

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ТЕННИСНОГО ШАРИКА

Р.Н. Рудаков*, А.В. Каменских**, П.В. Шульгин**

* Россия, 614600, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, Пермский государственный технический университет, кафедра теоретической механики

** Россия, 614600, Пермь, Комсомольский проспект, 45, Муниципальное образовательное учреждение средняя школа №9 им. А.С. Пушкина с углубленным изучением предметов физико-математического цикла

Аннотация: При игре в настольный теннис важную роль играет вращение шарика, которое создает подъемную силу (эффект Магнуса). Зависимость аэродинамических сил от скорости поступательного движения и угловой скорости вращения шара исследовалась ранее экспериментально [1,2]. В настоящей статье показано, что в настольном теннисе параметры движения шарика согласуются с диапазоном исследуемых параметров в [1,2], что позволило найти аэродинамические силы, действующие на теннисный шарик. Составлены дифференциальные уравнения движения центра масс теннисного шарика, которые решались численно методом пошагового интегрирования. Исследованы траектории движения шарика после его приема в ближней и дальней зонах при прямом центральном ударе по шару, а также приеме накатом (верхнее вращение). Найдены оптимальные способы приема шарика и оптимальные траектории, которые обеспечивают попадание шарика на сторону стола соперника с максимальной скоростью.

Ключевые слова: настольный теннис, аэродинамические силы, оптимальные траектории.

1. Система действующих на шарик сил

В данной работе рассматриваются плоские траектории движения шарика. На рис.1 приведена траектория движения мяча в вертикальной плоскости OXY . Однако приведенные ниже уравнения позволяют исследовать и пространственные движения.

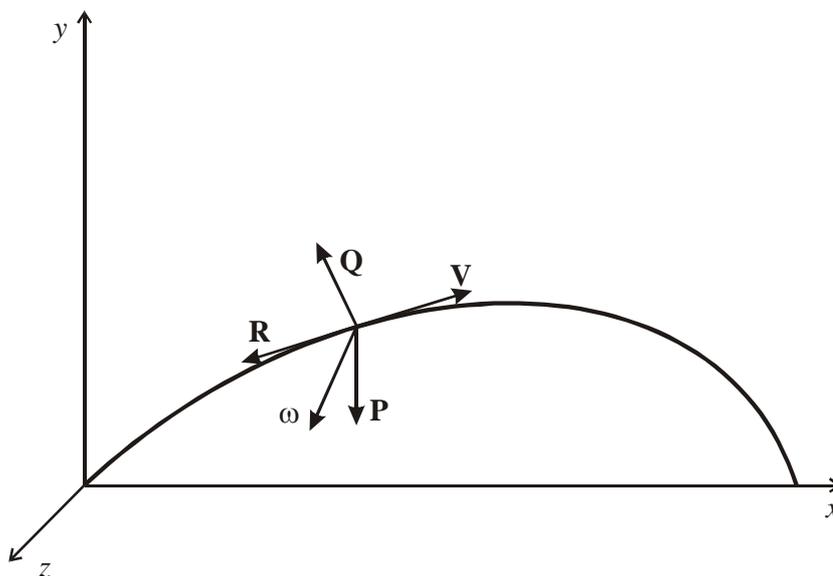


Рис.1. Система сил, действующих на теннисный шарик при его обратном вращении.

Кинематические характеристики движения – вектор скорости поступательного движения \mathbf{V} , направленный по касательной к траектории центра масс, и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, направленный по оси Z в случае подрезки.

При полете шарика на него действуют следующие силы: сила тяжести $P=mg$, где m – масса шарика, g – ускорение свободного падения; сила лобового сопротивления R и подъемная сила Q

$$R = \frac{1}{2}\rho C_D S V^2 \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{2}\rho C_L S V^2 \quad (2)$$

где ρ – плотность воздуха, S – площадь наибольшего сечения шара, перпендикулярная \mathbf{V} , C_D и C_L – аэродинамические коэффициенты, соответственно, лобового сопротивления и подъемной силы, момент сил трения относительно центра масс не учитывался, ввиду его малости.

Сила тяжести \mathbf{P} направлена вертикально вниз. Сила лобового сопротивления \mathbf{R} направлена противоположно вектору скорости \mathbf{V} :

$$\mathbf{R} = -\frac{\mathbf{V}}{V} \quad (3)$$

Сложнее обстоит дело с определением направления подъемной силы \mathbf{Q} , обусловленной эффектом Магнуса. Теоретического обоснования этого эффекта нет, однако основной механизм возникновения поперечной силы состоит в том, что при полете шарика встречный поток воздуха взаимодействует с потоком воздуха, приводимого в движение вращающимся шариком. В зоне смешанных потоков образуется область повышенного давления. Так, при полете шарика после подрезки область смещения находится вблизи нижней части шарика и поэтому возникает подъемная сила. Термин «подъемная сила» используется и при других направлениях поперечной аэродинамической силы. В эксперименте подъемная сила измеряется как сила направленная перпендикулярно векторам $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{V} . Из опыта также известно, что она направлена в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{\omega}$ к вектору \mathbf{V} виден происходящим против часовой стрелки. Это позволяет применить правило векторного произведения двух векторов:

$$\mathbf{Q} = Q \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}}{|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}|}, \quad (4)$$

где прямые скобки означают модуль векторного произведения. Для случая подрезки вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен параллельно оси Z (рис.1). Для этого частного случая из (4) следует:

$$\begin{aligned} Q_x &= -Q \frac{V_y}{V}, \\ Q_y &= -Q \frac{V_x}{V}, \\ Q_z &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для наката знаки сил противоположны. При произвольном вращении могут быть отличны от нуля все три проекции подъемной силы.

2. Аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы

Определение аэродинамических коэффициентов – центральная часть проблемы исследования движения тел в сплошных средах. Для шара при отсутствии вращения коэффициент лобового сопротивления экспериментально найден в большом диапазоне

изменения скоростей [1], а при наличии вращения [2]-в более узкой области параметров.

2.1. Отсутствие вращения

Полагаем, что после приема мяча он летит поступательно или медленно вращается, когда эффект Магнуса невелик и можно принять, что коэффициент $C_L=0$. Для поступательного движения шара известна зависимость аэродинамического сопротивления C_D от числа Рейнольдса Re [1] ($Re=Vd/\nu$, d – диаметр шарика, ν – кинематическая вязкость воздуха).

Эта зависимость приведена на рис. 2. На графике видно, что в области чисел Re от 1000 до 250 000 коэффициент лобового сопротивления C_D практически постоянная величина, равная приблизительно 0.45. Для теннисного шарика, летящего в воздухе ($d = 0.038$ м, $\nu = 0.15 \cdot 10^{-4}$ м²/с) приведенные значения чисел Рейнольдса соответствуют скоростям от 0.4 м/с до 100 м/с, что с большим запасом охватывает диапазон скоростей шарика при игре в настольный теннис. Таким образом, при отсутствии вращения шарика можно принять для расчетов, что $C_D = 0.45$, $C_L = 0$.

2.2. Наличие вращения

Рассмотрим сложное движение шарика, состоящее из поступательного движения со скоростью V и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс с угловой скоростью ω . Важной характеристикой движения является отношение экваториальной скорости, обусловленной вращением, к скорости поступательного движения

$$n = \frac{\omega d}{2V}$$

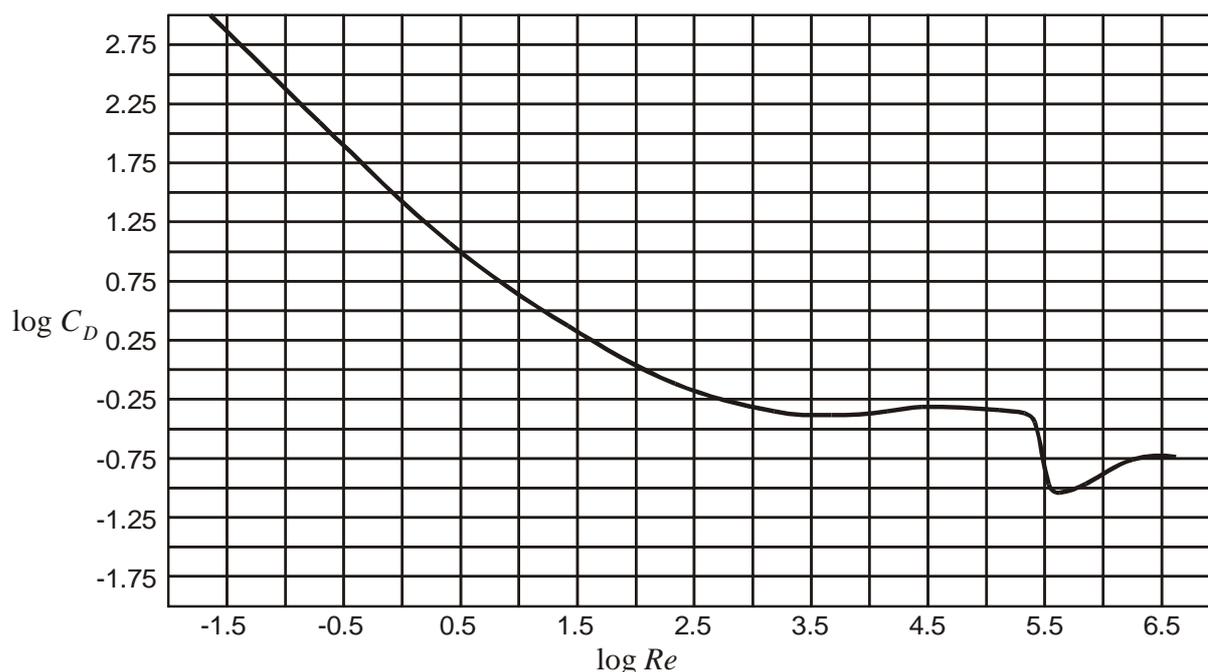


Рис. 2. Зависимость аэродинамического коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса.

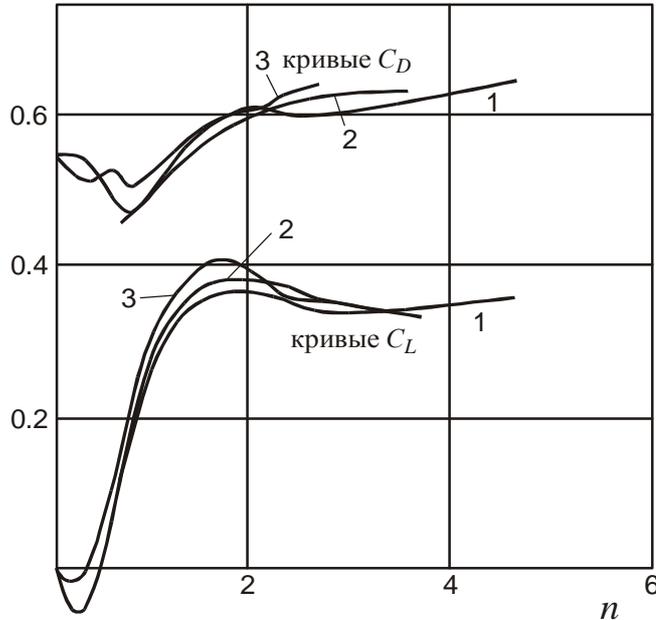


Рис. 3. Зависимость аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления C_D и подъемной силы C_L от отношения экваториальной скорости к скорости потока: 1 – $Re = 6.15 \cdot 10^4$, 2 – $Re = 7.74 \cdot 10^4$, 3 – $Re = 10.70 \cdot 10^4$

В работе [2] приведены зависимости значений коэффициентов C_D и C_L от этого отношения для некоторых значений числа Рейнольдса. Эти зависимости показаны на рис. 3. На графиках видно, что при достаточно быстром вращении мяча аэродинамические коэффициенты слабо зависят от отношения n . Как показано в следующем параграфе, при ударе по неподвижному мячу достигается $n = 1.5$. При ударе по вращающемуся мячу это отношение может быть и больше. В соответствии с рис.3 примем, что $C_D=0.6$, $C_L=0.35$.

Значения аэродинамических коэффициентов C_D и C_L получены для больших скоростей мяча – от 25 до 40 м/с. Однако, поскольку они слабо зависят от Re , то это дает основание принять такие же значения коэффициентов для меньших скоростей. Такое соотношение оправдывается также согласованием расчетных траекторий с реальными.

3. Оценка угловой скорости вращения теннисного шарика

Рассмотрим удар ракеткой по неподвижному шару. Полагаем, что нет проскальзывания шарика по ракетке, когда достигается наибольший эффект вращения шарика.

Скорость ракетки U и составляет угол α с плоскостью ракетки. После удара центр масс ракетки получает скорость V , составляющие которой V_τ и V_n , и шар вращается с угловой скоростью ω . Составляющая скорости V_n находится через скорость U :

$$V_n = kU \sin \alpha, \quad (6)$$

где k – коэффициент восстановления при ударе (для мягких покрытий ракеток $k \approx 0.5$)

Для определения V_τ и ω воспользуемся теоремами об изменении количества движения и кинетического момента шара при ударе. Так как до удара шар был неподвижен, то из теорем имеем:

$$mV_\tau = S_\tau, \quad (7)$$

$$J_c \omega = S_\tau r, \quad J_c = \frac{2}{3} mr^2, \quad (8)$$

где J_c – момент инерции шарика, полого внутри, относительно оси, проходящей через центр масс; $r = \frac{d}{2}$ – радиус шарика; S_τ – касательная компонента ударного импульса, действующего на шарик со стороны ракетки. Система уравнений (7)-(8) дает решение $\frac{\omega r}{V_\tau} = 1,5$. Наиболее эффективное вращение происходит при малых углах α , когда V_n мало. Тогда допуская, что $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\tau$ окончательно получим отношение скоростей

$$n = \frac{\omega r}{V} = 1,5,$$

используемое в предыдущем параграфе.

4. Уравнения движения центра масс шарика

$$m \mathbf{a}_c = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{Q}, \quad (9)$$

где \mathbf{a}_c – ускорение центра масс шарика ($\mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$), \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} – силы, описанные в параграфе 1. Проектируя левую и правую части (10) на оси координат и вводя обозначения $V_x = U$, $V_y = v$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} m \frac{dU}{dt} &= -R \frac{U}{V} \mp Q \frac{v}{V}, \\ \frac{dx}{dt} &= U, \\ m \frac{dv}{dt} &= -mg - R \frac{v}{V} \pm Q \frac{U}{V}, \\ \frac{dy}{dt} &= v, \quad (10) \\ R &= \frac{1}{2} \rho C_D S V^2, \\ Q &= \frac{1}{2} \rho C_L S V^2, \\ V &= \sqrt{U^2 + v^2}, \end{aligned}$$

где x , y – координаты центра масс шарика, верхний знак в слагаемом с подъемной силой относится к подрезке, нижний – накату. Задаваемые параметры задачи:

$\rho = 1.23 \text{ кг/м}^3$, $m = 0.0023 \text{ кг}$, $S = \pi \frac{d^2}{4}$ ($d = 0.038 \text{ м}$). В случае прямого удара

$C_D = 0.45$, $C_L = 0$, при накате и подрезке $C_D = 0.6$, $C_L = 0.35$.

Решается задача Коши с начальными условиями для функций $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$.

Решение находилось численно методом Эйлера.

5. Оптимизация приема мяча

Для отладки алгоритма первоначально было решено несколько тестовых задач – падение теннисного шарика без начальной скорости, движение шарика, брошенного вертикально вверх и под углом к горизонту. Полученные результаты совпадают с данными, приведенными в [3]. Однако в работе [3] не рассматривалось влияние

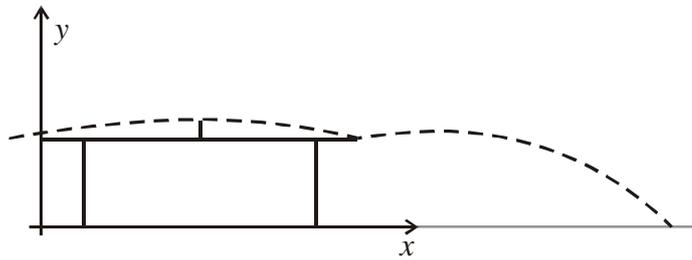


Рис. 4. Оптимальная траектория после приема мяча в ближней зоне прямым ударом. Параметры: $\alpha = 10.5^\circ$, $V_0 = 11.2$ м/с, $V_k = 6.46$ м/с, расстояние до стола – 0.3 м, высота – на уровне стола, удар – прямой.

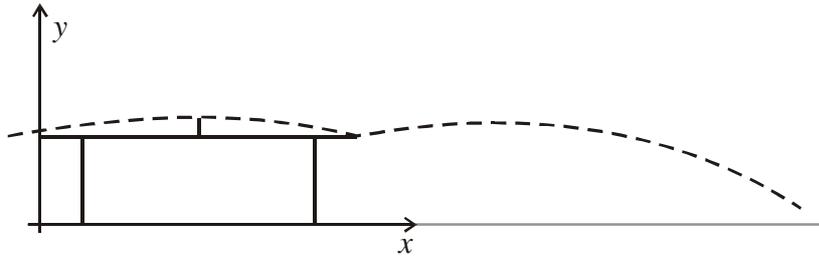


Рис. 5. Оптимальная траектория после приема мяча в ближней зоне накатом. Параметры: $\alpha = 11^\circ$, $V_0 = 28$ м/с, $V_k = 14.26$ м/с, расстояние до стола – 0.3 м, высота – на уровне стола, удар – накат.

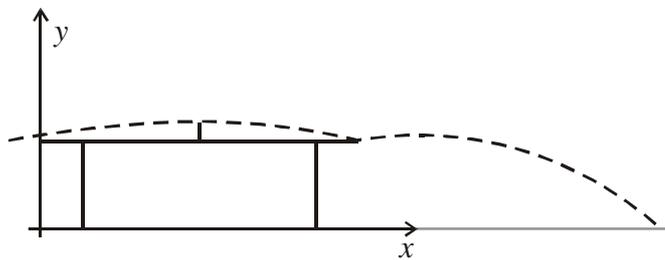


Рис. 7. Оптимальная траектория после приема мяча в ближней зоне подрезкой. Параметры: $\alpha = 8^\circ$, $V_0 = 8.75$ м/с, $V_k = 5.57$ м/с, расстояние до стола – 0.3 м, высота – на уровне стола, удар – подрезка.

вращения шарика на его траекторию. В данной работе исследовались траектории при подрезке и накате, и расчетные траектории сравнивались с опытными данными.

Оптимизация траекторий полета теннисного шарика проводилась в визуальном режиме. Задавалось начальное положение шарика, модуль и направление его начальной скорости. Расчетная траектория выводилась на экран компьютера, и подбирались такие начальные условия для скорости, чтобы шарик упал на сторону стола соперника с максимальной скоростью, не задев при этом сетки.

Исследовались приемы подачи прямым ударом, накатом и подрезкой в ближней зоне на высоте стола (рис. 4-6) и в дальней зоне также на высоте стола (рис 7-9). Прием высоко летящего шарика не рассматривался, так как в этом случае нет задачи оптимизации – конечная скорость шарика увеличивается неограниченно с ростом начальной скорости и сетка этому не мешает.

Выяснено, что при приеме мяча в ближней зоне наиболее эффективен накат, при котором скорость падения шарика на сторону соперника более чем в два раза превышает скорость при прямом ударе и приеме подрезкой (рис 7-9).

При приеме мяча в дальней зоне скорость падения шарика на сторону соперника существенно ниже и более эффективен прямой удар. Несколько меньшие скорости получается при приеме шарика накатом.

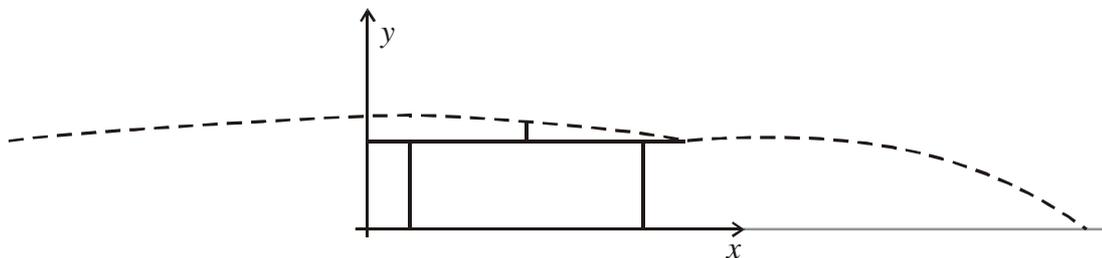


Рис. 7. Оптимальная траектория после приема мяча в дальней зоне прямым ударом. Параметры: $\alpha = 5.15^\circ$, $V_0 = 26.7$ м/с, $V_k = 9.2$ м/с, расстояние до стола – 3.13 м, высота – на уровне стола, удар – прямой.

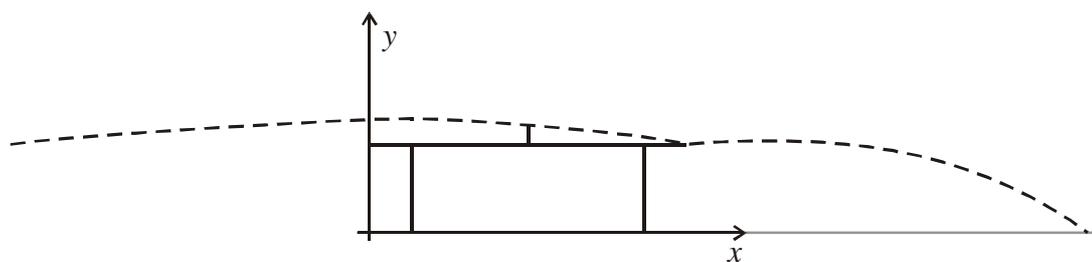


Рис. 8. Оптимальная траектория после приема мяча в дальней зоне подрезкой. Параметры: $\alpha = -1^\circ$, $V_0 = 15.2$ м/с, $V_k = 5.88$ м/с, расстояние до стола – 3.13 м, высота – на уровне стола, удар – подрезка.

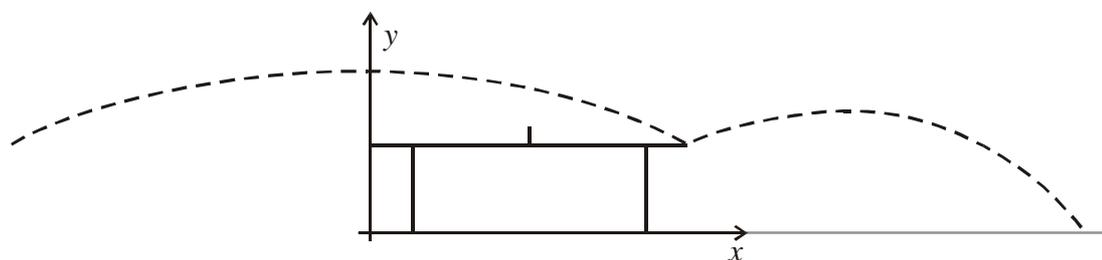


Рис. 9. Оптимальная траектория после приема мяча в дальней зоне накатом. Параметры: $\alpha = 22.9^\circ$, $V_0 = 30$ м/с, $V_k = 8.39$ м/с, расстояние до стола – 3.13 м, высота – на уровне стола, удар – накат.

6. Заключение

Методами математического моделирования проведено исследование траекторий теннисного шарика после его приема прямым ударом, накатом и подрезкой. Учет силы аэродинамического сопротивления позволил получить результаты, согласующиеся с опытом. Выяснено, что наиболее эффективным является прием шарика накатом в ближней зоне. Если все-таки шарик принимается в дальней зоне, то расчеты отдают предпочтение прямому удару по шарикау.

Литература

1. **Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости.** Под ред. С. Гольдштейна. Москва, Государственное издательство иностранной литературы, т. I, 1948.
2. **Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости.** Под ред. С. Гольдштейна. Москва, Государственное издательство иностранной литературы, т. II, 1948.
3. Р.Н. РУДАКОВ. **Общие теоремы динамики и их приложение к решению задач биомеханики.** Пермь, Пермский государственный технический университет, 1999.

OPTIMIZATION OF TRAJECTORY OF A TABLE TENNIS BALL

R.N. Rudakov, A.V. Kamenskich, P.V. Shulgin (Perm, Russia)

The ball rotation plays an important role in the table tennis as it creates the lifting force (Magnus' effect). The dependence of aerodynamical forces on translation velocity and angular velocity of the ball rotation has been studied earlier by an experiment. In this article it has been demonstrated that parameters of ball motion in the table tennis are in good agreement with the diapason of investigated parameters. It allows to determine the aerodynamical forces acting on the table tennis ball. The differential equations of motion of the center of mass of the table tennis ball were compiled which were solved numerically by the method of step integration. The trajectories of motion of the ball were investigated after its receiving in neighboring and distant zones in the case of direct central impact on the ball. The analogous solutions were obtained for upper rotation of the ball. The optimal methods of ball receiving and optimal trajectories were found which ensure ball hit on the table side of competitor with maximal velocity. Ref. 3.

Key words: table tennis, aerodynamical forces, optimal trajectories

Получено 10 май 2000