

УДК 539.3+612.311

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЯ ЗУБА В КОСТНОЙ ТКАНИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МГНОВЕННОЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ**

**С.М. Босяков, К.С. Юркевич**

Кафедра теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета, 220030, Беларусь, Минск, Проспект Независимости, 4, e-mail: bosiakov@bsu.by

**Аннотация.** В работе получены соотношения для начальных перемещений корня зуба в костной ткани, возникающих в результате мгновенного действия на зуб сосредоточенной силы, развиваемой, в частности, ортодонтическими аппаратами. Геометрическая форма корня зуба описывается уравнением эллиптического гиперболоида. Расчеты и визуализация положений корней зубов выполнены для различных случаев действия сосредоточенной нагрузки на однокоренной премоляр, а также для различных вариантов вертикальной резорбции костной ткани.

**Ключевые слова:** костная ткань, жесткость костной ткани, центр сопротивления корня зуба, начальные перемещения корней зубов, вертикальная атрофия костной ткани.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Одним из факторов успешного лечения аномалий зубочелюстной системы является исследование биомеханического воздействия ортодонтических аппаратов на перемещаемые зубы. Обзор некоторых результатов, полученных с применением метода конечных элементов, представлен, в частности, в монографии [7]. Здесь описано конечно-элементное моделирование процессов ортодонтического перемещения зубов при изгибе дуги первого и второго порядка с использованием двумерной и трехмерной моделей. Обзор других литературных источников показывает, что при расчете перемещений зубов под действием сил и моментов, развиваемых ортодонтическими аппаратами, в основном также используется метод конечных элементов. В работах [10, 11] выполнен конечно-элементный расчет перемещений четырех резцов при нагружении моментом сил боковых резцов, а также расчет начальных перемещений и углов поворота клыка. Анализ сил, действующих на зубы и обеспечивающих заданные перемещения, на основании решений системы уравнений статики и кинематики выполнен в монографии [2]. Здесь определены углы активации и значения сил активации, координаты точки закрепления дуг на каркасах ортодонтических аппаратов, обеспечивающие корпусное перемещение зуба и сегментов зубных рядов, а также возникающие при этом силы биомеханического противодействия. Обзор большого количества литературных источников, связанных с определением оптимальной силы для достижения нужного перемещения зубов, приведен в работе [9].

Авторами статьи указано на то обстоятельство, что до сих пор не существует конкретных рекомендаций по определению оптимальной силы для достижения нужного перемещения зубов, что связано со сложностью представления трехмерного

перемещения зуба. Один из подходов к определению перемещений корней зубов, имеющих вид эллиптического гиперboloида, в пространстве представлен в работе [6]. В частности, здесь перемещения корней в периодонте описаны на основании выражений, описывающих бесконечно малые перемещения абсолютно твердых тел в упругой среде. Настоящая работа развивает это актуальное направление и посвящена анализу начальных перемещений корня зуба в костной ткани, возникающих в случае мгновенного действия на зуб сосредоточенной силы. Понятие начального смещения зуба, предполагающего, что после приложения мгновенной силы зуб возвращается в начальное положение, сформулировано в работах [8, 12]. В частности, в статье [12] указано, что при мгновенной нагрузке происходит возвращение зуба в положение до нагружения, тогда как в процессе длительного нагружения наблюдается перестройка костной ткани в результате изменения положения зуба.

В данной статье расчет перемещений корня зуба проведен с учетом атрофии костной ткани. Под атрофией в данном случае подразумевается вертикальная резорбция (рассасывание) костной ткани альвеолы [7]. Необходимость учета атрофии костной ткани обусловлена тем обстоятельством, что при горизонтальной и вертикальной резорбции выносливость зуба существенно снижается и увеличиваются перемещения зуба под действием нагрузок, развиваемых ортодонтическими аппаратами.

### ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И УГЛЫ ПОВОРОТА КОРНЯ

Будем считать корень зуба абсолютно твердым телом, геометрическая форма которого описывается уравнением эллиптического двуполостного гиперboloида (начало координат находится в вершине гиперboloида)

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \frac{H}{\sqrt{1+p^2} - p} \left( \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + p^2} - p \right) = 0, \quad (1)$$

где  $H$  – высота корня зуба;  $p$  – параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба;  $a, b$  – полуоси эллипса в сечении корня зуба плоскостью  $z = H$ .

Для нахождения упругих перемещений точек костной ткани в окрестности корня зуба используем модифицированные формулы для бесконечно малых перемещений абсолютно твердого тела в упругой среде, сформулированные таким образом, чтобы учесть неограниченное уменьшение перемещений точек костной ткани при удалении от корня зуба:

$$\vec{u} = \frac{H(\vec{u}^{(0)} + \vec{\varphi} \times \vec{r})}{H - F(x_1, x_2, x_3)}. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{u}^{(0)}$  – вектор поступательного перемещения корня вдоль осей координат;  $\vec{\varphi}$  – вектор углов поворота корня зуба относительно осей координат;  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки костной ткани, отсчитываемый от центров сопротивления корня  $A(0, 0, x_3^{(A)})$  и  $B(0, 0, x_3^{(B)})$ , через которые проходят линии действия двух горизонтальных сил, под действием которых корень зуба получает только поступательные перемещения. Линия действия силы, проходящая через точку  $A$ , параллельна координатной оси  $x_1$ , проходящая через точку  $B$  – параллельна оси  $x_2$ . Ввиду симметрии корня зуба относительно координатных плоскостей  $x_1Ox_3$  и  $x_2Ox_3$  ненулевой для центров сопротивления  $A$  и  $B$  являются только аппликаты  $x_3^{(A)}$  и  $x_3^{(B)}$  соответственно.

Центр сопротивления, через который проходит линия действия силы, поступательно перемещающая корень зуба вдоль оси  $0x_3$ , находится в точке с координатами  $C(0, 0, H)$  (или в точке с координатами  $C(0, 0, 0)$ ). Такое положение центра сопротивления также обусловлено симметрией горизонтальных сечений корня зуба относительно плоскостей  $x_10x_3$  и  $x_20x_3$ . Линия действия силы совпадает с вертикальной осью  $0x_3$ .

Поступательные перемещения и углы поворота корня зуба можно найти из условий равновесия (равенство нулю главного вектора, главного момента сил, действующих на зуб, а также напряжений на поверхности корня зуба):

$$\begin{aligned} u_i^{(0)} &= \frac{P_i}{c_i}, \quad \varphi_1 = \frac{P_3 x_2^{(f)} - P_2 (x_3^{(f)} - x_3^{(B)})}{\mu_1}, \\ \varphi_2 &= \frac{P_1 (x_3^{(f)} - x_3^{(A)}) - P_3 x_1^{(f)}}{\mu_2}, \quad \varphi_3 = \frac{P_2 x_1^{(f)} - P_1 x_2^{(f)}}{\mu_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $x_k^{(f)}$  – координаты точки приложения силы. В формулах (3) коэффициенты  $c_k$ ,  $\mu_k$  – жесткости костной ткани при поступательных перемещениях и поворотах корня зуба соответственно, найденные в работе [1] с учетом вертикальной атрофии костной ткани. Перемещения и углы поворота из формул (3) могут быть определены только приближенно, поскольку соотношения для перемещений (2) не удовлетворяют уравнениям Ламе в любой точке костной ткани, а только в точках, находящихся на поверхности корня зуба. Сравнительный анализ результатов расчета перемещений и углов поворота для корня зуба в виде эллиптического гиперboloида, выполненный на основании конечно-элементного пакета *ANSYS* и соотношений (3), показывает, что значения перемещений и углов поворота при некоторых случаях нагружения корня могут существенно отличаться. Помимо количественных различий результатов, наблюдаются качественные отличия в положениях корня зуба до и после приложения нагрузки, визуализированных на основании нахождения перемещений с применением выражения (2) и полученных в ходе соответствующих конечно-элементных расчетов. Такие качественные отличия можно объяснить неточностью нахождения координат центров сопротивления на основании аналитического подхода, разработанного в работе [6] и опирающегося на использование модифицированных выражений для перемещений абсолютно твердого тела в упругой среде.

Чтобы компенсировать погрешность вычисления с использованием формул (3), введем корректирующие коэффициенты  $k_i$ ,  $k_i^{(\varphi)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  для поступательных перемещений и углов поворота, а также корректирующие коэффициенты  $k_A$  и  $k_B$  для координат центров сопротивления  $A$  и  $B$ . Коэффициент  $k_A$  найдем на основании результатов серий вычислительных экспериментов по нахождению вертикального перемещения точки  $S_1(a, 0, H)$  костной ткани, находящейся на поверхности корня зуба. Вычисления проводились для корней зубов со значениями полуосей  $a$  и  $b$ , изменяющихся от 2 до 6 мм с шагом 0,4 мм; высота корня изменялась от 5,2 до 17,2 мм с шагом 1 мм. Предельные значения полуосей и высоты установлены в соответствии с данными работы [4]. Параметр, характеризующий закругление вершины корня, изменялся в пределах от 0,1 до 0,5 с шагом 0,1. Коэффициент Пуассона  $\nu$  костной ткани принимался равным 0,15, 0,2 и 0,25 (предельные значения коэффициента Пуассона установлены в соответствии с работами [5, 6]).

Корень зуба нагружался сосредоточенной силой, параллельной оси  $0x_1$  и положительно направленной вдоль этой оси. Сила последовательно прикладывалась в точках с координатами  $A_j(0, 0, (0,7 + 0,05j)x_3^{(A)})$ ,  $j = \overline{1, 6}$ . В случае если точка приложения силы расположена ниже центра сопротивления, вертикальные перемещения являются положительными, если точка приложения нагрузки находится выше центра сопротивления, перемещения оказываются отрицательными. По парам значений аппликат точки приложения нагрузки, соответствующих им перемещениям, выполнена полиномиальная интерполяция, позволяющая сформулировать уравнения относительно координат центров сопротивления из условия равенства нулю вертикального перемещения корня зуба.

В результате решения уравнений получены более точные значения координат центров сопротивления  $X_3^{(A)}$  для корней зубов с различными геометрическими параметрами. Корректирующий коэффициент определялся отношением  $k_A = X_3^{(A)}/x_3^{(A)}$  для заданных параметров  $a$ ,  $b$ ,  $H$ ,  $p$  и  $v$ . В зависимости от этих параметров выполнена многомерная интерполяция и получена функциональная зависимость коэффициента  $k_A$  от геометрических характеристик корня и коэффициента Пуассона. Аналогичная процедура проведена для нахождения корректирующего коэффициента  $k_B = X_3^{(B)}/x_3^{(B)}$ . Координаты  $x_3^{(A)}$  и  $x_3^{(B)}$  определены из соотношений, полученных в работе [5] на основании уравнений равновесия и выражений (2). Расчет значений корректирующих коэффициентов при различных данных для корней зубов показывает, что различие между соответствующими координатами  $X_3^{(A)}$  и  $x_3^{(A)}$  (или  $X_3^{(B)}$  и  $x_3^{(B)}$ ) находится в пределах от 1,10 до 1,45.

С учетом того, что центры сопротивления находятся в точках  $A_1(0, 0, X_3^{(A)})$  и  $B_1(0, 0, X_3^{(B)})$ , выражения для перемещений представим в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{H(U_1^{(0)} + \Phi_2(x_3 - X_3^{(A)}) - \Phi_3x_2)}{H - F(x_1, x_2, x_3)}, \\ U_2 &= \frac{H(U_2^{(0)} + \Phi_3x_1 - \Phi_1(x_3 - X_3^{(B)}))}{H - F(x_1, x_2, x_3)}, \\ U_3 &= \frac{H(U_3^{(0)} + \Phi_1x_2 - \Phi_2x_1)}{H - F(x_1, x_2, x_3)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $U_i^{(0)} = k_i u_i^{(0)}$ ,  $\Phi_i = k_i^{(\Phi)} \varphi_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Из уравнений равновесия корня зуба, сформулированных с учетом того, что радиус-вектор точки костной ткани отсчитывается от точек  $A_1$  и  $B_1$ , получим

$$\begin{aligned} U_i^{(0)} &= \frac{P_i}{k_i c_i}, \quad \Phi_1 = \frac{P_3 x_2^{(f)} - P_2 (x_3^{(f)} - X_3^{(B)})}{k_1^{(\Phi)} \mu_1}, \\ \Phi_2 &= \frac{P_1 (x_3^{(f)} - X_3^{(A)}) - P_3 x_1^{(f)}}{k_2^{(\Phi)} \mu_2}, \quad \Phi_3 = \frac{P_2 x_1^{(f)} - P_1 x_2^{(f)}}{k_3^{(\Phi)} \mu_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом соотношений (3) и (5) из выражений (2) и (4) в случае, если сосредоточенная сила приложена в центре сопротивления и направлена вдоль соответствующей координатной оси, получим следующие соотношения для корректирующих коэффициентов при поступательных перемещениях:

$$k_i = \frac{u_i}{U_i}. \quad (6)$$

Здесь перемещения  $U_i$  получены в результате конечно-элементного расчета в пакете *ANSYS* для геометрических параметров корня и коэффициента Пуассона из вышеуказанных диапазонов, нагруженных в соответствующих центрах сопротивления. Перемещения  $u_i$  вычислены по формулам (2) с учетом выражений (3).

Корректирующие коэффициенты  $k_i^{(\varphi)}$  при углах поворота найдем следующим образом:

$$k_1^{(\varphi)} = \frac{u_2^{(1)}}{U_2^{(1)}}, k_2^{(\varphi)} = \frac{u_1^{(2)}}{U_1^{(2)}}, k_3^{(\varphi)} = \frac{u_2^{(3)}}{U_2^{(3)}}, \quad (7)$$

$$u_2^{(1)} = -\frac{bP_3(h - X_3^{(B)})}{\mu_1}, u_1^{(2)} = -\frac{aP_3(h - X_3^{(A)})}{\mu_2}, u_2^{(3)} = -\frac{abP_1}{\mu_3}.$$

В выражениях (7) перемещения  $U_2^{(1)}$ ,  $U_1^{(2)}$  и  $U_2^{(3)}$  определяются в результате конечно-элементного расчета в пакете *ANSYS*. Перемещения  $U_2^{(1)}$  и  $U_1^{(2)}$  являются перемещениями точек с координатами  $(0, b, H)$  и  $(a, 0, H)$  соответственно, в которых прикладывается сосредоточенная сила, направленная вдоль оси  $Ox_3$ . Перемещение  $U_2^{(3)}$  – перемещение точки с координатами  $(a, 0, H)$  под действием силы, направленной вдоль оси  $Ox_1$  и приложенной в точке с координатами  $(0, b, H)$ .

Расчет корректирующих коэффициентов в формулах (6), (7) осуществлялся для геометрических параметров корня зуба  $a$ ,  $b$ ,  $H$ ,  $p$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , изменяющихся так же, как и при вычислении корректирующих коэффициентов  $k_A$  и  $k_B$ . По результатам вычислений выполнена многомерная интерполяция и получены зависимости  $k_i(a, b, H, p, \nu)$  и  $k_i^{(\varphi)}(a, b, H, p, \nu)$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Расчет коэффициентов  $k_i$  и  $k_i^{(\varphi)}$ , выполненный для антропометрических данных различных корней зубов [4], показывает, что их значения могут изменяться от 0,34 до 1,12. Заметим, что модуль упругости  $E$  при проведении вычислительных экспериментов принимался постоянным, поскольку не влиял на значения корректирующих коэффициентов. Это обусловлено тем, что зависимость жесткостей от  $E$  является прямой пропорциональностью [1], а также тем, что при расчете перемещений в пакете *ANSYS* использовалась модель линейно-упругой среды.

### РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Проведем расчет перемещений корней зубов на примере однокоренного премоляра с использованием формул (5) и соответствующих корректирующих коэффициентов. Геометрические размеры корня зуба (однокоренного премоляра) описываются постоянными  $a = 5$ ,  $b = 3,5$ ,  $H = 14,3$  мм,  $p = 0,4$  [4]. Коэффициент Пуассона для костной ткани  $\nu = 0,25$ , модуль упругости  $E = 16,1$  ГПа [6].

Для указанных геометрических и физико-механических констант коэффициенты  $k_A = 1,220$ ,  $k_B = 1,209$ ,  $k_1 = 0,452$ ,  $k_2 = 0,335$ ,  $k_3 = 0,519$ ,  $k_1^{(\phi)} = 0,909$ ,  $k_2^{(\phi)} = 1,112$  и  $k_3^{(\phi)} = 1,0$ . Величина нагрузки  $P$  для всех случаев принималась равной 1 кН [3].

Значения максимальных перемещений корней зубов  $u_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_{i\max}^2}$  для четырех различных вариантов приложения нагрузки приведены в табл. 1 ( $\alpha_k$  – угол между вектором силы и координатной осью  $x_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ ). Точки приложения нагрузки для вариантов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  имеют координаты  $(0; 0; 14,3)$ ,  $(0; 3,5; 14,3)$ ,  $(-5,0; 0; 14,3)$  и  $(2,77; 2,92; 14,3)$  мм соответственно. Положительное направление нагрузки для варианта  $A$  определяется направляющими косинусами  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 0$ ,  $\cos \alpha_3 = -1$ ; для варианта  $B$   $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_3 = 0$ ,  $\cos \alpha_2 = -1$ , для варианта  $C$   $\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_3 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\cos \alpha_2 = 0$  и для варианта  $D$   $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = -1/\sqrt{3}$ . Сравнительный анализ перемещений премоляра, найденных по формулам (5), и перемещений, вычисленных с применением пакета *ANSYS*, для четырех рассмотренных случаев нагружения премоляра показывает, что максимальная погрешность составляет 2%.

На рис. 1 выполнена визуализация положений корня премоляра до и после действия нагрузки. Для всех случаев обозначена действующая на корень зуба сосредоточенная сила. Поскольку найденные перемещения корней малы по сравнению с размерами корней рассматриваемых зубов, при построении положения корня премоляра после действия нагрузки перемещения увеличены в 500 раз.

Для учета вертикальной атрофии костной ткани выражения для полуосей эллипса  $a$  и  $b$  в сечении корня зуба, которое ограничивает часть корня, находящуюся в костной ткани, а также выражение для высоты корня, находящегося в костной ткани, представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \sqrt{s \left( s + 2p(1-s) \left( \sqrt{1+p^2} - p \right) \right)}, \\ b &= b_0 \sqrt{s \left( s + 2p(1-s) \left( \sqrt{1+p^2} - p \right) \right)}, H = H_0 s, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $a_0$ ,  $b_0$  – полуоси эллипса, ограничивающего профиль сечения корня зуба в норме,  $H_0$  – высота корня зуба в норме,  $s$  – параметр, характеризующий высоту костной ткани, связанной с периодонтом ( $0 \leq s \leq 1$ ) [9].

Расчет перемещений корня премоляра при различной высоте костной ткани показывает, что вертикальная атрофия костной ткани существенно влияет на значения перемещений и углов поворота, а также на качественную картину перемещения корня. В табл. 2 приведены значения максимальных перемещений корня  $u_{\max}$  для различных значений параметра  $s$ , характеризующего вертикальную атрофию костной ткани.

Таблица 1

Максимальные значения перемещений для различных случаев нагружения

Вариант нагружения	$A$	$B$	$C$	$D$
Максимальное перемещение $u_{\max}$ , мкм	3,66	5,30	3,46	4,26

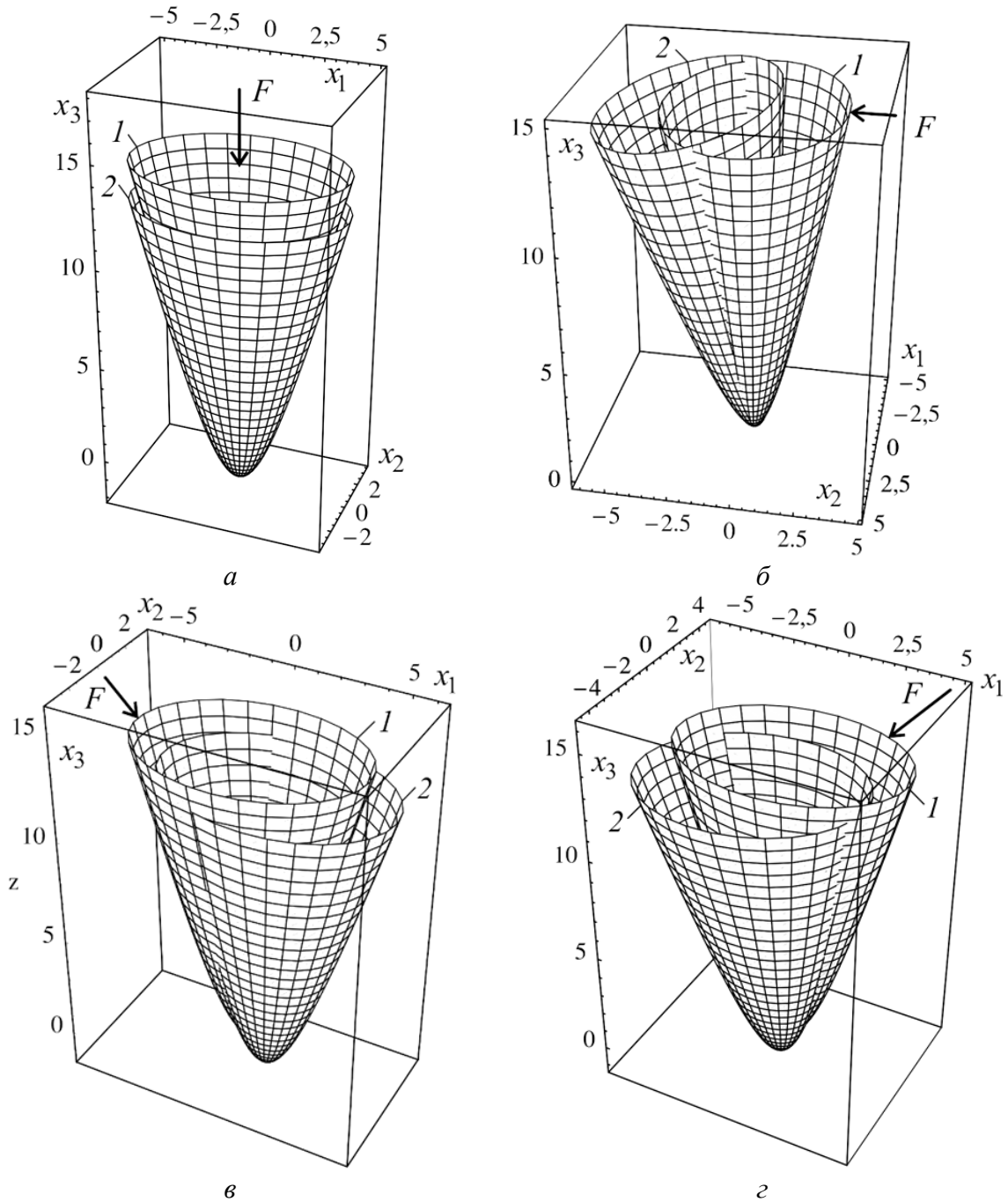


Рис. 1. Положение корня премоляра до (1) и после (2) перемещения под действием сосредоточенной нагрузки для различных случаев нагружения: а – координаты точки приложения нагрузки (0; 0; 14,3) мм для варианта А, направляющие косинусы положительного направления нагрузки  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 0, \cos \alpha_3 = -1$ ; б – координаты точки приложения нагрузки (0; 3,5; 14,3) мм для варианта В, направляющие косинусы положительного направления нагрузки  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_3 = 0, \cos \alpha_2 = -1$ ; в – координаты точки приложения нагрузки (-5; 0; 14,3) мм для варианта С, направляющие косинусы положительного направления нагрузки  $\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_3 = 1/\sqrt{2}, \cos \alpha_2 = 0$ ; г – координаты точки приложения нагрузки (2,77; 2,92; 14,3) мм для варианта D, направляющие косинусы положительного направления нагрузки  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = -1/\sqrt{3}$

Таблица 2

## Максимальные значения перемещений при вертикальной атрофии костной ткани

Вертикальная атрофия костной ткани, %	0	25	50	75
Параметр $s$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Максимальное перемещение $u_{\max}$ , мкм	3,72	7,14	21,64	138,38

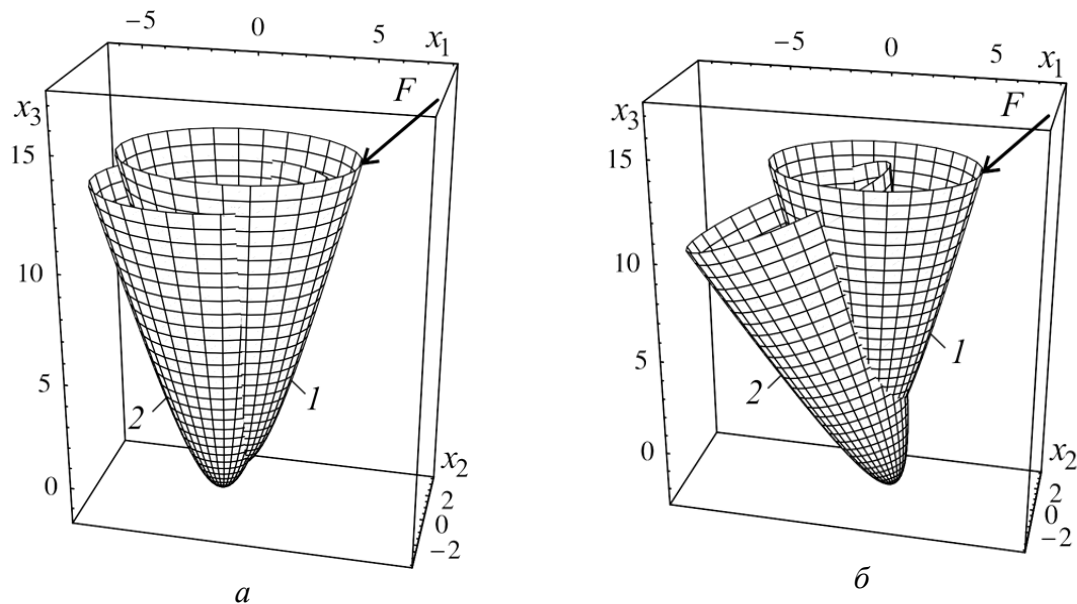


Рис. 2. Положение корня премоляра до (1) и после (2) перемещения под действием сосредоточенной силы, приложенной к точке с координатами (5; 0; 14,3) мм в направлении, определяемом направляющими косинусами  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_3 = -1/\sqrt{2}$ ,  $\cos \alpha_2 = 0$ : а – при отсутствии атрофии ( $s = 1$ ) для варианта А; б – при вертикальной атрофии костной ткани 50% ( $s = 1/2$ ) для варианта В

Координаты точки приложения нагрузки (5; 0; 14,3) мм; положительное направление нагрузки определяется направляющими косинусами  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_3 = -1/\sqrt{2}$ ,  $\cos \alpha_2 = 0$ ; величина нагрузки  $P = 1$  кН [3]. При расчете перемещений геометрические параметры корня принимали значения  $a_0 = 5$ ,  $b_0 = 3,5$ ,  $H_0 = 14,3$  мм и  $p = 0,4$ .

На рис. 2 выполнена визуализация положений корней премоляра до и после действия указанной нагрузки при отсутствии атрофии костной ткани (случай А, рис. 2, а) и при вертикальной атрофии костной ткани 50% (случай В, рис. 2, б). При построении положения корня премоляра после действия нагрузки перемещения увеличены в 500 раз.

Из рис. 2 видно, что при вертикальной резорбции костной ткани существенно возрастают не только поступательные перемещения корня, но и углы поворота корня, что можно объяснить уменьшением жесткостей, а также уменьшением значения аппликаты соответствующего центра сопротивления.

Сравнительный анализ значений перемещений корня премоляра для различных случаев атрофии костной ткани, найденных на основании формул (4) с учетом



соотношений (5), (8) и рассчитанных с использованием конечно-элементного пакета *ANSYS* для того же варианта нагружения, показывает, что максимальное отличие результатов составляет 6% (наблюдается при расчетах перемещений при атрофии 75%). Также отметим, что расчет корректирующих коэффициентов, выполненный с учетом соотношений (8), показывает, что значения  $k_A$ ,  $k_B$ ,  $k_i$  и  $k_i^{(0)}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  при изменении параметра  $s$  практически не изменяются.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выражения для перемещений могут быть использованы на практике стоматологами-ортодонтами для определения величин и направлений начальных перемещений в случае действия на зуб сосредоточенной нагрузки или момента, в частности со стороны стержня ортодонтического аппарата, а также использования выражений для начальных перемещений при нахождении зависимостей перемещений корня зуба от времени действия нагрузки. Такая оценка позволит корректно дозировать величину нагрузки и задавать ее направление, учитывая атрофию костной ткани. Поскольку полученные значения перемещений корней зубов на основании явных формул достаточно хорошо совпадают с результатами конечно-элементного расчета, соотношения (4) можно использовать для разработки компьютерного пакета, позволяющего определять начальные перемещения корней зубов с учетом вертикальной атрофии костной ткани, а также осуществлять визуализацию положений корней зубов до и после приложения нагрузки.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф11М – 040).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Босяков С.М., Юркевич К.С. Определение жесткости костной ткани при поступательных перемещениях и поворотах корня зуба // Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т. 14, № 2. – С. 37–46.
2. Маилян П.Д. Новые средства ортодонтического лечения. – Коломна: Коломенская типография, 1998. – 124 с.
3. Михасев Г.И., Босяков С.М., Юркевич К.С. Определение силовых факторов, развиваемых ортодонтическим аппаратом для расширения верхней челюсти // Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т. 14, № 1. – С. 74–85.
4. Наумович С.А., Батура Р.А., Пархамович С.Н. Антропометрические данные коронок и корней зубов и их значение в стоматологии // Стоматологический журнал. – 2002. – № 2. – С. 21–22.
5. Наумович С.А., Ивашенко С.В., Босяков С.М., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб–периодонт–костная ткань. – Минск, 2009. – 280 с.
6. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб–периодонт. – Минск: Экономические технологии, 2000. – 132 с.
7. Чуйко А.Н. Вовк В.Е. Особенности биомеханики в стоматологии. – Харьков: Прапор, 2006. – 304 с.
8. Kawarizadeh A., Bourauel C., Jager A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens // European Journal of Orthodontics. – 2003. – Vol. 25. – P. 569–578.
9. Kazuo Hayashi, Jun Uechi, Seung-Pyo Lee, Itaru Mizoguchi. Three-dimensional analysis of orthodontic tooth movement based on XYZ and finite helical axis systems // European Journal of Orthodontics. – 2007. – Vol. 29. – P. 589–595.
10. Reimann S., Keilig L., Jager A., Bourauel C. Biomechanical finite-element investigation of the position of the centre of resistance of the upper incisors // European Journal of Orthodontics. – 2007. – Vol. 29. – P. 219–224.
11. Volmer D., Bourauel C., Maier K., Jager A. Determination of the centre of resistance in an upper human canine and idealized tooth model // European Journal of Orthodontics. – 1999. – Vol. 21. – P. 633–648.

12. Zeigler A., Keilig L., Kavarizadeh A., Bourauel C., Jager A. Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth // European Journal of Orthodontics. – 2005. – Vol. 27. – P. 333–339.

## **MATHEMATICAL MODELLING OF INITIAL TOOTH ROOT DISPLACEMENTS IN BONE TISSUE UNDER ACTION OF INSTANT STATIC LOADING**

**S.M. Bosiakov, K.S. Yurkevich (Minsk, Belarus)**

In the present work, expressions for initial tooth root displacements in bone tissue under point load action developed by orthodontic devices are obtained. The geometrical shape of tooth root is defined by equation of elliptical hyperboloid. The calculations and visualization of displacements field are realized for different cases of point load action on single-rooted premolar and for different cases of bone tissue vertical resorption.

**Key words:** bone tissue, stiffness of bone tissue, centre of resistance of tooth root, initial displacements of tooth root, vertical atrophy of bone tissue.

*Получено 13 декабря 2010*