

УДК 531/534: [57+61]

СОЗДАНИЕ ЗАДАНЫХ УСИЛИЙ В ФИКСАТОРАХ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

В.А. Лохов, А.Г. Кучумов

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: lva@pstu.ru

Аннотация. При восстановлении переломов костной ткани обломки необходимо жестко фиксировать. Для этого применяются различные виды фиксаторов, в том числе и фиксаторы, изготовленные из сплавов с памятью формы. Одной из проблем остеосинтеза является создание в области перелома благоприятных напряжений, способствующих ускоренному восстановлению костной ткани. Для решения этой проблемы в работе рассматривается математическая модель фиксатора для остеосинтеза переломов нижней челюсти. Модель основывается на определяющих соотношениях для сплавов с эффектом памяти формы. На основе модели приводится техника предоперационной подготовки для создания требуемых усилий в фиксаторе при установке в костную ткань. При этом фиксатор не деформируется (т.е. полная деформация фиксатора равна нулю), и тем самым минимизирована потенциальная возможность травмы окружающих мягких тканей. Техника предоперационной подготовки сведена к параметрам (сила и перемещение точек крепления фиксаторов), которые удобны для использования медиками в предоперационном планировании.

Ключевые слова: эффект памяти формы, фиксатор, остеосинтез.

Введение

В настоящее время в хирургии широко используются нержавеющие фиксаторы для остеосинтеза, но их применение оказывается не всегда эффективным для сращения отломков костей, т.к. в некоторых случаях имплантаты полностью отторгаются тканями и органами. Кроме этого, использование фиксаторов из нержавеющей сплава не дает возможность осуществлять управление и оптимизацию процесса роста ткани. Это связано с тем, что, как показали исследования [1], на скорость перестройки биологических тканей существенное влияние оказывает напряженно-деформированное состояние в области роста. Применяемые фиксаторы не обладают широкими возможностями для создания напряжений, благоприятных для развития ткани.

В 1985 г. Гюнтер [2] предложил использовать в челюстно-лицевой хирургии скобки, изготовленные из сплавов с эффектом памяти формы, так как они не вызывают коррозии и отторжения тканей, а кроме этого способны создавать благоприятное поле напряжений в области роста. На практике было установлено, что остеосинтез скобкой-фиксатором осуществляется на 2–3 недели быстрее по сравнению с фиксаторами, изготовленными из других материалов. Последующие эксперименты свидетельствовали, что конструкции из сплавов с памятью формы можно применять с

достаточно большой эффективностью не только в челюстно-лицевой хирургии, но и в ортопедии и травматологии. В работе [2] также были предложены статистические модели, позволяющие вычислить усилие фиксатора заданной формы в зависимости от параметров (размер фиксатора, температура фазового перехода, перемещение скобки). Причиной применения статистических моделей послужила недостаточность сведений об эффекте памяти формы, особенно в области определяющих соотношений. Поэтому медикам оставалось руководствоваться или статистическими моделями или собственным субъективным опытом, что обусловило актуальность построения математической модели процессов остеосинтеза.

В последнее время были проведены исследования [3, 4] эффекта памяти формы, результатом которых стали сформулированные определяющие соотношения и параметры определяющих соотношений для эффекта памяти формы. Кроме этого, были проведены работы по изучению биомеханики ростовых процессов в живой ткани [1, 5, 6]. Учеными Перми и Вены [7, 8] разработан подход, позволяющий решать задачи управления напряжениями и деформациями независимо друг от друга, где под управлением понимается создание в теле заданных полей напряжений и деформаций посредством собственных деформаций, в частности, деформаций фазового перехода.

Проведенные исследования открывают возможность построения качественно новых моделей для процессов остеосинтеза, разрабатывать объективные подходы к выбору фиксаторов с эффектом памяти формы для каждого пациента, рассчитывать напряженно-деформированное состояние в области роста, а также формулировать и решать задачи оптимизации ростовых процессов.

Эффект памяти формы

Эффект памяти формы заключается в способности ненагруженного материала под воздействием внешнего напряжения и изменения температуры накапливать деформацию (10–15%), обратимую либо при нагреве, либо в процессе снятия внешнего напряжения (сверхэластичность) [9]. Деформация может накапливаться при активном нагружении, а также при изменении температуры сплава, находящегося под воздействием одноосного или сдвигового напряжения. К сплавам с памятью формы относятся AuCd, Cu-Al-Zn, AgCd, NiTi и др. В основе эффекта памяти формы лежат мартенситные превращения, для которых типичны слабая зависимость температур начала и окончания превращения от скорости изменения температуры, чаще всего обратимый характер превращения, заметное несовпадение (гистерезис) температур прямой и обратной реакции и другие признаки [3]. Высокотемпературную модификацию принято называть аустенитом, а низкотемпературную – мартенситом. Температуры мартенситных превращений сильно зависят от химического состава сплавов, их термической и механической обработки. Например, характеристические температуры никелида титана лежат в пределах 30–80°C, редко выходя за этот интервал, однако легирование железом снижает их примерно на 150–200°C, то есть до –170 ... –70°C.

Кинетика мартенситных превращений имеет ярко выраженный гистерезис и показана на рис. 1. Если материал охлаждать из аустенитного состояния, то вначале каких-либо фазовых преобразований не происходит. Однако начиная с некоторой характеристической температуры, которую принято обозначать M_s , появляются первые кристаллы мартенсита, следовательно, увеличивается и доля мартенситной фазы в объеме материала. По мере дальнейшего охлаждения их размеры и количество

увеличиваются, пока кристаллы не заполнят при температуре M_f весь объем. Такое превращение называется прямым и при наличии внешней нагрузки сопровождается появлением большой деформации (эффект пластичности превращения). При последующем нагреве, после преодоления температуры A_s мартенсит начинает переходить в аустенит. При этом накопленная деформация медленно исчезает до тех пор, пока температура не станет выше A_f и не произойдет восстановление формы.

В литературе предлагаются различные варианты аппроксимации кривых на рис. 1, например, используются гармонические функции:

$$q = \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{T - M_f}{M_s - M_f} \right) \right] \quad \text{при } M_f < T < M_s, \quad dT < 0, \quad (1)$$

$$q = \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{T - A_s}{A_f - A_s} \right) \right] \quad \text{при } A_s < T < A_f, \quad dT > 0, \quad (2)$$

и $q = \text{const}$, если ни одно из этих условий не выполняется.

Определяющие соотношения для эффекта памяти формы

Описанию механического поведения сплавов с эффектом памяти формы посвящен ряд работ [3, 4, 10–14]. В данной работе используются определяющие соотношения Мовчана [4], которые строятся для фазовой деформации на основании следующих предположений. Считается, что тензор малых деформаций состоит из упругой ε_{ij}^e и фазовой ε_{ij}^p составляющих. Упругая деформация удовлетворяет соотношениям термоупругости:

$$\varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{1}{K} \sigma_{kk}, \quad (3)$$

где G , K – модули сдвига и объёмного расширения, штрихом обозначаются компоненты девиаторов, по повторяющимся индексам производится суммирование.

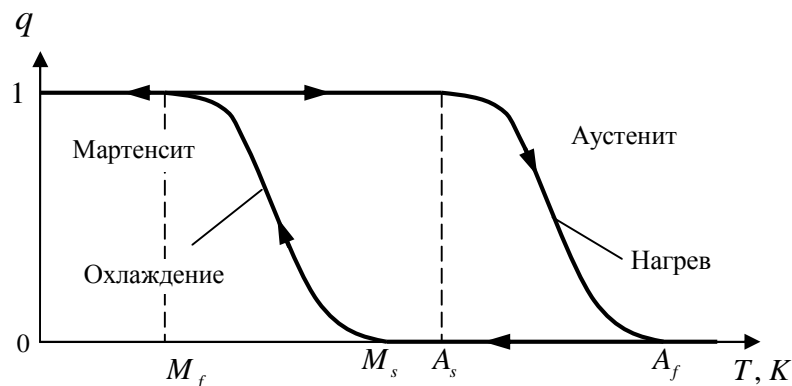


Рис. 1. Зависимость относительного содержания мартенсита q от температуры

Система определяющих соотношений для сплава с эффектом памяти формы имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (4)$$

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dq} = B_{ij} + a_0 \varepsilon_{ij}^p, \quad (5)$$

где

$$B_{ij} = c_0 \sigma'_{ij} \quad \text{при } dq > 0, \quad (6)$$

$$B_{ij} = \lambda_0 B_{ij}^e + (1 - \lambda_0) \frac{a_0 \varepsilon_{ij}^{(0)}}{\exp(a_0 q_0) - 1} \quad \text{при } dq < 0. \quad (7)$$

Эффект памяти формы нашел применение во многих отраслях науки и техники, в том числе и в медицине. Одним из примеров его использования может служить остеосинтез скобками, изготовленными из сплава с эффектом памяти формы, в основном из никелида титана.

Остеосинтез скобками–фиксаторами из никелида титана

Остеосинтез скобкой–фиксатором осуществляется следующим образом. Например, при переломе нижней и верхней челюстей, скуловой кости и дуги во время операции сопоставляли отломки, а затем с помощью бормашины в каждом отломке просверливали фрезерные отверстия на расстоянии около 10 мм от края перелома строго перпендикулярно с учетом направления компрессионных усилий скобки. Затем скобку–фиксатор в течение 10?15 секунд орошали в хладагенте. С помощью иглодержателей разгибали кольцо скобки, а фиксирующим ножкам придавали форму, удобную для введения в кость. Скобку–фиксатор переносили в операционную рану, ножки ее погружали в отверстия в костных отломках и фиксировали пальцем или инструментом в течение 20?30 секунд. При контактном нагревании никелида титана до температуры +35?C скобка стремится принять заданную (первоначальную) форму, за счет чего и обеспечивается компрессия отломков.

Однако проблема заключается в том, чтобы обеспечить заданные усилия фиксаторов, для чего необходимо построение математической модели фиксирующего элемента.

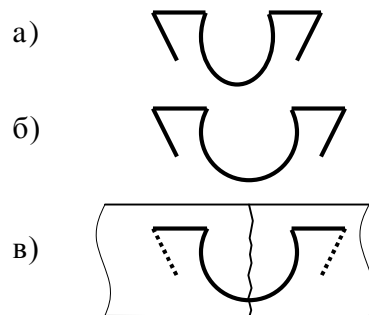


Рис. 2. Компрессионное устройство для фиксации костных отломков в виде скобки: а – общий вид скобки; б – скобка после деформации и придания фиксирующим ножкам удобного положения во время орошения ее струей хладагента; в – положение скобки в операционной ране

Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача о превращениях в скобке, которую устанавливают в отверстия обломков кости для ее сращивания. Для скобки необходимо найти собственную деформацию и, по аналогии с задачей о превращениях в стержне, выяснить, как нужно обработать скобку, чтобы в ней возникли собственные деформации памяти формы.

Итак, пусть необходимо зафиксировать обломки кости после перелома, показанного вертикальной линией на рис. 3. Для этого используют фиксатор, изготовленный из материала с эффектом памяти формы. Угол раскрытия скобки обозначен через α . Скобка прикреплена к обломкам кости в точках A и B . Податливостью костной ткани пренебрегаем, поэтому точки крепления моделируются как неподвижные шарниры. В данной работе решается задача создания заданного усилия в области крепления фиксатора за счет эффекта памяти формы (обратное превращение при нагревании до температуры тела). Фиксатор рассматривается как кривой брус постоянного круглого поперечного сечения, площадь которого равна F , и кривизны (рис. 3). Используются гипотеза плоских сечений и ненадавливания волокон [15].

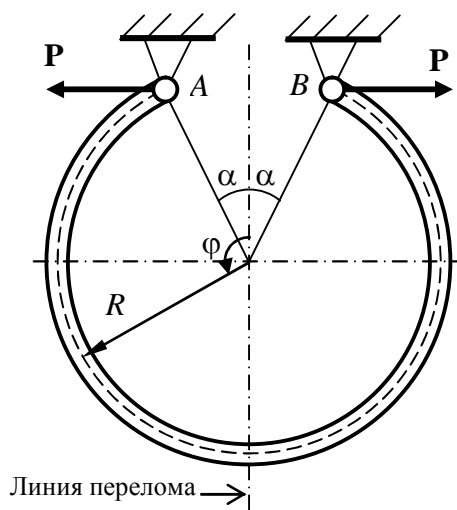


Рис. 3. Фиксирующая скобка из материала с эффектом памяти формы

Другими словами, необходимо, чтобы за счет эффекта памяти формы скобка вызвала заданное усилие P в шарнирах. Согласно рис. 3 скобка будет сжимать костную ткань.

Методика решения задачи управления напряжениями

Фазовая деформация за счет эффекта памяти формы может быть рассмотрена как собственная деформация [16], под которой понимается неупругая деформация любой природы (температурная, пьезоэлектрическая, пластическая, ростовая, фазовая и др.). Возникают случаи, когда собственная деформация не вызывает напряжений в системе, или, наоборот, не вызывает полной деформации системы.

Пусть исследуемое тело занимает ограниченную область V трехмерного евклидова пространства E^3 . Замыкание области обозначено через \bar{V} , граница (которая считается достаточно гладкой) – через S ($\bar{V} = V \cup S$). Деформации считаются малыми и аддитивными. Тогда тензор малой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ является суммой упругой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ и собственной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^*$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \mathbf{r} \in \bar{V}. \quad (8)$$

Граница области S делится на две взаимно непересекающиеся части: $S = S_u \cup S_\sigma$. На части границы S_u заданы нулевые кинематические граничные условия, на части S_σ задан вектор напряжений \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{r} \in S_u, \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} \in S_\sigma. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь кинематические граничные условия предполагается такими, что движение тела как жесткого целого невозможно.

Назовем обобщенным решением задачи симметричный тензор $\boldsymbol{\sigma}$, который определяется обобщенным законом Гука $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*)$, где $\mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3$, $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{r} \in S_u$, и для которого имеет место соотношение:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, dv - \int_{S_\sigma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \, ds - \int_V \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} \, dv = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(V))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_u. \quad (10)$$

Здесь W_2^1 – пространство Соболева функций, имеющих первую обобщенную производную и интегрируемых с квадратом вместе с производной. Деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$ определяются геометрическими соотношениями Коши, где производные понимаются в обобщенном смысле. Значения перемещений \mathbf{u} и \mathbf{w} на границе вычисляются посредством оператора следа. В постановке задачи считается, что $\mathbf{p} \in (L_2(S_\sigma))^3$, $\mathbf{q} \in (L_2(V))^3$, $\boldsymbol{\varepsilon}^* \in (L_2(V))^6$, компоненты C_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) являются кусочно-непрерывными функциями координат.

В работе [8] доказана теорема, что для решаемой задачи обобщенное решение существует и единственно.

Для дальнейшего изложения и анализа задачи введем пространство H тензоров деформации, компоненты которых принадлежат функциональному пространству L_2 . Скалярное произведение и норма в H введены следующим образом:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_H = \int_V \boldsymbol{\alpha} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\beta} \, dv, \quad \|\boldsymbol{\alpha}\|_H = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})_H}. \quad (11)$$

Далее выделено подпространство H_u собственных деформаций, свободных от напряжений.

Тензор $\boldsymbol{\varepsilon} \in H$ принадлежит подпространству H_u , если существует такая вектор-функция (перемещение): $\mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3$, что $\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{r} \in S_u$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = 0,5(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)$, где производные понимаются в обобщенном смысле, а значение функции \mathbf{u} на границе S_u определяется посредством оператора следа.

Собственная деформация, свободная от напряжений, принадлежит подпространству H_u . И наоборот, если собственная деформация принадлежит подпространству H_u , то она является свободной от напряжений [8].

Подпространство нильпотентных собственных деформаций H_σ введено посредством условия, что полные деформации системы (8) равны нулю, тогда собственная деформация вычисляется следующим образом

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^* = -\mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}, \quad (12)$$

где напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ являются статически допустимыми при отсутствии внешних активных сил (уравновешенные напряжения)

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \, dv = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in (W_2^1(V))^3, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_u. \quad (13)$$

Эти напряжения не ограничиваются классом самоуравновешенных напряжений ввиду наличия реакций опор на границе S_u .

Множество собственных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*$ в выражении (12) образует линейное подпространство H_σ .

Отметим, что для дискретизированных систем (т.е. ферм или конечно-элементных аппроксимаций) соотношение (13) сводится к уравнениям равновесия узлов. Тогда число линейно независимых решений при определении элементов H_σ равно степени статической неопределимости системы.

В работе [8] доказана теорема, что любая существующая в теле собственная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ может быть единственным образом разложена на две части, а именно: собственную деформацию, свободную от напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}_u^* \in H_u$ и нильпотентную собственную деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^* \in H_\sigma$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}_u^* + \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}. \quad (14)$$

Следствие теоремы о декомпозиции. Если выполнена декомпозиция существующей в теле собственной деформации, то напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и полная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ тела с собственной деформацией $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ вычисляются следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma^*, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_u^*, \quad \mathbf{r} \in \bar{V}. \quad (15)$$

Таким образом, решение задачи теории упругости с собственными деформациями сводится к выполнению декомпозиции существующей в теле собственной деформации.

Введенные понятия нильпотентных собственных деформаций и собственных деформаций, свободных от напряжений, а также теорема о декомпозиции открывают возможность независимого управления напряжениями (посредством нильпотентных собственных деформаций) и деформациями (посредством собственных деформаций, свободных от напряжений).

Решение задачи управления напряжениями

Данная система имеет одну степень статической неопределенности, таким образом, в системе возможно создать усилия посредством деформаций за счет эффекта памяти формы.

Решение задачи можно разделить на следующие этапы.

1. Определение напряжений σ в свободной (т.е. без шарниров) скобке, которые вызваны действием сил \mathbf{P} .

2. Полученные напряжения для системы, показанной на рис. 3, являются уравновешенными и могут быть созданы за счет собственной деформации. Тогда согласно [8] необходимая для этого фазовая деформация ε^* имеет вид

$$\varepsilon^* = -\frac{\sigma}{E}, \quad (16)$$

где E – модуль Юнга, который считается постоянным для всей скобки.

3. Третий этап состоит в определении воздействий и формы скобки до установки, чтобы в ней возникли собственные деформации (16) за счет эффекта памяти формы. Здесь необходимо использовать определяющее соотношение для эффекта памяти формы. В данной работе используется модель Мовчана [4].

Рассмотрим указанные этапы более подробно.

1. Силовые факторы в скобке определяются следующими формулами:

$$N = -P \cos \varphi, \quad (17)$$

$$Q = P \sin \varphi, \quad (18)$$

$$M = PR(\cos \alpha - \cos \varphi), \quad (19)$$

где изгибающий момент считается относительно центра тяжести сечения.

При изгибе бруса в силу линейной связи между напряжениями и деформациями, а также предположения о малых деформациях напряжения являются суммой напряжений, вызванных продольной силой σ_N , и напряжений, вызванных изгибающим моментом σ_M :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M, \quad (20)$$

Напряжения при чистом изгибе и чистом растяжении имеют вид:

$$\sigma_N = \frac{N}{F}. \quad (21)$$

$$\sigma_M = \frac{M}{F(R - r_n)} \frac{y^*}{(r_n - y^*)}, \quad (22)$$

где F – площадь поперечного сечения скобки, R – радиус скобки, r_n – радиус кривизны нейтрального слоя, y^* – координата, характеризующая расстояние от нейтрального слоя до произвольного слоя.

Тогда окончательная формула для напряжений при изгибе имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{F(R - r_n)} \frac{y^*}{(r_n - y^*)}, \quad (23)$$

где силовые факторы определяются по формулам (17) и (19).

Сокращенно напряжения в скобке как линейную функцию от силы можно записать следующим образом:

$$\sigma(\varphi, y^*, P) = \Sigma(\varphi, y^*)P. \quad (24)$$

Также можно заметить, что радиус нейтрального слоя r_n не зависит от величины силы P .

2. Итак, напряжения (24) соответствуют действию статически неопределимой силы P , и потому являются статически допустимыми напряжениями. Применение формулы (16) позволяет определить деформацию обратного фазового перехода, которая при возникновении создаст на опорах усилие P в скобке и при этом не вызовет ее полной деформации, что хорошо, так как фиксатор не будет оказывать дополнительного (как правило, отрицательного) воздействия на окружающие ткани. Далее необходимо определить, что нужно сделать со скобкой, чтобы при обратном переходе в ней возникли заданные собственные деформации.

3. В работе предлагается следующий алгоритм предоперационной подготовки скобки (рис. 4). На рис. 4а показаны исходная и требуемая конфигурация скобки. Необходимо, чтобы после фазовой деформации скобка приняла форму, показанную на рис. 4г. Поскольку фазовая деформация накапливается при охлаждении нагруженного материала (ориентированное превращение), то необходимо приложить силы P^* перед охлаждением (рис. 4б). Затем необходимо, не снимая нагрузку, охладить скобку до температуры, при которой закончится мартенситное превращение материала. При этом материал накапливает фазовую деформацию (рис. 4в). После этого нагрузка снимается (рис. 4г).

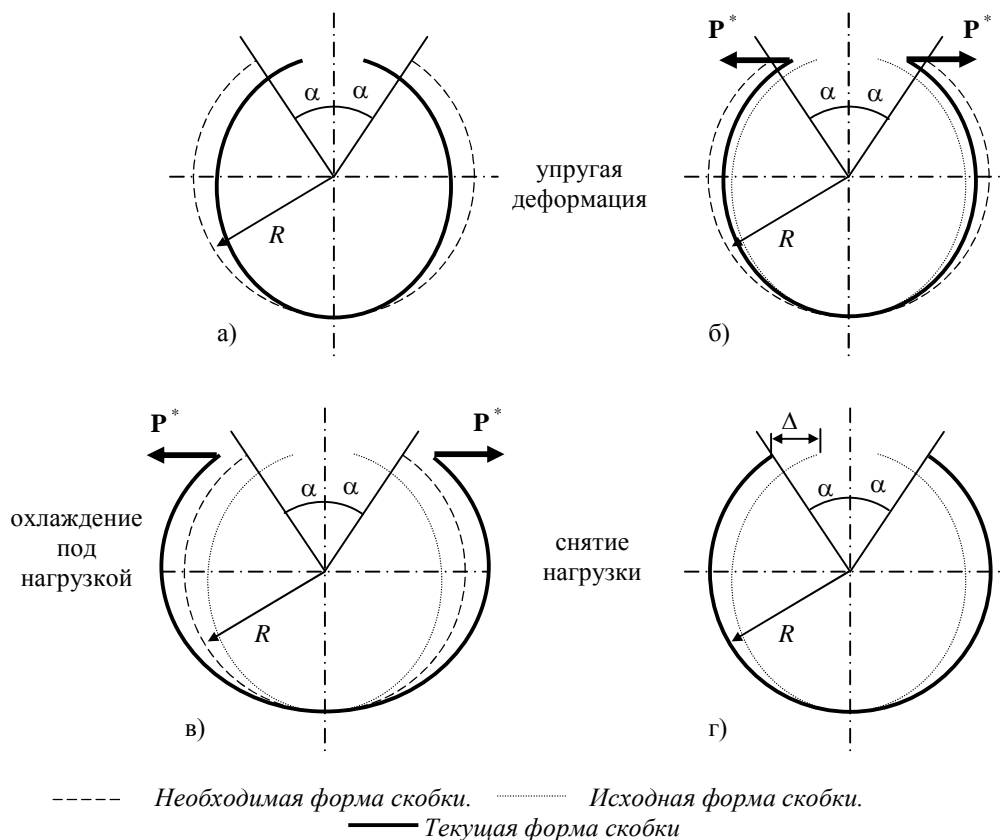


Рис. 4. Предоперационная обработка скобки

Итак, необходимо достичь следующих результатов:

а) чтобы при фазовом переходе накопилась требуемая фазовая деформация, вычисленная по формуле (16),

б) чтобы скобка после обработки приняла заданную форму.

В данной работе будем считать, что эффект памяти формы описывается моделью Мовчана [4].

Найдем значение фазовой деформации путем интегрирования (5) при нулевых начальных условиях. При расчетах предполагается, что напряжения в каждой точке тела не меняют знак в процессе фазового перехода. В этом случае накопленная фазовая деформация имеет тот же знак, что и действующее напряжение. Следовательно, выражение для фазовой деформации будет иметь вид:

$$\varepsilon^p = \frac{2c_0\sigma}{3a_0}(\exp(a_0) - 1), \quad (25)$$

где $\sigma^* = \Sigma(\varphi, y^*)P^*$ – напряжения, вызванные силой P^* .

Таким образом, при обратном мартенситном превращении деформация (25) полностью возвратится. Это эквивалентно тому, что в скобке, показанной на рис. 3. возникнет фазовая деформация $-\varepsilon^p$. Необходимо, чтобы она была равна заданному значению, вычисленному по формулам (16) и (24):

$$\varepsilon^p = -\frac{\Sigma(\varphi, y^*)P}{E}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), получим величину необходимого усилия:

$$P^* = \frac{3a_0}{2c_0E(\exp(a_0) - 1)} P. \quad (27)$$

Поскольку фазовая деформация имеет тот же вид, что и упругая, необходимо вычислить смещение Δ для фазовой деформации (рис. 4г). Для этого воспользуемся формулой Майзеля [8]:

$$2\Delta = \int_V \Sigma(\varphi, y^*) \varepsilon^p dV, \quad (28)$$

где $\Sigma(\varphi, y^*)$ представляет теперь напряжения в скобке, вызванные действием единичной силы (рис. 5).

Таким образом, вычисленные по формулам (27, 28) величины определяют методику предоперационной подготовки фиксирующей скобки.

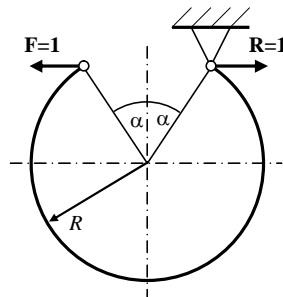


Рис. 5. Нагружение скобки единичной силой для определения перемещений по формуле Майзеля

Численный расчёт

Пусть необходимо, чтобы скобка создала усилие $P = 100\text{Н}$. Геометрические параметры скобки следующие: $\alpha = 30^\circ$; $R = 17\text{ мм}$; $d = 4\text{ мм}$ (диаметр скобки), $F = 12,56\text{ мм}^2$ (площадь поперечного сечения скобки). Скобка изготовлена из сплава с эффектом памяти формы, который имеет следующие свойства: $E_1 = 6800\text{ МПа}$ – модуль упругости сплава в фазе мартенсита; $E_2 = 7400\text{ МПа}$ – модуль упругости сплава в фазе аустенита; $a_0 = 0,718$, $c_0 = 2,43 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{МПа}}$ – параметры, описывающие накопление фазовой деформации при переходе. Тогда согласно формуле (27) сила P^* , которую нужно приложить к скобке, равна:

$$P^* = 57\text{ Н}, \quad (29)$$

и перемещение составит

$$\Delta = 0,021\text{ м}. \quad (30)$$

Выводы

В данной работе сделан первый шаг к решению проблемы оптимального остеосинтеза: построена математическая модель фиксатора, выполненного из материала с эффектом памяти формы. Модель основывается на определяющих соотношениях для эффекта памяти формы, предложенных Мовчаном, а также на теории изгиба кривого бруса. Найдена фазовая деформация, которая вызывает заданные усилия в местах крепления фиксатора. На основе модели Мовчана предложена техника предоперационной подготовки фиксатора для того, чтобы после установки фиксатор создал требуемые усилия в точках крепления за счёт эффекта памяти формы. При этом фиксатор не деформируется (т.е. полная деформация фиксатора равна нулю), и тем самым минимизирована потенциальная возможность травмы окружающих мягких тканей. Техника предоперационной подготовки сведена к параметрам (сила и перемещение точек крепления фиксаторов), которые удобны для использования медиками в предоперационном планировании.

Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке Шестой рамочной программы Евросоюза в рамках контракта МTKD–2004–517226.

Список литературы

1. *Hsu, F.-H.* The influence of mechanical loads on the form of a growing elastic body / F.-H. Hsu // Journal of Biomechanics. – 1968. – Vol. 1. – P. 303–313.
2. *Гюнтер, В.Э.* Сплавы с памятью формы в медицине / В.Э. Гюнтер. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1986.

3. *Лихачёв, В.А.* Эффект памяти формы / В.А. Лихачёв, С.Л. Кузьмин, З.П. Каменцева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.
4. *Мовчан, А.А.* Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы / А.А. Мовчан // Изв. АН СССР: Механика твердого тела. – 1995. – № 1. – С. 197–205.
5. *Cowin, S.C.* Bone mechanics handbook / S.C. Cowin. – London, New York, Washington: CRC Press, 2001.
6. *Akulich, Yu.V.* The bone tissue remodelling in the proximal femur under the variations of the hip joint daily history / Yu.V. Akulich, Y.I. Nyashin, R.M. Podgaets, I.A. Dmitrenok // Russian Journal of Biomechanics. – 2001. – Vol. 5, No. 1. – P. 12–23.
7. *Поздеев, А.А.* Остаточные напряжения: теория и приложения / А.А. Поздеев, Ю.И. Няшин, П.В. Трусов. – М.: Наука, 1982.
8. *Nyashin, Y.* Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain / Y. Nyashin, V. Lokhov, F. Ziegler // ZAMM – Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – Vol. 85, No. 8. – P. 557–570.
9. *Хачин, В.Н.* Об обратимости деформации при мартенситных превращениях в никелиде титана / В.Н. Хачин, Л.А. Соловьев // Металловедение и термическая обработка металлов. – 1975. – № 10. – С. 2–4.
10. *Мовчан, А.А.* Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы / А.А. Мовчан // Изв. АН СССР: Механика твердого тела. – 1996. – № 4. – С. 136–144.
11. *Мовчан, А.А.* Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы / А.А. Мовчан // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 6. – С. 47–53.
12. *Мовчан, А.А.* Выбор аппроксимации фазовой диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы / А.А. Мовчан // Прикладная математика и техническая физика. – 1995. – Том 36, № 2. – С. 173–181.
13. *Мовчан, А.А.* Микромеханический подход к проблеме описания накопления анизотропных рассеянных повреждений / А.А. Мовчан // Изв. АН СССР: Механика твердого тела. – 1990. – № 3. – С. 115–123.
14. *Liang, C.* One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials / C. Liang, S.A. Rogers // J. Intelligent Mater. System and Struct. – 1990. – Vol.1, No. 2. – P. 207–234.
15. *Писаренко, Г.С.* Сопrotивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарёв, А.Л. Квитка, В.Г. Попков, Э.С. Уманский. – Киев: Вища школа, 1986.
16. *Mura, T.* Micromechanics of Defects in Solids / T. Mura. – Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1987.

CREATION OF DESIRED LOADS IN FIXATORS MADE FROM SHAPE MEMORY ALLOY

V.A. Lokhov, A.G. Kuchumov (Perm, Russia)

At healing of bone fracture, it is necessary to rigidly appose bone fragments. For this aim, different types of fixators are used, among them there are fixators made from shape memory alloys. One of the crucial problems in osteosynthesis is creation of favourable mechanical stresses in the fracture domain, which promote the accelerated healing of bone fracture. To accomplish this, the mathematical models of fixator for osteosynthesis at mandible fracture. The model is based on the constitutive relations for alloys with shape memory effect. Based on the developed model, the preoperational treatment technique is suggested for fixator in order to obtain the desired forces in fixator after its installation in the bone tissue. Furthermore, the fixator obtains no deformation (total deformation vanishes) and, consequently, injury possibility for surrounding soft tissues is decreased. The preoperational technique is expressed via parameters (load and displacement of fixation points), which are suitable for use by physicians at preoperational planning.

Key words: shape memory alloy, fixator, osteosynthesis.

Получено 4 сентября 2006