведена путем анализа различных траекторий, выведенных на экран компьютера и отбора траектории с максимальной скоростью падения. Траектория, близкая максимальной, приведена на рис. 2. Мяч подается с начальной скоростью 22.8 м/с, что несколько выше показателей исследуемой группы спортсменов, под углом 7.5 градуса к горизонту. Конечная скорость мяча равна 13.5 градуса. Еще более эффективна подача в прыжке из зоны игровой площадки при более высоком начальном положении мяча.

При силовой подаче из дальней зоны достигаются приблизительно такие же показатели, что и при подаче из ближней зоны, однако требуются существенно более высокая начальная скорость мяча.

На рис. 3 приведена оптимальная траектория при навесной подаче. Критерий оптимизации – минимальное расстояние точки падения мяча от сетки. При ограничении на высоту траектории (6 м) оптимальная начальная скорость равна 12 м/с,

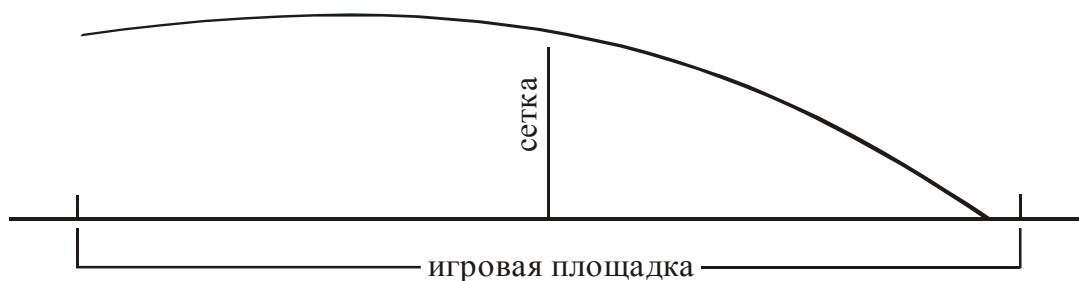


Рис. 2. Силовая подача с края площадки

Начальная высота:	2.5 м
Начальная скорость:	22.8 м/с
Начальный угол:	7.5 град
Расстояние от передней линии:	0.0 м
Максимальная высота:	2.9 м
Расстояние над сеткой:	0.3 м
Время полета:	1.1 с
Расстояние до задней линии:	0.2 м
Конечная скорость:	13.5 м/с

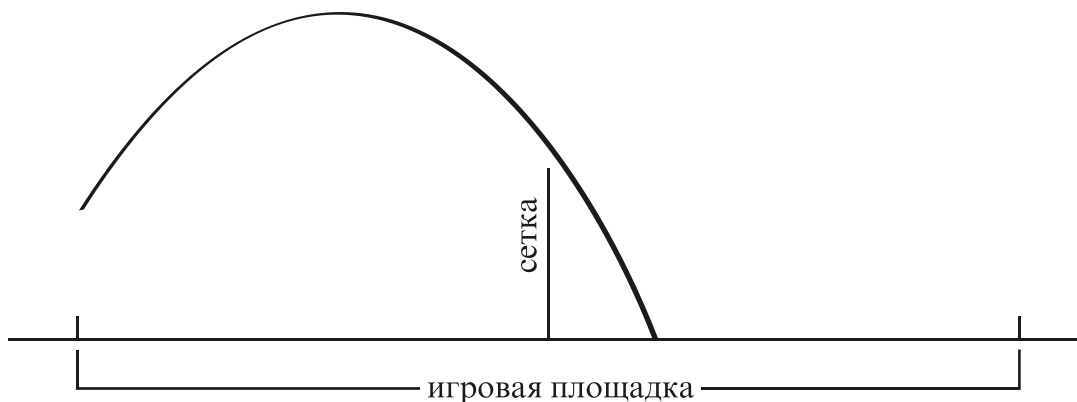


Рис. 3. Навесная подача с края площадки.

Начальная высота:	1.5 м
Начальная скорость:	12.0 м/с
Начальный угол:	55 град
Расстояние от передней линии:	0.0 м
Максимальная высота:	5.5 м
Расстояние над сеткой:	0.5 м
Время полета:	2.0 с
Расстояние до задней линии:	7.5 м
Конечная скорость:	102 м/с.

а угол подачи составляет 55 градусов с горизонтом. В этом случае мяч приземляется на расстоянии 2.5 м от сетки.

Таким образом, проведенное численное исследование подачи мяча при игре в волейбол показало, что наиболее эффективна силовая подача из ближней зоны.

Литература

1. Р.Н. РУДАКОВ. **Общие теоремы динамики и их приложение к решению задач биомеханики.** Пермь, Пермский государственный технический университет, 1999.

MATHEMATICAL SIMULATION OF A VALLEYBALL SERVICE

**R.N. Rudakov, T.A. Shirinkin, N.Yu. Artjushkov, A.I. Bratchikov, S.A. Mikheyeva
(Perm, Russia)**

Volleyball services may be classified into three main types. The service involving strength is characterized by high initial velocity of the ball. The floater service is distinguished by irregularity of the ball motion. The aim of the service with plunging trajectory is the ball landing on the opponent's court side as close as possible to the volleyball net. As the mechanism of irregular ball motion during the floater service has been studied insufficiently, the subject of the present paper is the investigation of the high speed service and the plunging trajectory one. Methods of determination of the ball's velocity by the bounce height of the ball and its deformation during impact are considered in the first part of the paper. For first-grade volleyball players this velocity is about 20 m/s. Then the differential equations of the ball motion where the ball is considered as a material particle, and the numerical methods of seeking their solution are presented. The analysis of ball trajectories showed the high speed service from the nearest zone being the most effective. When the launching position is situated at the front line of the volleyball pitch at the height of 2.5 m (the service with jumping), and the initial velocity of the ball is 22.8 m/s, its landing velocity is 13.5 m/s. For the in-door court with 6 m height, the optimal plunging trajectory service turns out to be with the initial velocity of 12 m/s and the launching angle of 55°. In this case the ball lands on the opponent's side at 2.5 m from the volleyball net.

Key words: volleyball service, ball, optimal trajectory

Получено 22 мая 2000