

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ СМАЗЫВАНИЕ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА ЧЕЛОВЕКА С РАЗЛИЧНЫМИ ЧАСТОТАМИ И АМПЛИТУДАМИ

К.Х. Вежхольский

Base Technique Department, Maritime University of Gdynia, Morskastr. 83, PL-81-225, Gdynia, Poland, e-mail: wierzch@am.gdynia.pl

Кафедра основ техники, Морской Университет, Гдыня, Польша

Аннотация. Данная статья содержит аналитические и численные расчеты давления и нагрузки при гидродинамической смазке зазора в тазобедренном суставе человека в условиях неизотермического нестационарного периодического движения. Рассмотрена динамика колебаний с различными частотами и амплитудами головки бедра, вертлужной впадины и синовиальной жидкости. Принята во внимание шероховатость суставных поверхностей. Измерения поверхностей хрящей выполнены с помощью лазерного датчика. Предполагается, что сферическая головка бедра в тазобедренном суставе человека совершает движения в двух направлениях – окружном и меридиональном. Течение синовиальной жидкости описывается уравнениями сохранения импульса и уравнением непрерывности. Численные расчеты выполнены в пакете *Mathcad 11 Professional Program* с использованием метода конечных разностей. Этот метод обеспечивает устойчивость численного решения уравнений в частных производных и дает правильные значения давления и нагрузки в тазобедренном суставе человека.

Ключевые слова: тазобедренный сустав человека, смазывание тазобедренного сустава, периодическое движение, различные частоты и амплитуды.

1. Введение

Тазобедренный сустав в синовиальной оболочке представляет собой настолько сложную систему, что даже современные технологии не могут полностью повторить ее. В этой системе используется относительное скольжение гладких сферических поверхностей для обеспечения вращения конечности при приложении к ней различно направленных и зависящих от времени нагрузок.

В данной работе предполагается, что сферическая головка бедра совершает вращательные движения вокруг двух осей с различными угловыми скоростями, см. рис. 1. Символом φ обозначена окружная координата, символом r – координата в

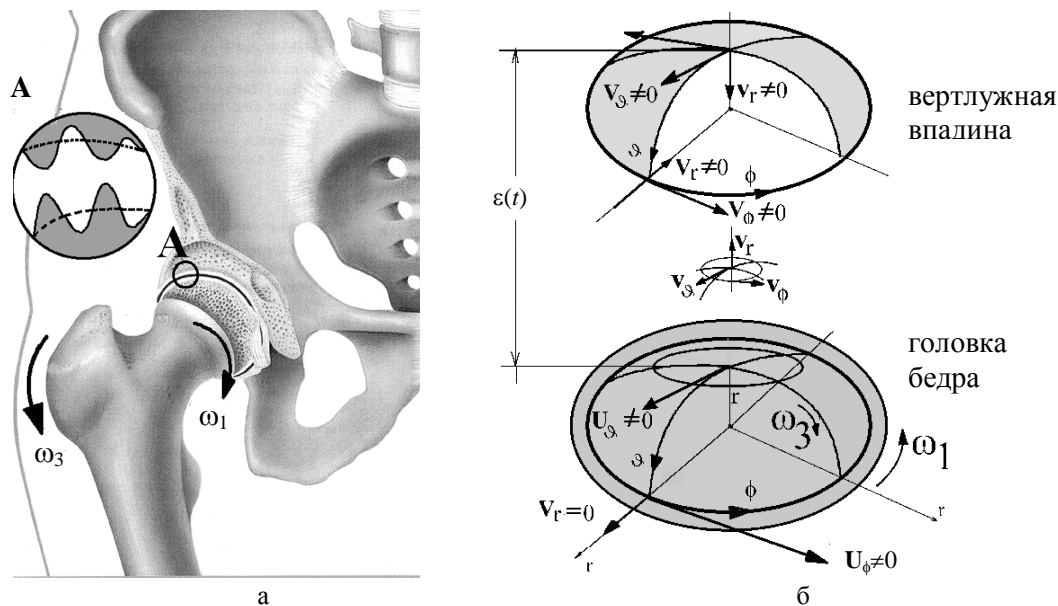


Рис. 1. Вращательное движение головки бедра в двух направлениях:
а) общий вид, б) вид в деталях

направлении высоты зазора, символ ϑ обозначает меридиан костной поверхности вращения, или долготную координату. В работах [1, 5, 9] обсуждаются гидродинамические и механические параметры тазобедренного сустава человека. Как правило, там используются как аналитические, так и численные методы.

В работах [3, 6, 13, 14, 18, 24] исследуются силы трения в различных суставах человека для различной геометрии соприкасающихся костных поверхностей при изменяющейся высоте суставного зазора и несимметричном течении синовиальной жидкости. В вышеупомянутых работах [1, 5, 7, 8, 9, 12, 19, 20, 21, 23] не рассматривалось периодическое движение с различными частотами головки бедра и вертлужной впадины тазобедренного сустава человека. Также не принималось во внимание вязкоупругое смазывание при случайных условиях. Новизна данной работы состоит в вычислении нагрузки в тазобедренном суставе человека для шероховатых поверхностей кости и хряща, которые смазываются благодаря периодическому течению с различными частотами и амплитудами.

При несимметричном течении синовиальной жидкости три компоненты v_φ , v_r , v_θ скорости жидкости по направлениям φ , r , ϑ зависят от переменных φ , r , ϑ и времени t . Давление p и вязкость синовиальной жидкости зависят от φ , ϑ , t . Высота ε зазора есть функция переменных φ , ϑ и t . Полученное в данной работе решение задачи о смазке дает давление и нагрузку для неньютоновой синовиальной жидкости во втором порядке точности. Предполагается, что колебания с различными частотами и амплитудами в окружном и меридиональном направлениях происходят в синовиальной жидкости и на поверхностях головки бедра и вертлужной впадины. Учитываются случайные изменения высоты зазора между костями.

2. Основные уравнения

В тазобедренном суставе человека синовиальная жидкость течет между головкой бедра и вертлужной впадиной. Задача о смазке в суставном зазоре будет

решена с помощью уравнения сохранения импульса, уравнения непрерывности и уравнения энергии [20, 21]:

$$\text{Div } \mathbf{S} = \rho \, dv/dt,$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \, d(c_v T)/dt = \text{div}(\kappa \, \text{grad } T) = \text{div}(\mathbf{v}\mathbf{S}) - \mathbf{v} \, \text{Div } \mathbf{S}. \quad (1)$$

Кроме того, общее определяющее соотношение Ривлина и Эриксона во втором порядке точности записывается в следующем виде [2, 15, 16, 17]:

$$\mathbf{S} = -p \, \mathbf{I} + \eta \mathbf{A}_1 + \alpha (\mathbf{A}_1)^2 + \beta \mathbf{A}_2, \quad (2)$$

где \mathbf{S} – тензор напряжений, p – давление, \mathbf{I} – единичный тензор, \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 – первые два тензора Ривлина – Эриксона и η , α , β – три материальные константы (η – динамическая вязкость). Через T обозначена температура, κ – теплопроводность синовиальной жидкости, c_v – теплоемкость синовиальной жидкости. Через \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 обозначены симметричные матрицы, определенные в [15, 16, 17]:

$$\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{L} + \mathbf{L}^T, \mathbf{A}_2 \equiv \text{grad } \mathbf{a} + (\text{grad } \mathbf{a})^T + 2\mathbf{L}^T \mathbf{L}, \mathbf{a} \equiv \mathbf{L} \mathbf{v} +, \mathbf{L} \equiv \text{grad } \mathbf{v}, \mathbf{L}^T \equiv (\text{grad } \mathbf{v})^T, \quad (3)$$

где \mathbf{v} – скорость (м/с), t – время (с), \mathbf{a} – ускорение (м/с²). Сферическая головка бедра движется относительно вертлужной впадины в окружном направлении ϕ и меридиональном направлении ϑ . Поверхности вертлужной впадины и головки бедра колеблются в направлениях ϕ и ϑ с различными амплитудами и частотами. Кроме того, вертлужная впадина колеблется в направлении высоты зазора. Такое движение суставных поверхностей вызывает течение синовиальной жидкости в суставном зазоре. Угловую скорость вращения головки бедра в окружном направлении обозначим через ω_1 , в меридиональном направлении – через ω_3 . В суставном зазоре имеется несимметричное нестационарное течение синовиальной жидкости, при этом жидкость проявляет вязкоупругие и нестационарные свойства. Центробежными силами пренебрегаем. Введем следующие обозначения: $U = \omega_1 R$ – окружная скорость, $\rho \equiv \rho_0$ – постоянная плотность синовиальной жидкости, $\eta = \eta_0 \eta_1$ – переменная вязкость, η_0 – характерное значение динамической вязкости, ε – зависящая от времени высота суставного зазора, R – радиус головки бедра, t_0 – характерное значение времени; течение жидкости предполагается изотермическим.

Предполагаем, что произведение чисел Дебора (*Deborah*) $De \equiv \beta \omega_1 / \eta_0$ и Струхала $Str = RU/t_0$, то есть $De \, Str$, и произведение числа Рейнольдса $Re = \rho U \varepsilon / \eta_0$, безразмерного зазора ψ и числа Струхала, то есть $Re \, Str \, \psi$, являются величинами одного порядка и что $De \, Str \gg De$ [14]. Учтем эти оценки в основном уравнении течения тонкого слоя в сферическом суставном зазоре [14]. Пренебрегая величиной $\psi \equiv \varepsilon/R \approx 10^{-3}$ и центробежными силами, получим в вышеупомянутых предположениях следующие уравнения в сферических координатах ϕ , r , ϑ [12, 19, 20, 21, 22]:

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = - \frac{1}{\rho R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right)} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\eta_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_1 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial^3 v_\phi}{\partial t \partial r^2}, \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{\eta_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_1 \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial^3 v_\vartheta}{\partial t \partial r^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[R v_\vartheta \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \eta \left[\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right)^2 \right] = 0, \quad (8)$$

где $0 < \varphi \leq 2\pi$, $0 < \theta_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $0 \leq r \leq \varepsilon$, ε – высота зазора. Члены с множителем β описывают влияние вязкоупругих свойств синовиальной жидкости на эффекты смазки. Конвективными членами пренебрегаем. В левых частях (4) и (6) оставлены только производные по времени от компонент скорости. В уравнении энергии учтены диссипативные члены.

3. Метод решения задачи о периодическом смазывании

Так как уравнения (4) – (7) линейны, то можно разделить стационарное и нестационарное течения жидкости. Учтем касательные и вертикальные ускорения точек суставной поверхности. Запишем компоненты скорости жидкости и давление в виде сходящихся рядов [3, 11]:

$$v_i = v_i^{(0)}(\varphi, r, \vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} v_i^{(k)}(\varphi, r, \vartheta) \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t), \quad i = \varphi, \vartheta, \quad (9)$$

$$v_r = v_r^{(0)}(\varphi, r, \vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} v_r^{(k)}(\varphi, r, \vartheta) \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t), \quad (10)$$

$$T = T^{(0)}(\varphi, r, \vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} T^{(k)}(\varphi, r, \vartheta) \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t), \quad (11)$$

$$p = p^{(0)}(\varphi, \vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(\varphi, \vartheta) \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t). \quad (12)$$

Через ω_0 обозначена частота колебаний (с^{-1}); это частота периодических возмущений нестационарного течения жидкости. Через $\mathbf{i} \equiv \sqrt{-1}$ обозначена мнимая единица. Неизвестные функции с верхним индексом (0) есть компоненты скорости и давление для стационарного течения не вязкоупругой жидкости. Неизвестные функции с верхним индексом (k) для $k = 1, 2, 3, \dots$, являются поправками, обусловленными нестационарными вязкоупругими свойствами жидкости. Высота зазора имеет следующий вид [4, 10]:

$$\varepsilon_{tot} \equiv \varepsilon^{(0)} + \tilde{\varepsilon} + \delta \equiv \varepsilon^{(0)}(\varphi, \vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{(k)}(\varphi, \vartheta) \exp(\mathbf{i}k\omega_r t) + \delta, \quad (13)$$

где δ (ξ) – случайная добавка, возникающая из-за колебаний и неровностей поверхности, отсчитываемых от среднего уровня, ξ – случайная величина, $\tilde{\varepsilon}$ – нестационарное возмущение высоты зазора, вызываемое нестационарными условиями работы сустава, $\varepsilon^{(k)}$ – не зависящие от времени коэффициенты в возмущениях высоты зазора, $\varepsilon^{(0)}$ – начальное значение высоты зазора, ε_{tot} – общая высота зазора, ω_r – частота колебаний в направлении высоты зазора. Детали метода решения см. в Приложении 1.

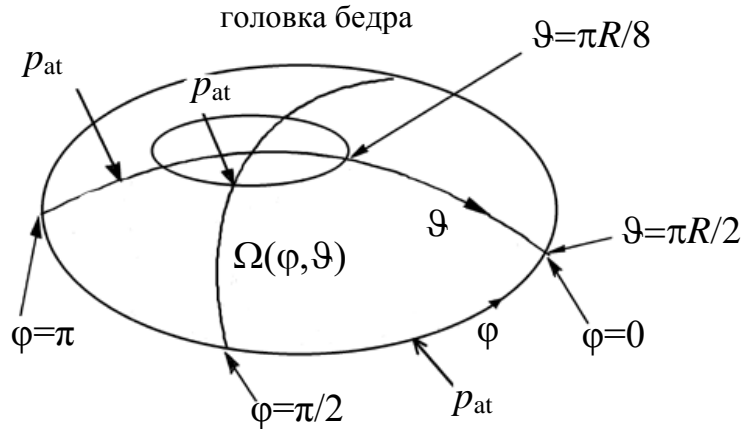


Рис. 2. Расположение области смазывания сферической головки бедра

4. Граничные условия

Расположение области смазывания Ω : $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$ показано на рис. 2. Вертлужная впадина движется в окружном φ и меридиональном ϑ направлениях. Кроме того, учитываем зависящее от времени касательное ускорение точек поверхности головки бедра. Касательные (в направлениях φ и ϑ) компоненты скорости (U) на поверхности головки бедра и компоненты скорости (V) на поверхности вертлужной впадины, а также температура имеют следующий вид:

$$U_i = U_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{ik} \exp(\mathbf{i}k\omega_{iu}t), \quad V_i = \sum_{k=1}^{\infty} V_{ik} \exp(\mathbf{i}k\omega_{iv}t), \quad (14)$$

$$T = T_o \quad \text{при} \quad r = 0, \quad T_1 = f^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \exp(\mathbf{i}k\omega_{iu}t) \quad \text{при} \quad r = \varepsilon,$$

$$U_{ik} \equiv \frac{U_{i\Delta}}{k^5}, \quad V_{ik} \equiv \frac{V_{i0}}{k^5} = \text{const}, \quad T_k \equiv \frac{f^{(k)}}{k^5} \quad U_{\varphi\Delta} \equiv \omega_{10}R \sin(\vartheta/R), \quad U_{\vartheta\Delta} \equiv \omega_{30}R \sin \varphi,$$

где U_{ik} – не зависящие от времени амплитуды касательных колебаний на поверхности головки бедра, $i = \varphi, \vartheta$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $V_{ik}, f^{(k)}$ – не зависящие от времени амплитуды колебаний касательной скорости и температуры на поверхности вертлужной впадины, $i = \varphi, \vartheta$; $k = 1, 2, 3, \dots$. Через $f^{(0)}$ обозначена не зависящая от времени часть температуры вертлужной впадины. Через $\omega_{\varphi v}, \omega_{\varphi u}, \omega_{\vartheta v}, \omega_{\vartheta u}$ обозначены различные частоты колебаний вертлужной впадины (нижний индекс v) и головки бедра (нижний индекс u) в направлениях φ и ϑ . Эти частоты отличаются от частоты ω_0 , соответствующей синовиальной жидкости. Окружная скорость на поверхности сферической головки бедра не зависит от φ и достигает максимального значения $\omega_1 R$ на экваторе при $\vartheta = R\pi/2$, а нулевого значения – на полюсе при $\vartheta = 0$ или $\vartheta = R\pi$. Меридиональная скорость на поверхности сферической головки бедра не зависит от ϑ и достигает максимального значения $\omega_3 R$ при $\varphi = \pi/2$, а нулевого значения – при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Следовательно, не зависящие от времени части окружной и меридиональной скоростей для головки бедра при стационарном движении имеют вид:

$$U_{\varphi 0} = \omega_1 R \sin(\vartheta/R), \quad U_{\vartheta 0} = \omega_1 R \sin(\varphi), \quad 0 < \vartheta \leq R\pi, \quad 0 < \varphi \leq \pi. \quad (15)$$

Обозначим через ω_1 и ω_{10} угловую скорость и поправку к ней для вращения головки бедра в φ – направлении; через ω_3 и ω_{30} – угловую скорость и поправку к ней для вращения головки бедра в ϑ -направлении. Внутри суставного зазора на скорости (9, 10) накладывается граничное условие (14)₁. Приравниваем первые стационарные члены правой части (9), представляющие собой компоненты скорости жидкости, стационарным членам правой части (14)₁. Компоненты скорости жидкости на поверхности неподвижной вертлужной впадины равны нулю. На поверхности головки бедра равна нулю только вертикальная компонента скорости жидкости, так как учитываются вязкие свойства жидкости. Компоненты скорости жидкости на поверхности головки бедра в направлениях φ и ϑ равны соответствующим компонентам скорости головки бедра. Граничные условия на стационарную часть компонент скорости жидкости для $i = \varphi, \vartheta; k = 1, 2, 3, \dots$ на поверхности головки бедра при $r = 0$ и на поверхности вертлужной впадины при $r = \varepsilon$ имеют следующий вид:

$$v_{\varphi}^{(0)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = U_{\varphi 0}(\vartheta), \quad v_{\vartheta}^{(0)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = U_{\vartheta 0}(\varphi), \quad (16)$$

$$v_r^{(0)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = 0, \quad T^{(0)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = T_0, \quad (17)$$

$$v_i^{(0)}(\varphi, r = \varepsilon, \vartheta) = 0, \quad \text{при } i = \varphi, r, \vartheta; \quad T^{(0)}(\varphi, r = \varepsilon, \vartheta) = f^{(0)}. \quad (18)$$

Теперь наложим нестационарную часть граничных условий (14)₁ на нестационарную часть компонент скорости (9, 10, 11). Однако сопоставить нестационарные члены в рядах (14)₁ и (9, 10, 11) невозможно, так как частоты в обеих частях уравнений различны. Поэтому ряды в правых частях (14)₁, (14)₂, описывающие колебания с известными амплитудами $U_{\varphi k}, U_{\vartheta k}, V_{\varphi k}, V_{\vartheta k}, T_k$ и известными частотами $\omega_{\varphi u}, \omega_{\vartheta u}, \omega_{\varphi v}, \omega_{\vartheta v}$, преобразуются (см. Приложение 2) в ряды с некоторыми новыми, неизвестными, амплитудами $U_{\varphi k}^*, U_{\vartheta k}^*, V_{\varphi k}^*, V_{\vartheta k}^*, T_k^*$ и известной частотой ω_0 , отвечающей синовиальной жидкости. В Приложении 2 также приведено вычисление амплитуд U_{ik}^*, V_{ik}^* [2, 9]. В результате вычислений новые неизвестные амплитуды $U_{\varphi k}^*, U_{\vartheta k}^*, V_{\varphi k}^*, V_{\vartheta k}^*, W_k^*, T_k^*$ получаются как функции известных амплитуд $U_{\varphi k}, U_{\vartheta k}, V_{\varphi k}, V_{\vartheta k}, W_k, T_k$, известных, экспериментально измеренных, частот $\omega_{\varphi u}, \omega_{\vartheta u}, \omega_{\varphi v}, \omega_{\vartheta v}, \omega_r$ и известной частоты ω_0 , отвечающей колебаниям синовиальной жидкости [2]. Например, через $\omega_{\varphi u}, \omega_{\vartheta u}$ обозначены частоты колебаний головки бедра в φ и ϑ направлениях. Через $\omega_{\varphi v}, \omega_{\vartheta v}$ обозначены частоты колебаний вертлужной впадины в φ и ϑ направлениях. Теперь можно приравнять нестационарные члены в правых частях (9, 10) нестационарным членам в правых частях (14)₁, (14)₂. Граничные условия на нестационарные поправки к температуре и к компонентам скорости $i = \varphi, \vartheta; k = 1, 2, 3, \dots$ имеют на поверхности головки бедра при $r = 0$ и на поверхности вертлужной впадины при $r = \varepsilon$ следующий вид [3, 11]:

$$v_{\varphi}^{(k)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = U_{\varphi k}^*(U_{\varphi k}, \omega_{\varphi u}), \quad v_{\vartheta}^{(k)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = U_{\vartheta k}^*(U_{\vartheta k}, \omega_{\vartheta u}), \quad (19)$$

$$v_r^{(k)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = 0, \quad T^{(k)}(\varphi, r = 0, \vartheta) = 0, \quad (20)$$

$$v_i^{(k)}(\varphi, r = \varepsilon, \vartheta) = V_{ik}^*(V_{ik}, \omega_{iv}), \quad \text{при } i = \varphi, \vartheta, \quad T^{(k)}(\varphi, r = \varepsilon, \vartheta) = T_k^*. \quad (21)$$

Высота суставного зазора со временем меняется. Вертикальная компонента скорости жидкости на поверхности вертлужной впадины равна производной по времени от высоты зазора. Следовательно, используя (13), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_r^{(k)}(\varphi, r = \varepsilon, \vartheta) \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t) = \frac{\partial \varepsilon_{tot}}{\partial t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{(k)} \mathbf{i}k\omega_r \exp(\mathbf{i}k\omega_r t) \equiv \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} W_k \exp(\mathbf{i}k\omega_r t) \equiv \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} W_k^* \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t). \quad (22)$$

Приравнивая амплитуды в обеих частях выписанных выше рядов, находим:

$$v_r^{(k)}(\varphi, r = \varepsilon, \vartheta) = \mathbf{i}W_k^*(W_k, \omega_r), \quad W_k \equiv \varepsilon^{(k)}k\omega_r \quad (23)$$

для $k = 1, 2, 3, \dots$, $\varepsilon^{(k)} \equiv B_e \varepsilon^{(0)}/k^5$, где $0 < B_e < 1$. Безразмерный коэффициент B_e отвечает за не зависящие от времени возмущения высоты зазора. Не зависящая от времени средняя высота зазора с возмущениями имеет вид [3]:

$$v_r^{(k)}(\varphi, r = \varepsilon, \vartheta) = \mathbf{i}W_k^*(W_k, \omega_r), \quad W_k \equiv \varepsilon^{(k)}k\omega_r \quad (23)$$

где

$$\varepsilon^{(0)}(\varphi, \vartheta / R) \equiv \Delta \varepsilon_x \cos \varphi \sin \vartheta / R + \Delta \varepsilon_y \sin \varphi \sin \vartheta / R - \Delta \varepsilon_z \cos \vartheta / R - R +$$

$$+ [(\Delta \varepsilon_x \cos \varphi \sin \vartheta / R + \Delta \varepsilon_y \sin \varphi \sin \vartheta / R - \Delta \varepsilon_z \cos \vartheta / R)^2 +$$

$$+(R + \varepsilon_{\min})(R + 2D + \varepsilon_{\min})] \quad (25)$$

и t_s – средний временной период возмущений суставного зазора, $\Re e$ – вещественная часть комплексного числа. Центр сферической головки бедра расположен в точке $O(0, 0, 0)$, а центр сферического хряща – в точке $O_1(x-\Delta\varepsilon_x, y-\Delta\varepsilon_y, z+\Delta\varepsilon_z)$. Экцентриситет обозначен через D (см. рис. 3). Вывод соотношения (25) приведен в Приложении 2 (см. уравнения A2.20 – A2.22).

5. Стохастические уравнения для распределения давления и сил трения

Нахождение компонент $v_i^{(0)}, v_i^{(k)}$ скоростей жидкости для граничных условий (16), (18)₁, (19) и для постоянного значения динамической вязкости в направлении высоты зазора приведено в Приложениях 1 и 3. Граничные условия (16), (18)₁, (19), (21)₁ добавляются к системе уравнений (A1.1) – (A1.3), описывающих стационарное течение, а граничные условия (19), (21)₁ – к системе уравнений (A1.6) – (A1.8) для поправок (см. Приложение 1). Тогда получаем искомые компоненты скорости стационарного течения $v_\varphi^{(0)}, v_\vartheta^{(0)}$ и поправки $v_\varphi^{(k)}, v_\vartheta^{(k)}$ для $k = 1, 2, 3, \dots$, вызванные вязкоупругими свойствами и нестационарностью течения. Результаты вычислений приведены в Приложении 3.

Подставим функции $v_\varphi^{(0)}, v_\vartheta^{(0)}$ (см. (A3.1), (A3.2) в Приложении 3) в уравнение непрерывности для стационарного течения (A1.4) и подставим найденные функции $v_\varphi^{(k)}, v_\vartheta^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$, см. (A3.3), (A3.4)) в уравнение непрерывности для поправок (A1.9). Тогда после интегрирования по r получим компоненту скорости $v_r^{(0)}$ в направлении высоты зазора и получим поправки $v_r^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) к этой компоненте (см. Приложение 4). Учитывая граничные условия (17)₁, (18)₁, (20)₁, (23) для $v_r^{(0)}$ (см. (A4.1)) и поправок $v_r^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) к ней (см. (A4.2)), получим модифицированное уравнение Рейнольдса для давления $p^{(0)}$ и поправок к нему $p^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Детали вычислений приведены в Приложении 5.

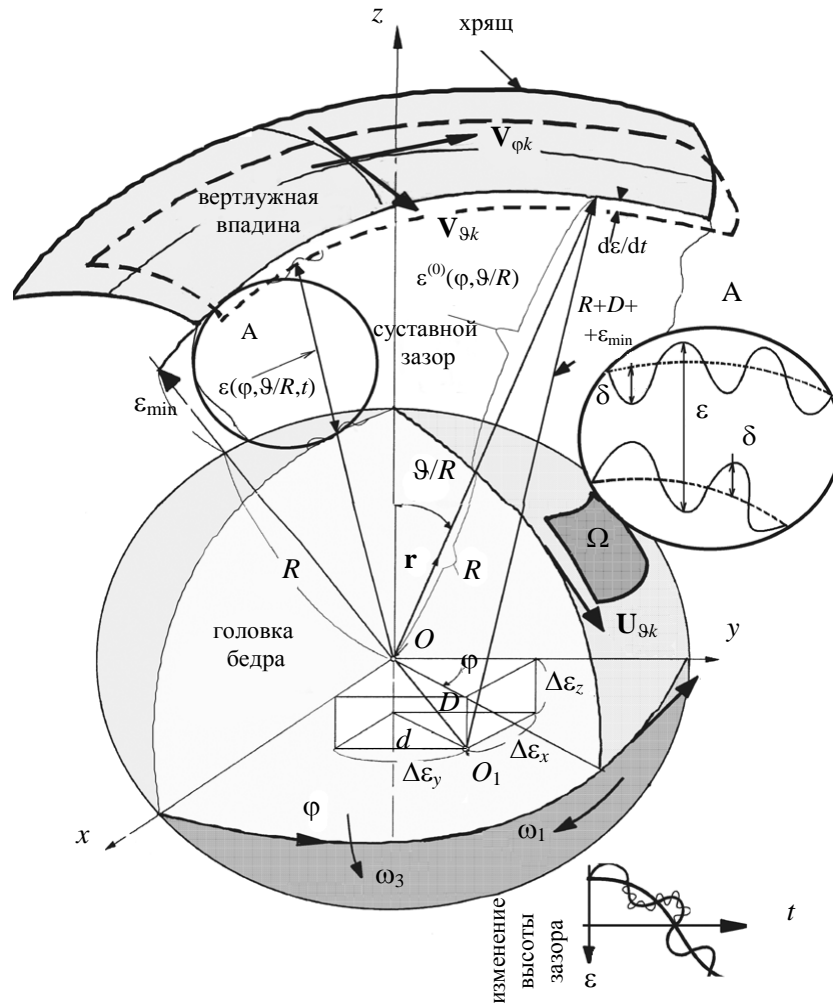


Рис. 3. Изменение высоты зазора со временем, центр сферической головки бедра и вертлужной впадины, значения скорости на границе

Модифицированное уравнение Рейнольдса для стационарного течения синовиальной жидкости без вязкоупругих свойств определяет искомое давление $p^{(0)}$ и имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\varepsilon^3}{\eta_0 \eta_1} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \varphi} \right\} + R \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{\varepsilon^3}{\eta_0 \eta_1} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \vartheta} \sin \frac{\vartheta}{R} \right\} = \\ = 6\omega_1 R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + 6\omega_3 R^2 \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\varepsilon \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

в Ω : $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$.

Далее рассмотрим модифицированные уравнения Рейнольдса для поправок $p^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) к давлению, вызванных периодическим течением жидкости с вязкоупругими свойствами. Эти уравнения выведены в Приложении 5 (см. (A5.6)). Умножая (A5.6) на $\exp(i k \omega_0 t)$ и приравнивая вещественные части, получим следующую последовательность модифицированных уравнений Рейнольдса:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\varepsilon^3}{\eta_{ka}} \frac{\partial P_{ck}}{\partial \varphi} \right] + R \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\varepsilon^3}{\eta_{ka}} \frac{\partial P_{ck}}{\partial \vartheta} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] = -12 W_k^* R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \sin(k\omega_0 t) + \\ & + 6 \left[U_{\varphi k}^* (\alpha_3) + V_{\varphi k}^* \right] \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \cos(k\omega_0 t) + \frac{k\omega_0 \rho_0}{12} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\varepsilon^3 X_{\eta k}) \right] - 12 \left[V_{\varphi k}^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + R \left(\sin \frac{\vartheta}{R} \right) V_{\vartheta k}^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \right] \\ & \cdot \cos(k\omega_0 t) + 6 \left[U_{\vartheta k}^* (\alpha_1) + V_{\vartheta k}^* \right] R \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\varepsilon \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] \cos(k\omega_0 t) + \frac{k\omega_0 \rho_0}{12} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\varepsilon^3 X_{\eta k} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

для $k = 1, 2, 3, \dots$, $0 < \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $0 \leq r \leq \varepsilon$ и

$$\begin{aligned} P_{ck} & \equiv \Re e [p^{(k)} \exp(ik\omega_0 t)], \quad X_{\eta k} \equiv \frac{\sin(k\omega_0 t)}{\eta_{ka}} + \frac{\cos(k\omega_0 t)}{\eta_{kb}}, \quad \frac{1}{\eta_{ka}} \equiv \Re e \left(\frac{1}{\eta_k} \right) \equiv \frac{\eta_0 \eta_1}{|\eta_k|^2}, \\ \frac{1}{\eta_{kb}} & \equiv \Im m \left(\frac{1}{\eta_k} \right) \equiv -\frac{k\omega_0 \beta}{|\eta_k|^2}, \quad \eta_k = \eta_0 \eta_1 + ik\omega_0 \beta, \quad |\eta_k|^2 = (\eta_0 \eta_1)^2 + (k\omega_0 \beta)^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнение (27) определяет поправки P_{ck} к давлению, вызванные нестационарным течением синовиальной жидкости с вязкоупругими свойствами. Новые амплитуды имеют вид (см. Приложение 2):

$$U_{ik}^* = \frac{U_{i\Delta}}{k^5} S_{iuk}, \quad V_{ik}^* = \frac{V_{i0}}{k^5} S_{ivk}, \quad W_k^* = \frac{\varepsilon^{(0)} B_e \omega_0}{k^4} S_{rk}, \quad (29)$$

где $i = \varphi, \vartheta$ и $k = 1, 2, 3, \dots$. Функции S_{iuk}, S_{ivk}, S_{rk} зависят от частот $\omega_{\varphi v}, \omega_{\varphi u}, \omega_{\vartheta v}, \omega_{\vartheta u}, \omega_r$ (см. Приложение 2). В частном случае $\omega_{iv} = \omega_{iu} = \omega_0$ и $\omega_r \neq \omega_0$ находим $S_{iuk} = 1, S_{ivk} = 1$, следовательно, $U_{ik}^* = U_{ik}, V_{ik}^* = V_{ik}$ и $S_{rk} \neq 1$, где $0 < B_e \ll 1$ (см. Приложение 2, (A2.18)). Уравнения (27) при $k = 1, 2, 3, \dots$ дают окончательные модифицированные стохастические уравнения Рейнольдса для поправок [3]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R \sin \frac{\vartheta}{R}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{E(\varepsilon^3)}{\eta_{ka}} \frac{\partial E(P_{ck})}{\partial \varphi} \right\} + R \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{E(\varepsilon^3)}{\eta_{ka}} \frac{\partial E(P_{ck})}{\partial \vartheta} \sin \frac{\vartheta}{R} \right\} = \\ & = -12 \omega_0 R B_e \left(\sin \frac{\vartheta}{R} \right) \varepsilon^{(0)} S_{rk} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k^4} - 12 \left\{ V_{\varphi 0} \frac{\partial E(\varepsilon)}{\partial \varphi} + R \left(\sin \frac{\vartheta}{R} \right) V_{\vartheta 0} \frac{\partial E(\varepsilon)}{\partial \vartheta} \right\} \times \\ & \times \frac{\cos(k\omega_0 t)}{k^5} + 6 \left[\omega_{10} R \left(\sin \frac{\vartheta}{R} \right) + V_{\varphi 0} \right] \left\{ \frac{\partial E(\varepsilon)}{\partial \varphi} \frac{\cos(k\omega_0 t)}{k^5} + \frac{\omega_0 \rho_0}{12 k^4} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[E(\varepsilon^3) X_{\eta k} \right] \right\} + \\ & + 6 R \left[\omega_{30} R \left(\sin \varphi \right) + V_{\vartheta 0} \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[E(\varepsilon) \sin \frac{\vartheta}{R} \right] \frac{\cos(k\omega_0 t)}{k^5} + \frac{\omega_0 \rho_0}{12 k^4} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[E(\varepsilon^3) X_{\eta k} \sin \frac{\vartheta}{R} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $0 < \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $0 \leq r \leq \varepsilon$. При $\omega_r = \omega_0$ получим $S_{rk} = 1$, где $0 < B_e \ll 1$. Уравнение (30) определяет средние значения для поправок к давлению $E(P_{ck})$. Среднее значение суммарного давления и оператор осреднения имеют следующий вид [3]:

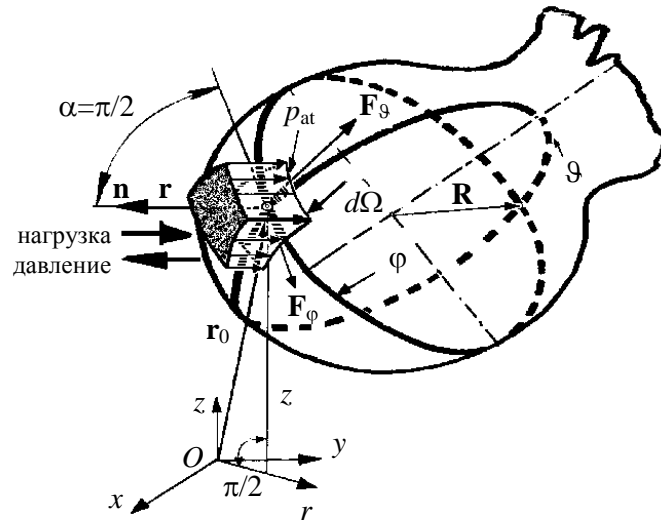


Рис. 4. Расположение сил трения в окружном и меридиональном направлениях

$$E(p) = E[p^{(0)}] + \sum_{k=1}^{\infty} E[P_{ck}],$$

$$E(*) = \int_{-\infty}^{+\infty} (*) \times f(\delta) d\delta, \quad f(\delta) \equiv \begin{cases} \frac{35}{32c^7} (c^2 - \delta^2)^3 & \text{при } -c \leq \delta \leq +c, \\ 0 & \text{при } |\delta| > \theta, \end{cases} \quad (31)$$

где f – плотность распределения случайной шероховатости хряща. Через c обозначена половина диапазона изменения случайной толщины. Функция f обращается в нуль при $c = \pm 3\sigma$, где σ – стандартное отклонение. После вычислений находим:

$$E(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon f(\delta) d\delta = \Gamma_s \varepsilon^{(0)}, \quad E(\varepsilon^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^3 f(\delta) d\delta = (\Gamma_s \varepsilon^{(0)})^3 (1 + 3\wp^2), \quad 0 \leq \frac{\sigma}{\Gamma_s \varepsilon^{(0)}} \equiv \wp \leq \frac{1}{3}, \quad (32)$$

где $\Gamma_s \equiv 1 + \Gamma_y$. На рис. 4 показано распределение давления $p(\varphi, \vartheta)$ на сферической поверхности головки бедра (φ и ϑ – сферические координаты). Полная нагрузка на головку бедра получается следующим образом:

$$C_{tot} \equiv \iint_{\Omega(\varphi, \vartheta)} E[p(\varphi, \vartheta)] d\Omega(\varphi, \vartheta), \quad (33)$$

где \iint_{Ω} – интеграл по поверхности головки бедра. Элемент площади в интеграле имеет вид:

$$d\Omega \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \vartheta} \right|_{r=R} d\varphi d\vartheta \quad \text{при } \mathbf{r}_0 = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad (34)$$

где

$$x = r \cos \varphi \sin(\vartheta/R), \quad y = r \sin \varphi \sin(\vartheta/R), \quad z = r \cos(\vartheta/R) \quad 0 < r < R. \quad (35)$$

Через \mathbf{r}_0 обозначен радиус-вектор точки поверхности головки бедра (см. рис. 4); $0 < \varphi < 2\pi c_1$, $0 < c_1 < 1$, $\pi R/8 < \vartheta < \pi R/2$. Подставляя (35) в (34), получим:

$$d\Omega = R^2 \sin(\vartheta/R) d\varphi d(\vartheta/R). \quad (36)$$

На рис. 4 показано расположение сил трения в направлениях φ и ϑ . Окружная и меридиональная компоненты силы имеют вид:

$$F_{\varphi} \equiv \iint_{\Omega(\varphi, \vartheta)} \left(\eta_p \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} \right)_{r=\varepsilon} d\Omega(\varphi, \vartheta), \quad F_{\vartheta} \equiv \iint_{\Omega(\varphi, \vartheta)} \left(\eta_p \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial r} \right)_{r=\varepsilon} d\Omega(\varphi, \vartheta). \quad (37)$$

6. Экспериментальные измерения

Плотность распределения высоты суставного зазора находилась путем экспериментальных измерений шероховатости образцов хряща и соответствующих стандартных отклонений. Измерения выполнялись с помощью лазерного микродатчика, установленного на аппаратуре *Rank Taylor Hopson Talyscan 150* и управляемого посредством компьютерных программ *Talyscan Expert* и *Microsoft Excel*. Измерения проводились для 29 образцов; получены параметры S_t , S_z , S_a шероховатости поверхности (в мкм). Здесь: S_t – разность максимальной высоты и максимальной глубины на поверхности головки бедра, S_z – среднее арифметическое пяти максимальных высот и пяти максимальных глубин, S_a – стандартное отклонение для плотности распределения шероховатости поверхности хряща. Измеренные значения S_t находятся в интервале от 9,79 мкм до 24,7 мкм. Измеренные значения S_z находятся в интервале от 8,52 мкм до 14,7 мкм. Окончательно вычисленные значения S_a находятся в интервале от 0,78 мкм до 1,96 мкм. На рис. 5 показана карта поверхности нормального суставного хряща с высотой неровностей до 24,7 мкм и сечения 1 и 2 этой поверхности. Образец имел 2 мм в длину и 2 мм в ширину.

7. Численные расчеты

Распределение давления $p^{(0)}$ и поправки к нему $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$,... определялись в области смазывания Ω . Суммарное давление равно атмосферному p_{at} на границе области Ω , показанной на рис. 3 и на основе медицинской информации, определяемой неравенствами Ω : $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\pi R/8 \leq \alpha_3 \equiv \vartheta \leq \pi R/2$. Это сечение сферического углубления. Численные расчеты проводились для области Ω , $R = 0,0265$ м, $\omega_1 = 1,40$ с⁻¹, $\omega_3 = -0,45$ с⁻¹, $\omega_0 = 500$ с⁻¹, $\omega_{10} = 0,100$ с, $\omega_{30} = 0,025$ с, $\Delta \varepsilon_x = 2,5$ м, $\Delta \varepsilon_y = 0,5$ м, $\Delta \varepsilon_z = 2,0$ м, $\eta_0 = 0,15$ Па, $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Минимальное значение высоты зазора равнялось $\varepsilon_{\min} = 4,8$ мкм, максимальное значение высоты зазора равнялось $\varepsilon_{\max} = 10,50$ мкм. Учитывалась измеренная шероховатость поверхностей. Значения давления вычислялись в следующие моменты времени: $t = 0$ с, $t = 0,3\pi/\omega_0$ с, $t = \pi/\omega_0$ с, $t = 1,7\pi/\omega_0$ с, $t = 2\pi/\omega_0$ с,.... Вначале были проведены численные расчеты без учета вязкоупругих свойств синовиальной жидкости, то есть при $\beta_0 = 0,00000$ Па² и $\beta_0 = 0,00020$ Па².

На вертлужной впадине принимались следующие амплитуды колебаний касательной скорости: $V_{\varphi 0} = 0,001$ м/с, $V_{\vartheta 0} = -0,0002$ м/с. Коэффициент возмущений высоты зазора принимался равным $B_e = +0,0002$. Принимались во внимание случайные эффекты для $0 \leq \wp < 1$.

Численное нахождение зависящего от времени распределения давления проводилось с помощью уравнения (30), а высоты зазора с помощью (24, 25). Результаты показаны на рис. 6, 7, 8, 9. Временной период возмущений составлял $t = 2\pi/\omega_0$.

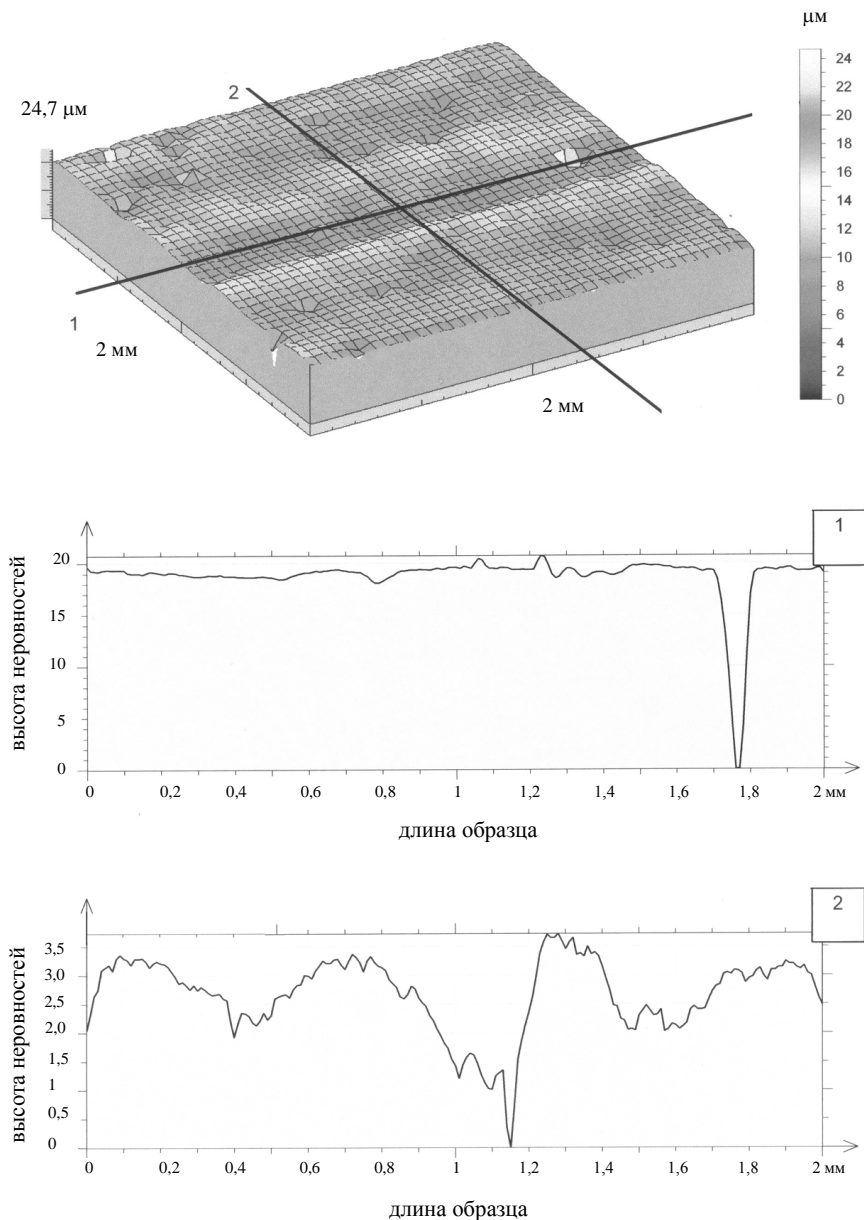


Рис. 5. Измеренная поверхность нормального хряща в тазобедренном суставе и два ее сечения

На рис. 6 показано изменение со временем распределения давления для $\varphi = 0$ и $\beta_0 = 0$. Стохастическое описание шероховатости хряща не принималось во внимание, так как $\varphi = 0$. Вязкоупругие свойства синовиальной жидкости не учитывались, так как $\beta_0 = 0,0000 \text{ Па}^2$.

Для моментов времени $t = 0$, $t = 0,3\pi/\omega_0$, $t = \pi/\omega_0$, $t = 1,7\pi/\omega_0$, $t = 2\pi/\omega_0$ получены следующие значения нагрузки: 1292,7 Н, 1655,0 Н, 1306,5 Н, 936,7 Н, 1292,7 Н.

На рис. 7 показано изменение со временем распределения давления для $\varphi = 0$ и $\beta_0 = 0,00020 \text{ Па}^2$. Стохастическое описание шероховатости хряща не принималось во внимание, так как $\varphi = 0$. Вязкоупругие свойства синовиальной жидкости учитывались, так как $\beta_0 = 0,00020 \text{ Па}^2$.

Для моментов времени $t = 0$, $t = 0,3\pi/\omega_0$, $t = \pi/\omega_0$, $t = 1,7\pi/\omega_0$, $t = 2\pi/\omega_0$ получены следующие значения нагрузки: 1289,0 Н, 1839,1 Н, 1309,2 Н, 749,5 Н, 1289,0 Н.

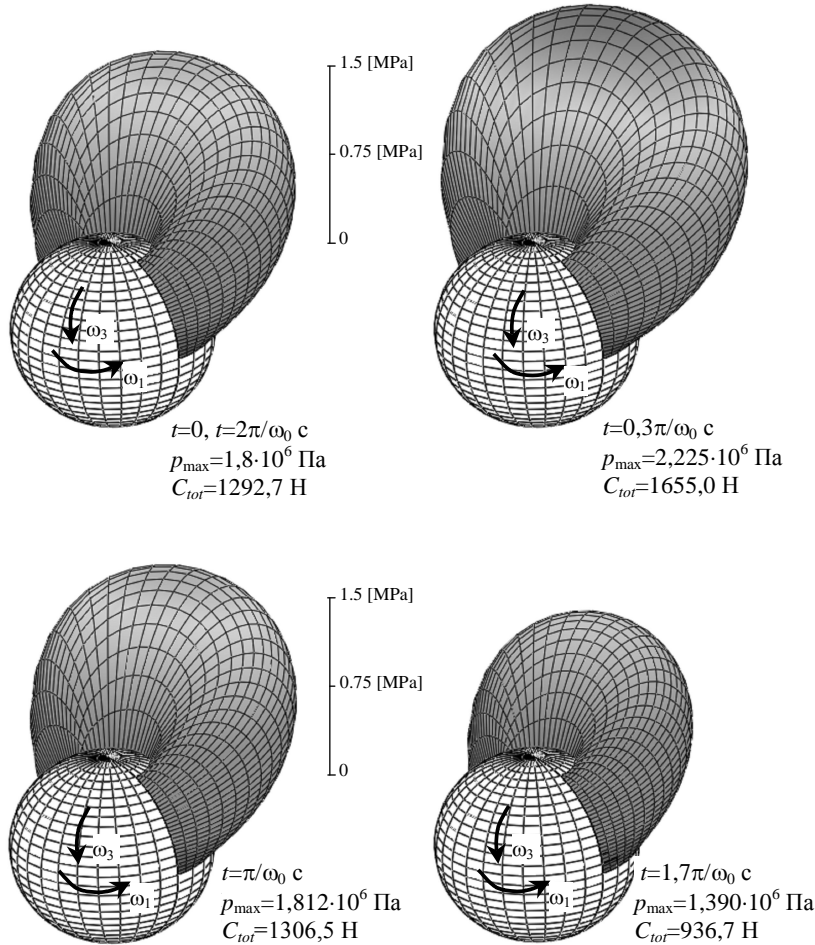


Рис. 6. Распределение давления в зазоре тазобедренного сустава, вызванное вращением сферической головки бедра одновременно в окружном φ -направлении и меридиональном ϑ -направлении. Случайные эффекты и вязкоупругость синовиальной жидкости не учитываются, так как $\zeta = 0$ и $\beta_0 = 0$. Вычисления проведены для ненулевых значений угловых скоростей $\omega_1 = 1,40 \text{ c}^{-1}$, $\omega_3 = -0,45 \text{ c}^{-1}$, ненулевых значений возмущений угловых скоростей ω_{10} , ω_{30} при нестационарном течении и для частоты возмущений высоты зазора $\omega_0 = 500 \text{ c}^{-1}$, $R = 0,0265$ [м], $\eta = 0,15$ [Пас], $\omega_0 = 500$ [1/с], $\omega_1 = 1,4$ [1/с], $\omega_3 = 0,45$ [1/с], $\omega_{10} = 0,1$ [1/с], $\omega_{30} = 0,025$ [1/с], $\beta_0 = 0$, $\zeta = 0$, смазываемая поверхность = $20,38$ [см²]

На рис. 8 показано изменение со временем распределения давления для $\zeta = 1/3$ и $\beta_0 = 0$. Стохастическое описание шероховатости хряща принималось во внимание, так как $\zeta = 1/3$. Вязкоупругие свойства синовиальной жидкости не учитывались, так как $\beta_0 = 0,0000 \text{ Па}^2$.

Для моментов времени $t = 0$, $t = 0,3\pi/\omega_0$, $t = \pi/\omega_0$, $t = 1,7\pi/\omega_0$, $t = 2\pi/\omega_0$ получены следующие значения нагрузки: 1258,1 Н, 1612,6 Н, 1270,8 Н, 909,5 Н, 1258,1 Н.

На рис. 9 показано изменение со временем распределения давления для $\zeta = 1/3$ и $\beta_0 = 0,00020 \text{ Пас}^2$. Стохастическое описание шероховатости хряща принималось во внимание, так как $\zeta = 1/3$. Вязкоупругие свойства синовиальной жидкости учитывались, так как $\beta_0 = 0,00020 \text{ Па}^2$.

Для моментов времени $t = 0$, $t = 0,3\pi/\omega_0$, $t = \pi/\omega_0$, $t = 1,7\pi/\omega_0$, $t = 2\pi/\omega_0$ получены следующие значения нагрузки: 1254,7 Н, 1792,8 Н, 1273,4 Н, 726,4 Н, 1254,7 Н.

Легко видеть, что распределения давления и нагрузка, представленные на рис. 6, 7, 8, 9 для моментов времени $t = 0$ с и $t = 2\pi/\omega_0$ с, то есть для $t = 2k\pi/\omega_0$ с и $k = 0, 1, 2, \dots$, имеют одинаковые значения. Распределения давления и нагрузка в моменты времени $t = (2k - 1)\pi/\omega_0$ с для $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ также имеют одинаковые значения.

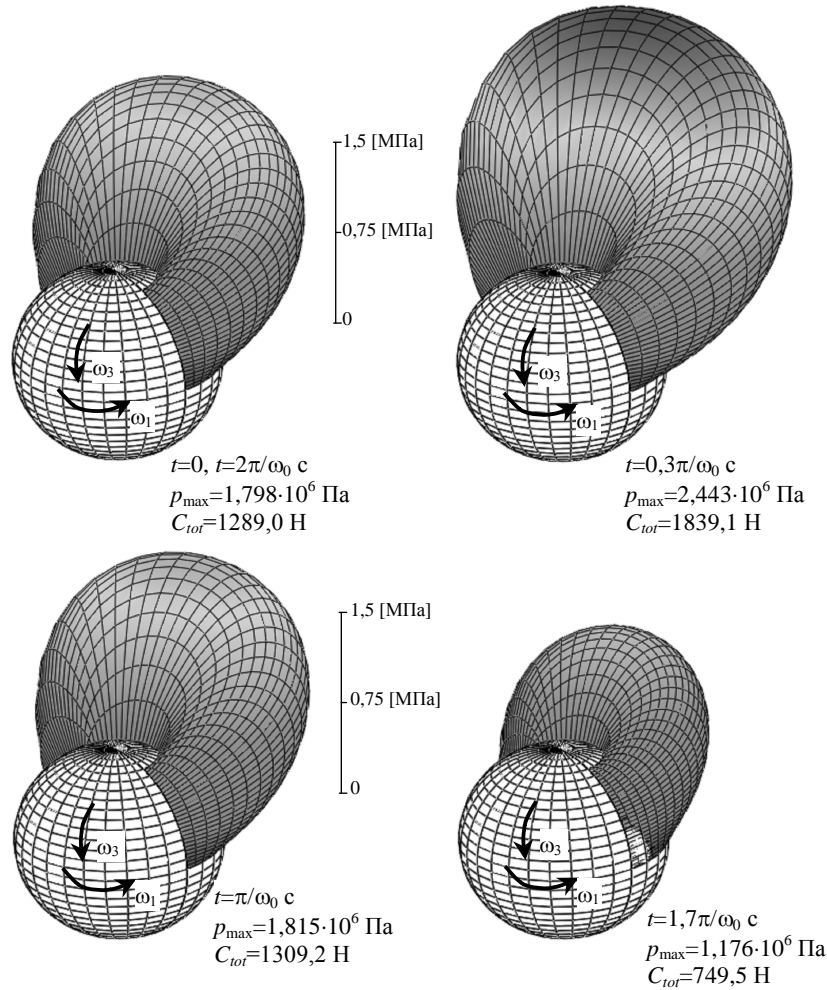


Рис. 7. Распределение давления в зазоре тазобедренного сустава, вызванное вращением сферической головки бедра одновременно в окружном φ -направлении и меридиональном ϑ -направлении. Случайные эффекты не учитываются, так как $\varphi = 0$; вязкоупругость синовиальной жидкости учитывается, так как $\beta_0 = 0,00020$ Па². Вычисления проведены для ненулевых значений угловых скоростей $\omega_1 = 1,40$ с⁻¹, $\omega_3 = -0,45$ с⁻¹, ненулевых значений возмущений угловых скоростей ω_{10} , ω_{30} при нестационарном течении и для частоты возмущений высоты зазора $\omega_0 = 500$ с⁻¹. $R = 0,0265$ [м], $\eta = 0,15$ [Пас], $\omega_0 = 500$ [1/с], $\omega_1 = 1,4$ [1/с], $\omega_3 = 0,45$ [1/с], $\omega_{10} = 0,1$ [1/с], $\omega_{30} = 0,025$ [1/с], $\beta_0 = 0,00020$ [Пас²], $\varphi = 0$, смазываемая поверхность = $20,38$ [см²]

Верхняя левая иллюстрация на рис. 6-9 показывает распределение давления в начале и в конце периода возмущений движения сустава. Иллюстрации, отвечающие $t = \pi/\omega_0$ на рис. 6-9, показывают распределение давления в середине периода возмущений движения сустава. Затем распределения давления возвращаются к показанному на первой иллюстрации.

Влияние случайных изменений высоты зазора и вязкоупругих свойств синовиальной жидкости на нагрузку показано на рис. 10 и обсуждается ниже.

На рис. 10 показано изменение нагрузки со временем в течение периода возмущающих эффектов (частота $\omega_0 = 500$ с⁻¹) для четырех вариантов условий, отвечающих четырем случаям на рис. 6, 7, 8, 9: (1) $\varphi = 0$, $\beta_0 = 0$; (2) $\varphi = 0$, $\beta_0 = 0,0002$ Па²; (3) $\varphi = 1/3$, $\beta_0 = 0$; (4) $\varphi = 1/3$, $\beta_0 = 0,0002$ Па². Если $\varphi = 0$, то случайные эффекты не учитываются. Если $\beta_0 = 0$, то синовиальная жидкость является ньютоновской.

На рис. 11(a) показано изменение нагрузки со временем в течение периода возмущений при трех различных частотах возмущений: $\omega_0 = 100$ с⁻¹, $\omega_0 = 500$ с⁻¹, $\omega_0 =$

1000 c^{-1} для ньютоновской ($\beta_0 = 0,00000 \text{ Па}^2$) и вязкоупругой ($\beta_0 = 0,00020 \text{ Па}^2$) синовиальной жидкости.

На рис. 11(b) показано изменение нагрузки со временем в течение периода возмущений ($\omega_0 = 500 \text{ c}^{-1}$) для следующих значений параметра β_0 , описывающего вязкоупругие свойства синовиальной жидкости: $\beta_0 = 0,00001 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00005 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00010 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00015 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00020 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00025 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00030 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00035 \text{ Па}^2$, $\beta_0 = 0,00040 \text{ Па}^2$.

Размеры неровностей на поверхности хряща лежат в интервале от $0,2 \text{ мкм}$ до $0,9 \text{ мкм}$. Поэтому период $2\pi/\omega_0$ возмущений смазывающего течения синовиальной жидкости может достигать больших значения, и частоты возмущений в этом случае очень малы.

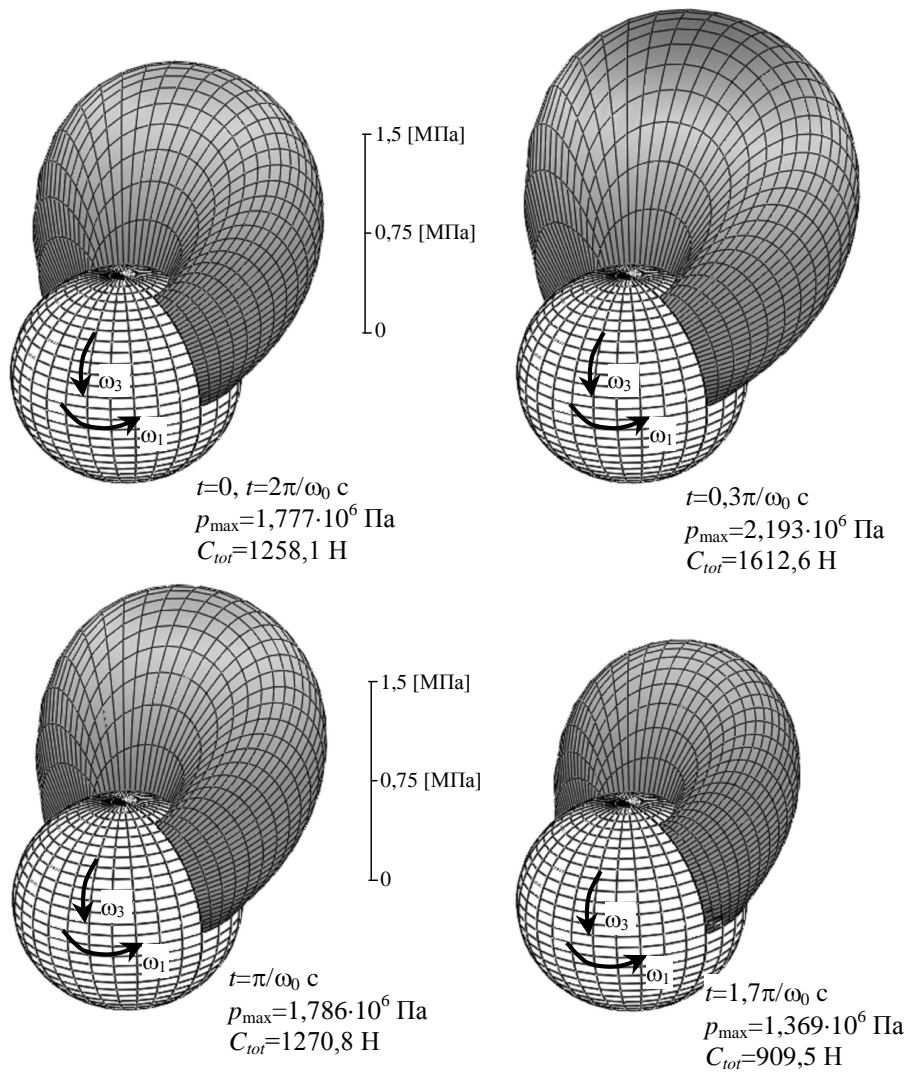


Рис. 8. Распределение давления в зазоре тазобедренного сустава, вызванное вращением сферической головки бедра одновременно в окружном φ -направлении и меридиональном ϑ -направлении. Случайные эффекты учитываются, так как $\varphi=1/3$; вязкоупругость синовиальной жидкости не учитывается, так как $\beta_0 = 0,00000 \text{ Па}^2$. Вычисления проведены для ненулевых значений угловых скоростей $\omega_1=1,40 \text{ c}^{-1}$, $\omega_3=-0,45 \text{ c}^{-1}$, ненулевых значений возмущений угловых скоростей ω_{10} , ω_{30} при нестационарном течении и для частоты возмущений высоты зазора $\omega_0=500 \text{ c}^{-1}$. $R = 0,0265 \text{ [м]}$, $\eta = 0,15 \text{ [Пас]}$, $\omega_0 = 500 \text{ [1/с]}$, $\omega_1 = 1,4 \text{ [1/с]}$, $\omega_3 = 0,45 \text{ [1/с]}$, $\omega_{10} = 0,1 \text{ [1/с]}$, $\omega_{30} = 0,025 \text{ [1/с]}$, $\beta_0 = 0$, $\varphi=1/3$, смазываемая поверхность = $20,38 \text{ [см}^2\text{]}$

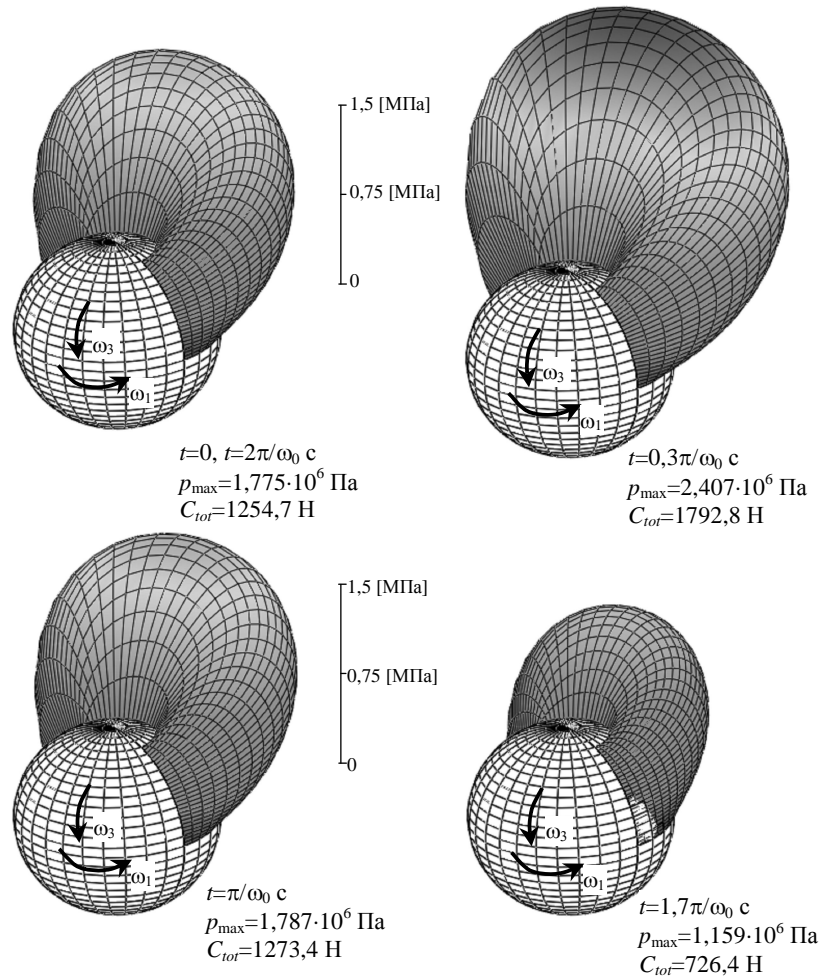


Рис. 9. Распределение давления в зазоре тазобедренного сустава, вызванное вращением сферической головки бедра одновременно в окружном φ -направлении и меридиональном θ -направлении. Случайные эффекты учитываются, так как $\varphi = 1/3$; вязкоупругость синовиальной жидкости учитывается, так как $\beta_0=0,00020$ Па². Вычисления проведены для ненулевых значений угловых скоростей $\omega_1 = 1,40$ с⁻¹, $\omega_3 = -0,45$ с⁻¹, ненулевых значений возмущений угловых скоростей ω_{10} , ω_{30} при нестационарном течении и для частоты возмущений высоты зазора $\omega_0 = 500$ с⁻¹. $R = 0,0265$ [м], $\eta = 0,15$ [Пас], $\omega_0 = 500$ [1/с], $\omega_1 = 1,4$ [1/с], $\omega_3 = 0,45$ [1/с], $\omega_{10} = 0,1$ [1/с], $\omega_{30} = 0,025$ [1/с], $\beta_0 = 0,00020$ [Пас²], $\varphi = 1/3$, смазываемая поверхность = 20,38 [см²]

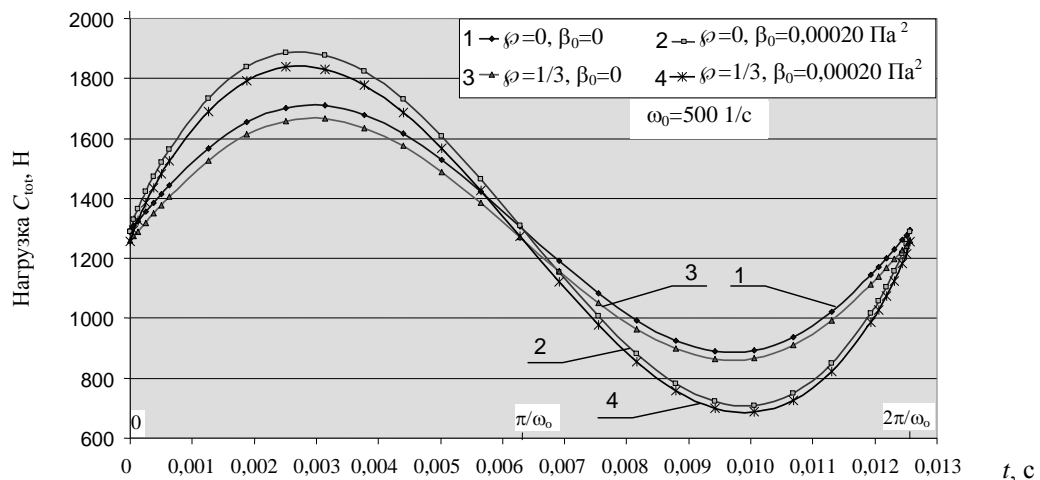


Рис. 10. Зависимость нагрузки от времени за период для четырех предположений, отвечающих следующим случаям: (1) $\varphi = 0, \beta_0 = 0$; (2) $\varphi = 0, \beta_0 = 0,00020$ Па²; (3) $\varphi = 1/3, \beta_0 = 0$; (4) $\varphi = 1/3, \beta_0 = 0,00020$ Па²

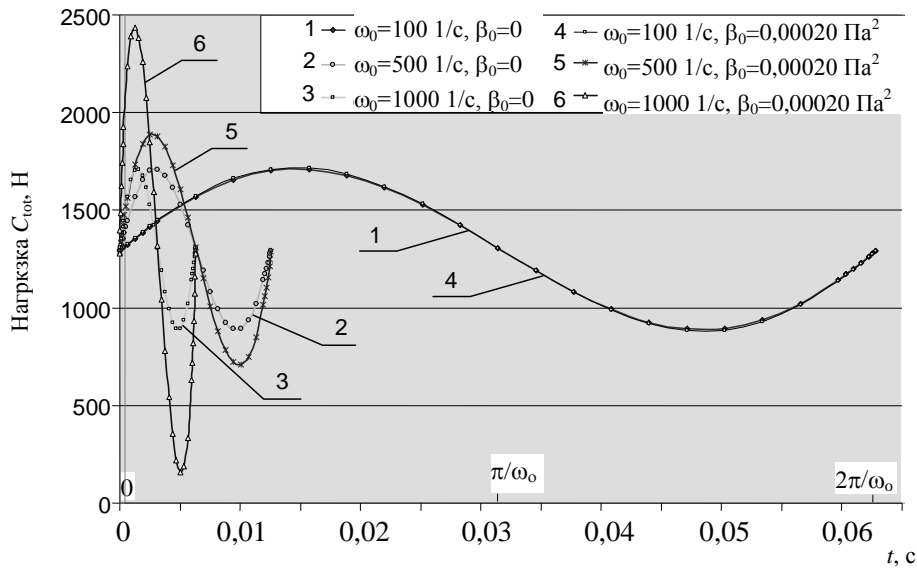


Рис. 11(а). Зависимость нагрузки от времени за период возмущений для двух констант псевдовязкости $\beta_0 = 0,00000$ Pa² и $\beta_0 = 0,00020$ Pa² и трех различных частот возмущений $\omega_0 = 100$ с⁻¹, $\omega_0 = 500$ с⁻¹, $\omega_0 = 1000$ с⁻¹

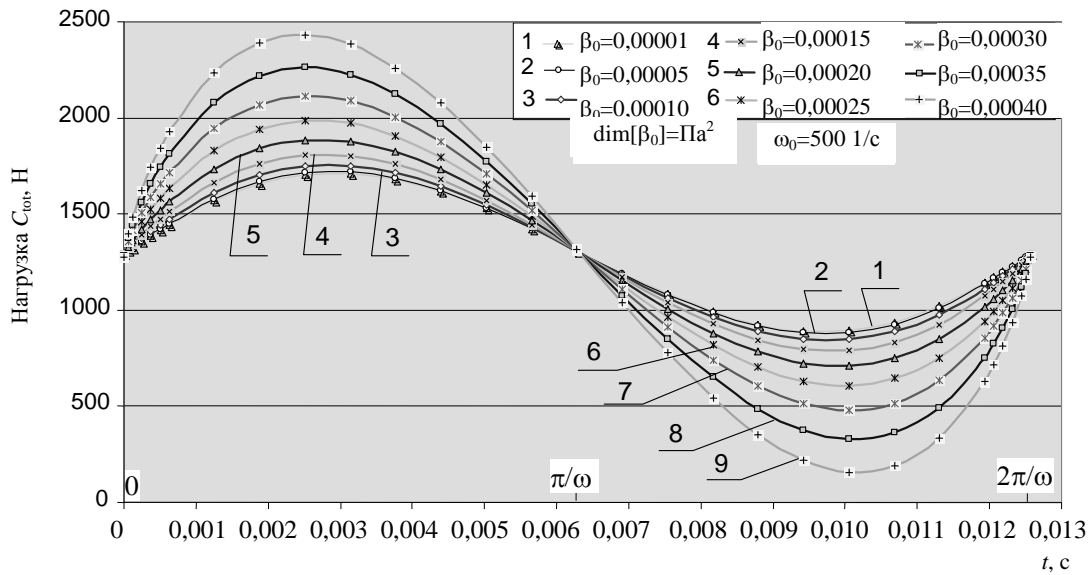


Рис. 11(б). Зависимость нагрузки от времени за период возмущений при частоте возмущений $\omega_0 = 500$ с⁻¹ для различных констант псевдовязкости $0,00001$ Pa² $\leq \beta_0 \leq 0,00040$ Pa²

Кривые 1 и 4, приведенные на рис. 11(а), показывают, что для сравнительно малых значений частоты возмущений ω_0 влияние вязкоупругих свойств синовиальной жидкости на суставную нагрузку пренебрежимо мало. Если же частота ω_0 принимает значения от 500 с⁻¹ до 1000 с⁻¹, то вязкоупругие свойства синовиальной жидкости ($\beta_0 = 0,00020$ Pa²) дают увеличение нагрузки в диапазоне от 15% до 60% по сравнению с нагрузкой при $\beta_0 = 0,0000$ Pa² (ньютоновская жидкость).

8. Заключение

Полученное уравнение для распределения давления при нестационарных периодических условиях, с учетом случайно меняющегося зазора, вязкоупругих свойств синовиальной жидкости и различных частот и амплитуд колебаний головки бедра и вертлужной впадины приводит, в частном случае, к известной форме уравнения Рейнольдса для стационарного течения.

Из численных расчетов следует, что вязкоупругость синовиальной жидкости приводит к увеличению суставной нагрузки на 15%, а в некоторых случаях на 60%. Влияние вязкоупругости синовиальной жидкости на нагрузку очевидно связано с периодичностью возмущений в суставе. Если частота возмущений больше 100 с^{-1} , то вязкоупругость синовиальной жидкости существенно влияет на суставную нагрузку. При частотах, меньших 100 с^{-1} , влиянием вязкоупругости на суставную нагрузку можно пренебречь.

Из численных расчетов следует, что стохастическое описание неровностей костных поверхностей и толщины пленки синовиальной жидкости изменяет суставную нагрузку на 11%. Из этих расчетов также следует, что учет смазывания при одновременном вращении головки бедра в двух направлениях позволяет установить точную картину распределения давления в суставе.

Понимание механизма смазывания сустава синовиальной жидкостью с вязкоупругими свойствами весьма важно. Например, такое понимание может существенно улучшить диагностику заболеваний суставов.

Приложение 1

Подставим бесконечные ряды (9) – (12) в систему уравнений (4) – (7) и приравняем члены с одинаковыми верхними индексами в скобках и одинаковыми степенями экспоненциальных функций.

Приравнивая члены с верхним индексом нуль, получим следующие уравнения стационарного движения ньютоновой жидкости:

$$0 = -\frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \varphi} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_1 \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial r} \right), \quad (\text{A1.1})$$

$$0 = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial r}, \quad (\text{A1.2})$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \vartheta} + \eta_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_1 \frac{\partial v_\vartheta^{(0)}}{\partial r} \right), \quad (\text{A1.3})$$

$$\frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \varphi} + R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) v_\vartheta^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{A1.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} \right) + \eta \left[\left(\frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\vartheta^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] = 0, \quad (\text{A1.5})$$

для $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $0 \leq r \leq \varepsilon$.

Система (A1.1) – (A1.5) определяет искомые давление $p^{(0)}$, температуру $T^{(0)}$ и компоненты скорости $v_\varphi^{(0)}$, $v_r^{(0)}$, $v_\vartheta^{(0)}$ по направлениям φ , r , ϑ .

Приравнивая члены с верхним индексом $k = 1, 2, \dots$, получим следующие уравнения движения для поправок k -го порядка, учитывающих нестационарность течения и вязкоупругие свойства жидкости:

$$\mathbf{i}k\omega_o\rho_o v_\varphi^{(k)} = -\frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial p^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_k \frac{\partial v_\varphi^{(k)}}{\partial r} \right), \quad (\text{A1.6})$$

$$0 = \frac{\partial p^{(k)}}{\partial r}, \quad (\text{A1.7})$$

$$\mathbf{i}k\omega_o\rho_o v_\vartheta^{(k)} = -\frac{\partial p^{(k)}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_k \frac{\partial v_\vartheta^{(k)}}{\partial r} \right), \quad (\text{A1.8})$$

$$\frac{\partial v_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} + R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial v_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) v_\vartheta^{(k)} \right] = 0, \quad (\text{A1.9})$$

для $k = 1, 2, 3, \dots$, $0 < \varphi \leq 2\pi c_1$, $0 < c_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $0 \leq r \leq \varepsilon$; $\eta_k \equiv \eta_0 \eta_1 + \mathbf{i}k\omega_0 \beta$.

Система (A1.5) – (A1.8) определяет искомые поправки $p^{(k)}$ к давлению и поправки $v_\varphi^{(k)}$, $v_r^{(k)}$, $v_\vartheta^{(k)}$ к компонентам скорости. Кроме того, получаем уравнение энергии для определения поправок $T^{(k)}$ к температуре. Верхние индексы $k = 1, 2, 3, \dots$ обозначают порядок поправки.

Приложение 2

Проведем преобразование бесконечного ряда периодических функций с известными амплитудами A_{imk} и известными частотами ω_{im} в бесконечный ряд с новыми неизвестными амплитудами A_{imk}^* и известной частотой ω_0 (колебаний в синовиальной жидкости). Это преобразование проводится следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{imk}^* \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{imk} \exp(\mathbf{i}k\omega_{im} t), \quad (\text{A2.1})$$

где в частном случае $i = \varphi, \vartheta$; $m = u, v$; $k = 1, 2, 3, \dots$ и

$$A_{iuk}^* \equiv U_{ik}^*, \quad A_{ivk}^* \equiv V_{ik}^*, \quad A_{iuk} \equiv U_{ik}, \quad A_{ivk} \equiv V_{ik}. \quad (\text{A2.2})$$

Уравнение (A2.1) описывает следующие случаи:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} U_{\varphi k}^* \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t) &= \sum_{k=1}^{\infty} U_{\varphi k} \exp(\mathbf{i}k\omega_{\varphi u} t), & \sum_{k=1}^{\infty} V_{\varphi k}^* \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_{\varphi k} \exp(\mathbf{i}k\omega_{\varphi v} t), \\ \sum_{k=1}^{\infty} U_{\vartheta k}^* \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t) &= \sum_{k=1}^{\infty} U_{\vartheta k} \exp(\mathbf{i}k\omega_{\vartheta u} t), & \sum_{k=1}^{\infty} V_{\vartheta k}^* \exp(\mathbf{i}k\omega_0 t) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_{\vartheta k} \exp(\mathbf{i}k\omega_{\vartheta v} t). \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

Раскладывая экспоненциальную функцию в обеих частях (A2.1), получим для левой части (A2.1):

$$\begin{aligned}
 & A_{im1}^* \left(1 + i\omega_0 t - \frac{(\omega_0 t)^2}{2} - i \frac{(\omega_0 t)^3}{6} + \dots \right) + \dots + \\
 & + A_{im2}^* \left(1 + 2i\omega_0 t - 2(\omega_0 t)^2 - i \frac{4(\omega_0 t)^3}{3} + \dots \right) + \dots + \\
 & + A_{im3}^* \left(1 + 3i\omega_0 t - \frac{9(\omega_0 t)^2}{4} - i \frac{9(\omega_0 t)^3}{2} + \dots \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{A2.4}$$

Для правой части (A2.1) получаем:

$$\begin{aligned}
 & A_{im1} \left(1 + i\omega_{im} t - \frac{(\omega_{im} t)^2}{2} - i \frac{(\omega_{im} t)^3}{6} + \dots \right) + \dots + \\
 & + A_{im2} \left(1 + 2i\omega_{im} t - 2(\omega_{im} t)^2 - i \frac{4(\omega_{im} t)^3}{3} + \dots \right) + \dots + \\
 & + A_{im3} \left(1 + 3i\omega_{im} t - \frac{9(\omega_{im} t)^2}{4} - i \frac{9(\omega_{im} t)^3}{2} + \dots \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{A2.5}$$

Приравнивая обе части (A2.4) и (A2.5), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & A_{im1}^* + A_{im2}^* + A_{im3}^* = A_{im1} + A_{im2} + A_{im3}, \\
 & A_{im1}^* + 2A_{im2}^* + 3A_{im3}^* = s_{im} (A_{im1} + 2A_{im2} + 3A_{im3}), \\
 & \frac{1}{2} A_{im1}^* + 2A_{im2}^* + \frac{9}{4} A_{im3}^* = s_{im}^2 \left(\frac{1}{2} A_{im1} + 2A_{im2} + \frac{9}{4} A_{im3} \right),
 \end{aligned} \tag{A2.6}$$

где

$$s_{im} \equiv \frac{\omega_{im}}{\omega_0}, \tag{A2.7}$$

для $i = \varphi, \mathfrak{S}; m = u, v$.

Решая систему (A2.6), найдем искомые амплитуды:

$$\begin{aligned}
 & A_{im1}^* = \frac{1}{5} A_{im1} (2 - s_{im}) (3 + 2s_{im}) + \frac{2}{5} A_{im2} (1 - s_{im}) (3 + 4s_{im}) + \frac{3}{5} A_{im3} (1 - s_{im}) (2 + 3s_{im}), \\
 & A_{im2}^* = \frac{1}{5} A_{im1} (1 - s_{im}) (3 - 4s_{im}) + \frac{1}{5} A_{im2} (1 - 2s_{im}) (3 - 8s_{im}) + \frac{3}{5} A_{im3} (1 - s_{im}) (1 - 6s_{im}), \\
 & A_{im3}^* = -\frac{2}{5} A_{im1} (1 - s_{im}) (2 - s_{im}) - \frac{4}{5} A_{im2} (1 - 2s_{im}) (1 - s_{im}) - \frac{1}{5} A_{im3} (4 - 18s_{im} + 9s_{im}^2),
 \end{aligned} \tag{A2.8}$$

где $i = \varphi, \mathfrak{S}; m = u, v$. Например, символ A_{imk}^* для $k = 1, 2, 3, \dots$ описывает следующие амплитуды:

$$\begin{aligned}
 & A_{\varphi u 1}^* = U_{\varphi 1}^*, \quad A_{\varphi u 2}^* = U_{\varphi 2}^*, \quad A_{\varphi u 3}^* = U_{\varphi 3}^*, \dots \\
 & A_{\mathfrak{S} u 1}^* = U_{\mathfrak{S} 1}^*, \quad A_{\mathfrak{S} u 2}^* = U_{\mathfrak{S} 2}^*, \quad A_{\mathfrak{S} u 3}^* = U_{\mathfrak{S} 3}^*, \dots \\
 & A_{\varphi v 1}^* = V_{\varphi 1}^*, \quad A_{\varphi v 2}^* = V_{\varphi 2}^*, \quad A_{\varphi v 3}^* = V_{\varphi 3}^*, \dots \\
 & A_{\mathfrak{S} v 1}^* = V_{\mathfrak{S} 1}^*, \quad A_{\mathfrak{S} v 2}^* = V_{\mathfrak{S} 2}^*, \quad A_{\mathfrak{S} v 3}^* = V_{\mathfrak{S} 3}^*, \dots
 \end{aligned} \tag{A2.9}$$

Из (11) и (A2.2) для $i = \varphi, \mathfrak{S}; m = u, v$ следует:

$$\begin{aligned}
 A_{\varphi u1} &= U_{\varphi1} = \frac{U_{\varphi\Delta}}{1^5}, & A_{\varphi u2} &= U_{\varphi2} = \frac{U_{\varphi\Delta}}{2^5}, & A_{\varphi u3} &= U_{\varphi3} = \frac{U_{\varphi\Delta}}{3^5}, \dots \\
 A_{\vartheta u1} &= U_{\vartheta1} = \frac{U_{\vartheta\Delta}}{1^5}, & A_{\vartheta u2} &= U_{\vartheta2} = \frac{U_{\vartheta\Delta}}{2^5}, & A_{\vartheta u3} &= U_{\vartheta3} = \frac{U_{\vartheta\Delta}}{3^5}, \dots \\
 A_{\varphi v1} &= V_{\varphi1} = \frac{V_{\varphi o}}{1^5}, & A_{\varphi v2} &= V_{\varphi2} = \frac{V_{\varphi o}}{2^5}, & A_{\varphi v3} &= V_{\varphi3} = \frac{V_{\varphi o}}{3^5}, \dots \\
 A_{\vartheta v1} &= V_{\vartheta1} = \frac{V_{\vartheta o}}{1^5}, & A_{\vartheta v2} &= V_{\vartheta2} = \frac{V_{\vartheta o}}{2^5}, & A_{\vartheta v3} &= V_{\vartheta3} = \frac{V_{\vartheta o}}{3^5}, \dots
 \end{aligned}
 \tag{A2.10}$$

Например, амплитуды колебаний в окружном φ и меридиональном ϑ -направлениях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U_{i1}^* &= \frac{1}{5}U_{i1}(2-s_{iu})(3+2s_{iu}) + \frac{2}{5}U_{i2}(1-s_{iu})(3+4s_{iu}) + \frac{3}{5}U_{i3}(1-s_{iu})(2+3s_{iu}), \\
 U_{i2}^* &= \frac{1}{5}U_{i1}(1-s_{iu})(3-4s_{iu}) + \frac{1}{5}U_{i2}(1-2s_{iu})(3-8s_{iu}) + \frac{3}{5}U_{i3}(1-s_{iu})(1-6s_{iu}), \\
 U_{i3}^* &= -\frac{2}{5}U_{i1}(1-s_{iu})(2-s_{iu}) - \frac{4}{5}U_{i2}(1-2s_{iu})(1-s_{iu}) - \frac{1}{5}U_{i3}(4-18s_{iu}+9s_{iu}^2), \\
 V_{i1}^* &= \frac{1}{5}V_{i1}(2-s_{iv})(3+2s_{iv}) + \frac{2}{5}V_{i2}(1-s_{iv})(3+4s_{iv}) + \frac{3}{5}V_{i3}(1-s_{iv})(2+3s_{iv}), \\
 V_{i2}^* &= \frac{1}{5}V_{i1}(1-s_{iv})(3-4s_{iv}) + \frac{1}{5}V_{i2}(1-2s_{iv})(3-8s_{iv}) + \frac{3}{5}V_{i3}(1-s_{iv})(1-6s_{iv}), \\
 V_{i3}^* &= -\frac{2}{5}V_{i1}(1-s_{iv})(2-s_{iv}) - \frac{4}{5}V_{i2}(1-2s_{iv})(1-s_{iv}) - \frac{1}{5}V_{i3}(4-18s_{iv}+9s_{iv}^2),
 \end{aligned}
 \tag{A2.11}$$

где $i = \varphi, \vartheta$. Используя (A2.10)-(A2.11), найдем:

$$U_{ik}^* = \frac{U_{i\Delta}}{k^5} S_{iuk}, \quad V_{ik}^* = \frac{V_{\varphi o}}{k^5} S_{ivk},
 \tag{A2.12}$$

для $i = \varphi, \vartheta$ и $k = 1, 2, 3, \dots$, где:

$$\begin{aligned}
 S_{im1}/1^5 &= \frac{1}{5} \left[(2-s_{im})(3+2s_{im}) + \frac{2}{2^5}(1-s_{im})(3+4s_{im}) + \frac{3}{3^5}(1-s_{im})(2+3s_{im}) \right], \\
 S_{im2}/2^5 &= \frac{1}{5} \left[(1-s_{im})(3-4s_{im}) + \frac{1}{2^5}(1-2s_{im})(3-8s_{im}) + \frac{3}{3^5}(1-s_{im})(1-6s_{im}) \right], \\
 S_{im3}/3^5 &= \frac{1}{5} \left[-2(1-s_{im})(2-s_{im}) - \frac{4}{2^5}(1-2s_{im})(1-s_{im}) - \frac{1}{3^5}(4-18s_{im}+9s_{im}^2) \right],
 \end{aligned}
 \tag{A2.13}$$

где $m = u, v$ и $i = \varphi, \vartheta$. Для $\omega_{im} = \omega_0$ получим $s_{im} = 1$. Следовательно, $S_{imk} = 1$ для $m = u, v$ и $U_{ik}^* = U_{ik}$, $V_{ik}^* = V_{ik}$. Из медицинских экспериментов известно, что $0,95 \leq s_{imk} \leq 1,05$. Поэтому следующие неравенства выполнены:

$$+0,964 \leq \frac{S_{im1}}{1^5} \leq +1,034, \quad +0,016 \leq \frac{S_{im2}}{2^5} \leq +0,048, \quad -0,006 \leq \frac{S_{im3}}{3^5} \leq +0,021, \dots \tag{A2.13)*}$$

Применяя аналогичный алгоритм вычислений для температуры (14)₂ и для выражения (22), получим решение, аналогичное (A2.8). Искомые амплитуды для компоненты скорости в направлении высоты зазора имеют вид:

$$\begin{aligned}
 W_1^* &= \frac{1}{5}W_1(2-s_r)(3+2s_r) + \frac{2}{5}W_2(1-s_r)(3+4s_r) + \frac{3}{5}W_3(1-s_r)(2+3s_r), \\
 W_2^* &= \frac{1}{5}W_1(1-s_r)(3-4s_r) + \frac{1}{5}W_2(1-2s_r)(3-8s_r) + \frac{3}{5}W_3(1-s_r)(1-6s_r), \\
 W_3^* &= -\frac{2}{5}W_1(1-s_r)(2-s_r) - \frac{4}{5}W_2(1-2s_r)(1-s_r) - \frac{1}{5}W_3(4-18s_r+9s_r^2),
 \end{aligned} \tag{A2.14}$$

где

$$s_r \equiv \frac{\omega_r}{\omega_0}. \tag{A2.15}$$

Учитывая, что $\varepsilon^{(k)} \equiv B_e \varepsilon^{(0)}/k^5$, находим из (23):

$$\begin{aligned}
 W_1 &\equiv \varepsilon^{(1)}\omega_r = B_e \varepsilon^{(0)}\omega_r, \quad W_2 \equiv 2\varepsilon^{(2)}\omega_r = 2B_e \varepsilon^{(0)}\omega_r / 2^5 = \frac{1}{2^4} B_e \varepsilon^{(0)}\omega_r, \\
 W_3 &\equiv 3\varepsilon^{(3)}\omega_r = 3B_e \varepsilon^{(0)}\omega_r / 3^5 = \frac{1}{3^4} B_e \varepsilon^{(0)}\omega_r, \dots, \quad W_k = \frac{1}{k^4} B_e \varepsilon^{(0)}\omega_r.
 \end{aligned} \tag{A2.16}$$

Тогда из (A2.12) – (A2.14) следует, что

$$W_1^* = \frac{\omega_0 \varepsilon^{(0)} B_e}{1^4} S_{r1}, \quad W_2^* = \frac{\omega_0 \varepsilon^{(0)} B_e}{2^4} S_{r2}, \quad \dots, \quad W_k^* = \frac{\omega_0 \varepsilon^{(0)} B_e}{k^4} S_{rk}, \tag{A2.17}$$

где

$$\begin{aligned}
 S_{r1} / 1^4 &= \frac{1}{5} \left[(2-s_r)(3+2s_r) + \frac{2}{2^4} (1-s_r)(3+4s_r) + \frac{3}{3^4} (1-s_r)(2+3s_r) \right], \\
 S_{r2} / 2^4 &= \frac{1}{5} \left[(1-s_r)(3-4s_r) + \frac{1}{2^4} (1-2s_r)(3-8s_r) + \frac{3}{3^4} (1-s_r)(1-6s_r) \right], \\
 S_{r3} / 3^4 &= \frac{1}{5} \left[-2(1-s_r)(2-s_r) - \frac{4}{2^4} (1-2s_r)(1-s_r) - \frac{1}{3^4} (4-18s_r+9s_r^2) \right].
 \end{aligned} \tag{A2.18}$$

Для $\omega_r = \omega_0$ находим $s_r = 1$ и, следовательно, $S_{rk} = 1$. В этом случае $W_k^* = W_k$ и $T_k^* = T_k$.

Теперь выведем выражение для высоты гладкого зазора $\varepsilon^{(0)}$. Соотношения между прямоугольными (x, y, z) и сферическими (φ, r, ϑ) координатами (см. рис. 3) имеют вид:

$$x = r \sin(\vartheta_1) \cos \varphi, \quad y = r \sin(\vartheta_1) \sin \varphi, \quad z = r \cos(\vartheta_1), \quad 0 < r < R, \quad \vartheta_1 \equiv \vartheta/R. \tag{A2.19}$$

Графически положения центра сферической головки бедра $O(0, 0, 0)$ и центра сферической вертлужной впадины $O_1(x-\Delta\varepsilon_1, y-\Delta\varepsilon_2, z+\Delta\varepsilon_3)$ показаны на рис. 3. Уравнение поверхности сферической вертлужной впадины в окрестности центра $O_1(x-\Delta\varepsilon_1, y-\Delta\varepsilon_2, z+\Delta\varepsilon_3)$ можно записать в виде:

$$(x-\Delta\varepsilon_1)^2 + (y-\Delta\varepsilon_2)^2 + (z+\Delta\varepsilon_3)^2 = (R+D+\varepsilon_{\min})^2, \quad D = [(\Delta\varepsilon_1)^2 + (\Delta\varepsilon_2)^2 + (\Delta\varepsilon_3)^2]^{0.5}. \tag{A2.20}$$

Подставляя (A2.19) в (A2.20), получим:

$$(r \cos \varphi \sin \vartheta_1 - \Delta\varepsilon_1)^2 + (r \sin \varphi \sin \vartheta_1 - \Delta\varepsilon_2)^2 + (r \cos \vartheta_1 + \Delta\varepsilon_3)^2 = (R+D+\varepsilon_{\min})^2. \tag{A2.21}$$

Высота зазора

$$\varepsilon^{(0)}(\varphi, \vartheta_1) \equiv r - R. \quad (\text{A2.22})$$

Найдем r из (A2.21) и подставим эту величину (A2.22). Тогда получим окончательное выражение для высоты зазора в виде (22).

Приложение 3

Предположим, что динамическая вязкость синовиальной жидкости не меняется в направлении высоты зазора. Интегрируя (A1.1) и (A1.3) дважды по переменной r_1 и учитывая граничные условия (16), (18), получим компоненты скорости синовиальной жидкости в окружном и меридиональном направлениях в виде:

$$v_{\varphi}^{(0)} = -\frac{1}{2\eta_0\eta_1} \frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \varphi} \varepsilon^2 s(1-s) + U_{\varphi 0}(1-s), \quad (\text{A3.1})$$

$$v_{\vartheta}^{(0)} = -\frac{1}{2\eta_0\eta_1} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \vartheta} \varepsilon^2 s(1-s) + U_{\vartheta 0}(1-s), \quad (\text{A3.2})$$

где $s \equiv r/\varepsilon$, $0 \leq r \leq \varepsilon$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $\pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$.

Интегрируя (A1.6), (A1.8) дважды по переменной r_1 и учитывая граничные условия (19), получим поправки к вышеуказанным компонентам скорости, вызванные нестационарностью течения и вязкоупругими свойствами жидкости [3]:

$$v_i^{(k)} = \Pi_{ik} Y_k + U_{ik}^* \frac{\sinh[(\varepsilon - r)A_k]}{\sinh(\varepsilon A_k)} + V_{ik}^* \frac{\sinh(rA_k)}{\sinh(\varepsilon A_k)}, \quad (\text{A3.3})$$

$$Y_k \equiv [1 - \exp(rA_k)] - [1 - \exp(\varepsilon A_k)] \frac{\sinh(rA_k)}{\sinh(\varepsilon A_k)}, \quad (\text{A3.4})$$

$$\Pi_{\varphi k} \equiv \frac{\mathbf{i}}{k\omega_0\rho_0 R \sin(\vartheta/R)} \frac{\partial p^{(k)}}{\partial \varphi}, \quad \Pi_{\vartheta k} \equiv \frac{\mathbf{i}}{k\omega_0\rho_0} \frac{\partial p^{(k)}}{\partial \vartheta} \quad A_k \equiv \sqrt{\frac{\mathbf{i}k\omega_0\rho_0}{\eta_k}}, \quad (\text{A3.5})$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, при $i = \varphi, \vartheta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $\pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$, $0 \leq r \leq \varepsilon$.

Приложение 4

Интегрируем уравнение непрерывности (A1.4) по переменной r_1 с учетом граничных условий (17). Компонента скорости синовиальной жидкости в направлении высоты зазора принимает тогда следующий вид:

$$v_r^{(0)} = -\frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \int_0^r \frac{\partial v_{\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} dr - \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \int_0^r \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[v_{\vartheta}^{(0)} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] dr. \quad (\text{A4.1})$$

Интегрируем уравнение непрерывности (A1.9) по переменной r_1 с учетом граничных условий (20)₁. Тогда поправки к вышеупомянутой компоненте скорости, вызванные нестационарностью течения и вязкоупругими свойствами жидкости, принимают вид:

$$v_r^{(k)} = -\frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \int_0^r \frac{\partial v_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} dr - \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \int_0^r \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[v_\vartheta^{(k)} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] dr, \quad (\text{A4.2})$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $\pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$, $0 \leq r \leq \varepsilon$.

Учитывая граничное условие (18) для $i = r$ на компоненту (A4.1), найдем:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial v_\varphi^{(0)}}{\partial \varphi} dr + R \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[v_\vartheta^{(0)} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] dr = 0. \quad (\text{A4.3})$$

Учитывая граничное условие (23) на компоненту (A4.2), найдем:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial v_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} dr + R \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[v_\vartheta^{(k)} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] dr = -i W_k^* R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right). \quad (\text{A4.4})$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $\pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$, $0 \leq r \leq \varepsilon$.

Приложение 5

Подставим компоненты скорости (A3.1), (A3.2) в (A4.3). Тогда получим модифицированное уравнение Рейнольдса (26). Используя правило дифференцирования интеграла с переменными пределами и граничное условие (21)₁, найдем из (A4.4):

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^\varepsilon v_\varphi^{(k)} dr + R \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_0^\varepsilon v_\vartheta^{(k)} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) dr = -i W_k^* R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) + V_{\varphi k}^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + R V_{\vartheta k}^* \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta}. \quad (\text{A5.1})$$

Подставив в (A5.1) поправки к компонентам скорости (A3.3) для $i = \varphi, \vartheta$, найдем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial p^{(k)}}{\partial \varphi} \int_0^\varepsilon Y_k dr \right] + R \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\partial p^{(k)}}{\partial \vartheta} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \int_0^\varepsilon W_k dr \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{k \omega_0 \rho_0}{i} \left[U_{\varphi k}^* \int_0^\varepsilon \frac{\sinh[(\varepsilon - r)A_k]}{\sinh[\varepsilon A_k]} dr + V_{\varphi k}^* \int_0^\varepsilon \frac{\sinh(rA_k)}{\sinh(\varepsilon A_k)} dr \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{k \omega_0 \rho_0}{i} R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \left[U_{\vartheta k}^* \int_0^\varepsilon \frac{\sinh[(\varepsilon - r)A_k]}{\sinh[\varepsilon A_k]} dr + V_{\vartheta k}^* \int_0^\varepsilon \frac{\sinh(rA_k)}{\sinh[\varepsilon A_k]} dr \right] \right\} = \\ & = -k \omega_0 \rho_0 W_k^* R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) + \frac{k \omega_0 \rho_0}{i} \left[V_{\varphi k}^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + R V_{\vartheta k}^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A5.2})$$

для $k = 1, 2, 3, \dots$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 < \theta_1 < 1$, $\pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$, $0 \leq r \leq \varepsilon$.

Для дальнейшего упрощения (A5.2) необходимо вычислить следующие интегралы:

$$\begin{aligned} & \frac{k \omega_0 \rho_0}{i} U_{ik}^* \int_0^\varepsilon \frac{\sinh[(\varepsilon - r)A_k]}{\sinh[\varepsilon A_k]} dr = \frac{k \omega_0 \rho_0}{i} U_{ik}^* \int_0^\varepsilon \frac{e^{(\varepsilon - r)A_k} - e^{-(\varepsilon - r)A_k}}{e^{\varepsilon A_k} - e^{-\varepsilon A_k}} dr = \\ & = \frac{k \omega_0 \rho_0}{i A_k} U_{ik}^* \tanh\left(\frac{\varepsilon A_k}{2}\right) = -\frac{1}{2} i k \omega_0 \rho_0 U_{ik}^* \left[\varepsilon - \frac{1}{12} \varepsilon^3 A_k^2 + O(\varepsilon^4) \right], \text{ при } i = \varphi, \vartheta. \end{aligned} \quad (\text{A5.3})$$

$$\int_0^\varepsilon Y_k dr = \int_0^\varepsilon \left[(1 - e^{rA_k}) - (1 - e^{\varepsilon A_k}) \frac{e^{rA_k} - e^{-rA_k}}{e^{\varepsilon A_k} - e^{-\varepsilon A_k}} \right] dr =$$

$$= \varepsilon + \frac{2}{A_k} \tanh\left(\frac{\varepsilon A_k}{2}\right) = \frac{i}{12} \frac{\varepsilon^3}{\eta_k} k\omega_0\rho_0 - O(\varepsilon^4),$$
(A5.4)

$$V_{ik}^* \frac{k\omega_0\rho_0}{i} \int_0^\varepsilon \frac{\sinh rA_k}{\sinh \varepsilon A_k} dr = V_{ik}^* \frac{k\omega_0\rho_0}{i} \int_0^\varepsilon \frac{e^{rA_k} - e^{-rA_k}}{e^{\varepsilon A_k} - e^{-\varepsilon A_k}} dr =$$

$$= -\frac{1}{2} i k\omega_0\rho_0 V_{ik}^* \left[\varepsilon - \frac{1}{12} \varepsilon^3 A_k^2 + O(\varepsilon^4) \right],$$
(A5.5)

для $i = \varphi, \vartheta$.

Подставляя (A5.3), (A5.4), (A5.5) в (A5.2), получим модифицированное уравнение Рейнольдса для поправок к давлению:

$$\frac{1}{R} \operatorname{cosec}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\varepsilon^3}{\eta_k} \frac{\partial p^{(k)}}{\partial \varphi} \right] + R \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\varepsilon^3}{\eta_k} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial p^{(k)}}{\partial \vartheta} \right] =$$

$$= 12i W_k^* R \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) - 12 \left[V_{\varphi k}^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} + R V_{\vartheta k}^* \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \right] +$$

$$+ 6 \left[U_{\varphi k}^* (\vartheta) + V_{\varphi k}^* \right] \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} - \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\varepsilon^3}{\eta_k} \right) i k\omega_0\rho_0 \right] +$$

$$+ 6R \left[U_{\vartheta k}^* (\varphi) + V_{\vartheta k}^* \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\varepsilon \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] - \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\varepsilon^3}{\eta_k} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] i k\omega_0\rho_0 \right\}.$$
(A5.6)

для $k = 1, 2, 3, \dots, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1, 0 < \theta_1 < 1, \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2, 0 \leq r \leq \varepsilon$.

Благодарность

Данный исследовательский проект был поддержан Ассоциацией по передаче знаний им. Марии Кюри в рамках Шестой Программы Европейского Сообщества; номер контракта – *MTKD-CT-517226*.

Список литературы

1. *Dowson, D.* Bio-Tribology of Natural and Replacement Synovial Joints / D. Dowson, V.C. Mow, A. Ratcliffe, S.L.-Y. Woo // Biomechanics of Diarthrodial Joint, New York, Berlin, Londyn, Paris, Tokyo, Hong Kong. – 1990. – Vol. 2. – P. 305 – 345.
2. *Fung, Y.C.* Bioviscoelastic Solids / Y.C. Fung // Springer Verlag, Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues. – 1993. – P. 242 – 230.
3. *Kaliski, S.* Drgania i fale w ciałach stałych / S. Kaliski // Warszawa, PWN. – 1966 (in Polish).
4. *Lin, J.-R.* Surfaces Roughness Effect on the Dynamic Stiffness and Damping Characteristics of Compensated Hydrostatic Thrust Bearing / J.- R. Lin // Int. J. Machine Tools Manufact. – 2000. – Vol. 40. – P. 1671 – 1689.
5. *Maurel, W.* Biomechanical Models for Soft Tissue Simulation / W. Maurel, Y. Wu, D. Thalmann // Springer Verlag, Berlin Heidelberg. – 1998.

6. Mow, V.C. Basic Orthopedic Biomechanics / V.C. Mow, G.A. Atesian // Philadelphia, Raven Publishers. – 1997.
7. Mow, V.C. Fluid transport and mechanical properties of articular cartilage / V.C. Mow, M.H. Holmes, W.M. Lai // Journal of Biomechanics. – 1984. – Vol. 17. – 337-394.
8. Mow, V.C. Biomechanics of Diarthrodial Joints / V.C. Mow, A. Ratcliffe, S. Woo // Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag. – 1990.
9. Mow, V.C. Friction, Lubrication and Wear of Diarthrodial Joints / V.C. Mow, L.J. Soslowsky // Raven Press. Basic Orthopedic Biomechanics. – 1991. – P. 254 – 291.
10. Mow, V.C. Cell Mechanics and Cellular Engineering / V.C.Mow, F. Guilak // Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag. – 1994.
11. Osinski, Z. Teoria drgań / Z. Osinski // Warszawa, PWN. – 1997 (in Polish).
12. Ping, Huang. Study on thin Film Lubrication with Second – Order Fluid / Ping Huang, Zhi-Heng Li, Meng Yong-Gang, Wen Shi-Zhu // ASME, Journal of Tribology. – 2002. – Vol. 124. – P. 547 – 552.
13. Sobczyk, M. Statystyka / M. Sobczyk // Warszawa, PWN. – 1996 (in Polish).
14. Steinhagen, J. The pathophysiology of cartilage diseases / J. Steinhagen, B. Kurz, O. Niggemeyer, J. Bruns // Ortopedia Traumatologia Rehabilitacja. – 2001. – Vol. 3, No. 2. – P. 163 – 168.
15. Teipel, I. The Impulsive Motion of a Flat Plate in a Viscoelastic Fluid / I. Teipel // Springer Verlag, Acta Mechanica. – 1981. – Vol. 39. – P. 277 – 279.
16. Truesdell, C.A. First Course in Rational Continuum Mechanics / C.A. Truesdell // John Hopkins University, Baltimore. – 1972.
17. Truesdell, C. Hypo-elasticity / C. Truesdell // J. Rational Mechanics and Analysis. – 1955. – Vol. 4. – P.83 – 133.
18. Ungethum, M. Tribologie in Medizin / M. Ungethum, W. Winkler-Gniewek // Tribologie Schmierungstechnik. – 1990. – Vol. 5 – P. 268 – 277.
19. Wiercholski K. Oil Velocity and Pressure Distribution in Short Journal Bearing Under Rivlin Ericksen lubrication. 1998, SAMS, System Analysis Modelling and Simulations OPA Overseas Publishers. Assoc. N.V., Vol. 32. – P. 205 – 228.
20. Wiercholski, K. The Method of Solutions for Hydrodynamic Lubrication by Synovial Fluid Flow in Human Joint Gap / K. Wiercholski // Control and Cybernetics. – 2002. – Vol. 31, No. 1. – P. 91 – 116.
21. Wiercholski, K. Tragfähigkeiten für Nichtstationäre Schmierung von Menschlichen Hüftgelenken / K. Wiercholski // Expert Verlag. Tribologie und Schmierungstechnik. – 2005. – Vol. 1 (193). – P. 5 – 14.
22. Wiercholski, K. Comparison Between Impulsive and Periodic non-Newtonian Lubrication of Human Hip Joint / K. Wiercholski // Polish Academy of Sciences. Engineering Transactions. – 2005. – Vol. 53, No.1. – P. 55 – 100.
23. Wu, J.Z. Artificial Joint Mechanics with Biphasic Cartilage Layer Under Dynamic Loading / J.Z Wu, W. Herzog, M. Epstein // Journal of Biomechanics Engineering. – 1998. – Vol. 120. – P. 77 – 84.
24. Xiao, H. Hypo-Elasticity Model Based Upon the Logarithmic Stress Rate / H. Xiao, O. T. Bruhns, A. Meyers // J. Elast. – 1997. – Vol. 47. – P. 51 – 68.

NON-ISOTHERMAL STOCHASTIC LUBRICATION OF HUMAN HIP JOINT IN PERIODIC MOTION WITH VARIOUS FREQUENCIES AND AMPLITUDES

K.Ch. Wiercholski (Gdynia, Poland)

This paper presents a concept of analytical and numerical calculations of pressure and capacity for hydrodynamic lubrication of human hip joint gap in non-isothermal unsteady periodic motion. Here dynamic vibrations with different frequencies and amplitudes in the bonehead, acetabulum and synovial fluid are presented. The roughness of the joint surfaces is taken into account. The measurements of the cartilage surfaces are performed by the laser sensor. We assume that the spherical bonehead in human hip joint moves in two directions namely in circumferential and meridional ones. Synovial fluid flow is described by the equations of conservation of momentum and the continuity equation. Numerical calculations are performed in Mathcad 11 Professional Program, by using the method of finite differences.

This method assures stability of numerical solutions of partial differential equations and gives proper values of pressure and capacity forces occurring in human hip joints.

Key words: human hip joint, hip joint lubrication, periodic motion, various frequencies and amplitudes.

Получено 25 октября 2005