Российский журнал биомеханики, 2005, том 9, № 4: 67-75

Российский Журнал Биомеханики
www.biomech.ac.ru

УДК 531/534: [57+61]

УДАР ПО СПОРТИВНОМУ МЯЧУ

Р.Н. Рудаков, Р.М. Подгаец

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614000, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: rrn@theormech.pstu.ac.ru

Аннотация. На основе классической теории удара рассмотрен отскок спортивного мяча сферической формы от ударяющего тела и неподвижной плоскости. Исследованы случаи удара по неподвижному и движущемуся мячу. Построена достаточно общая теория определения скорости движения центра масс мяча и угловой скорости его вращения после удара.

Ключевые слова: биомеханика спорта, спортивный мяч, удар по мячу, отскок мяча, теория удара.

1. Введение

Во многих игровых видах спорта достижение результата зависит от формы траектории движения центра масс спортивного мяча. При движении мяча в воздухе на него действуют аэродинамические силы, которые существенно зависят от скорости движения центра масс мяча и его угловой скорости. Для решения дифференциальных уравнений движения центра масс мяча необходимо знание начальных условий движения. Начальную скорость движения центра масс и угловую скорость вращения мяч получает после удара по нему или после отскока мяча от игровой площадки. Как показывает анализ материалов конференций по биомеханике спорта [1] – [5], отмеченным вопросам в спортивной науке уделяется большое внимание. Работы посвящены, в основном, исследованию упругих свойств мяча и ударяющего тела для конкретных видов спорта: теннис, гольф, бейсбол. Некоторые задачи математического моделирования движения мяча в сопротивляющейся среде и частные случаи удара по мячу рассмотрены в работах [6] – [10].

В настоящей работе при рассмотрении удара по мячу используются основные допущения классической теории идеализированного удара [11]: время ударного взаимодействия считается пренебрежимо малым, в фазе удара учитываются только ударные силы и считается, что перемещением мяча за время удара можно пренебречь. Применены теоремы об изменении количества движения мяча при ударе

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e \qquad (1)$$

и кинетического момента мяча относительно осей прямоугольной декартовой системы координат $Cx_1x_2x_3$, связанной с центром масс мяча и движущейся поступательно (система Кёнига):

$$J(\omega_{x_i} - \omega_{0x_i}) = \sum_{k=1}^{n} m_{Cx_i}(\vec{S}_k^e), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Здесь m – масса мяча, $\vec{v}$ – скорость его центра масс в начале удара, $\vec{u}$ – в конце удара, $\vec{S}_k^e$ – импульс внешней ударной силы, J – момент инерции сферы относительно центральной оси, $\vec{\omega}_0$ – угловая скорость мяча в начале удара, $\vec{\omega}$ – в конце удара.

Коэффициент восстановления при ударе равен отношению проекций относительных скоростей центра масс мяча в конце удара и в начале удара на общую нормаль к поверхностям соприкасающихся тел:

$$k = |u_n - w_n| / |v_n - w_n|, \tag{3}$$

где $\vec{w}$ – скорость тела, ударяющего по мячу, постоянная в фазе удара в предположении, что масса мяча много меньше массы ударяющего тела.

Рассмотрены случаи непроскальзывания и проскальзывания мяча по ударяющей поверхности. Коэффициент восстановления k и коэффициент трения f находятся экспериментально.

2. Удар по неподвижному мячу

Рассматривается нецентральный удар ракеткой или каким либо другим телом по мячу сферической формы, покоящемуся до удара в инерциальной системе отсчета $0xyz$ (рис. 1). Удар производится по точке M мяча со скоростью $\vec{w}$, составляющей угол γ с нормалью к поверхности Mn. Плоскость, в которой лежат вектор $\vec{w}$ и центр масс мяча C, будет называться ударной плоскостью (плоскость $M\tau n$ на рис. 1). Предполагается, что вектор ударного импульса $\vec{S}$ также лежит в этой плоскости. Для мяча сферической формы это предположение достаточно очевидно и оно подтверждается опытом. Сначала рассмотрена подача мяча накатом (верхнее вращение мяча). Отдельно исследуются случаи непроскальзывания и проскальзывания мяча по поверхности ударяющего тела.

2.1. Случай непроскальзывания. На рис. 1 изображено сечение мяча ударной плоскостью. Считаются заданными положение точки удара M, определяемое углом φ, модуль w вектора скорости удара и угол γ, составляемый этим вектором с нормалью к поверхности мяча. Надо найти скорость движения центра масс мяча $\vec{u}$ и его угловую скорость $\vec{\omega}$ в конце удара.

Поскольку до удара мяч покоился, то теоремы об изменении количества движения мяча в проекциях на естественные оси и его кинетического момента относительно центра масс C примут вид:

$$mu_\tau = S_\tau, \; mu_n = S_n, \; J\omega = S_\tau r, \tag{4}$$

где r – радиус мяча, $J = 2mr^2/3$ – его осевой момент инерции. Коэффициент восстановления

$$k = \frac{u_n - w\cos\gamma}{w\cos\gamma}. \tag{5}$$

В случае непроскальзывания мяча тангенциальная составляющая скорости точки M мяча в конце удара равна тангенциальной составляющей скорости ударяющего тела, и теорема сложения скоростей дает соотношение:

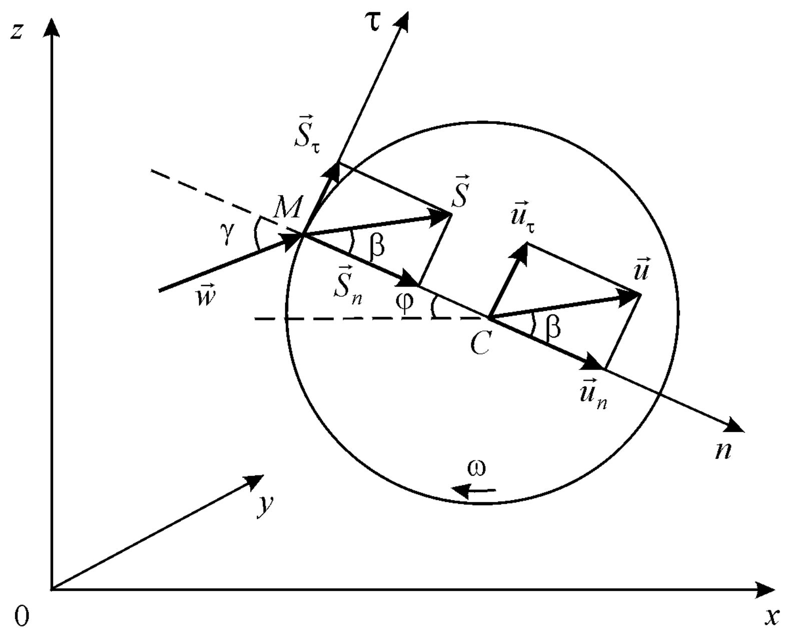

Рис. 1. Удар по неподвижному мячу

$$w \sin\gamma = u_\tau + \omega r. \tag{6}$$

Из уравнений (4) – (6) находятся искомые величины:

$$u_\tau = \frac{2}{5} w \sin\gamma, \quad u_n = (1+k) w \cos\gamma, \quad \omega = \frac{3}{5}\frac{w}{r}\sin\gamma. \tag{7}$$

Угол β вектора $\vec{u}$ с нормалью находится из формулы

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{2}{5(1+k)}\mathrm{tg}\,\gamma, \tag{8}$$

а его модуль

$$u = \left(\left(\frac{2}{5}\sin\gamma \right)^2 + \left((1+k)\cos\gamma \right)^2 \right)^{1/2} w. \tag{9}$$

Полученные результаты справедливы лишь при выполнении условия непроскальзывания:

$$\frac{S_\tau}{S_n} = \mathrm{tg}\,\beta < f.$$

С учетом (8) это условие записывается в виде:

$$\mathrm{tg}\,\gamma < \frac{5(1+k)}{2} f. \tag{10}$$

Например, при $k = 0{,}6$, $f = 0{,}75$ (ракетка для настольного тенниса с мягким покрытием) критическое значение угла $\gamma_* = 72^\circ$. При углах $\gamma > \gamma_*$ следует учитывать проскальзывание мяча по ракетке. Формула (8) хорошо согласуется с опытными данными. Удар выполнялся при $\gamma = 45^\circ < \gamma_*$. Опытные значения угла β получались близкими к расчетному значению $\beta = 14^\circ$.

В рассмотренном случае ударная плоскость вертикальна и мячу придается вращение по часовой стрелке (накат). При подрезке (обратное вращение мяча) точка удара *M* лежит ниже центра масс *C*, углы γ и β откладываются в другую сторону от нормали *Mn*. В этом случае сохраняются все расчетные формулы, полученные для наката. Эти формулы справедливы и при произвольной ориентации ударной плоскости в декартовой системе координат 0*xyz*. Исследователю надо будет перейти от естественной к декартовой системе координат. Например, в рассмотренном случае векторы $\vec{w}$ и $\vec{u}$ с осью 0*x* составляют углы $\gamma - \varphi$ и $\beta - \varphi$, соответственно (ударная плоскость лежит в координатной плоскости 0*xz*).

2.2. Случай проскальзывания. Пусть угол удара $\gamma > \gamma_*$. Тогда мяч будет проскальзывать по поверхности ударяющего тела, и кинематическое условие (6) необходимо заменить формулой для коэффициента трения скольжения:

$$f = S_\tau / S_n. \tag{11}$$

Уравнения (4), (5), (11) имеют решение:

$$u_n = (1+k) w \cos\gamma, \quad u_\tau = f u_n, \quad \omega = \frac{3}{2} f \frac{u_n}{r}. \tag{12}$$

Интересно, что вектор $\vec{u}$ составляет с нормалью *Mn* угол β, не зависящий от угла удара γ и равный углу трения:

$$\operatorname{tg} \beta = f. \tag{13}$$

Как показывает анализ результатов, полученных в пунктах 2.1 и 2.2, угловая скорость ω при изменении угла γ от 0° до 90° сначала растет от 0 до своего наибольшего значения при $\gamma = \gamma_*$, а затем убывает до 0 при γ = 90°. Эти выводы имеют не только теоретическое, но и практическое значение.

3. Удар по движущемуся мячу

Ранее рассмотрен удар по неподвижному мячу, что характерно для подачи мяча во многих видах спорта. При приеме мяча надо учитывать его движение до удара. Сначала рассмотрим случай плоскопараллельного движения мяча до удара и после удара.

3.1. Случай плоскопараллельного движения. Пусть до удара все точки мяча движутся в плоскостях, параллельных координатной плоскости 0*xz*. В момент начала удара скорость центра масс мяча равна $\vec{v}$ и его угловая скорость равна ω_0. На рис. 2 показано сечение мяча ударной плоскостью, параллельной плоскости 0*xz*. Введем естественную систему координат $Mn\tau_1\tau$. Ось τ_1 параллельна оси 0*y*, оси *Mn*, $M\tau$ лежат в ударной плоскости. Теоремы теории удара имеют вид:

$$\begin{aligned} & m u_\tau + m v \sin\alpha = S_\tau, \\ & m u_n + m v \cos\alpha = S_n, \\ & J(\omega_{\tau_1} + \omega_0) = S_\tau r, \end{aligned} \tag{14}$$

где u_τ, u_n – проекции скорости центра масс, ω_{τ_1} – угловая скорость мяча в конце удара.

Коэффициент восстановления

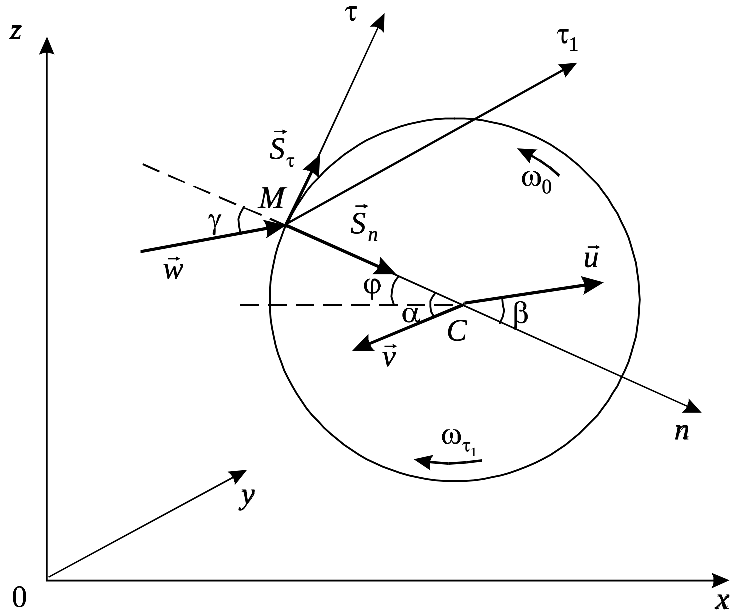

Рис. 2. Удар по движущемуся мячу

$$k = \frac{u_n - w\cos\gamma}{v\cos\alpha + w\cos\gamma}. \tag{15}$$

Абсолютная скорость точки *M* равна при непроскальзывании

$$w\sin\gamma = u_\tau + \omega_{\tau_1} r. \tag{16}$$

Система уравнений (14) – (16) имеет решение

$$\begin{aligned} u_\tau &= \frac{2}{5}w\sin\gamma - \frac{3}{5}v\sin\alpha + \frac{2}{5}\omega_0 r, \\ u_n &= (1+k)w\cos\gamma + kv\cos\alpha, \\ \omega_{\tau_1} &= \frac{3}{5}\frac{w}{r}\sin\gamma + \frac{3}{5}\frac{v}{r}\sin\alpha - \frac{2}{5}\omega_0. \end{aligned} \tag{17}$$

которое при $v = 0, \omega_0 = 0$ совпадает с решением (7).

При проскальзывании мяча, когда условие непроскальзывания

$$S_\tau < f\,S_n \tag{18}$$

не выполняется, необходимо в системе уравнений (14) – (16) кинематическое уравнение (16) заменить силовым

$$S_\tau = f\,S_n. \tag{19}$$

3.2. Произвольное движение мяча. До удара мяч совершает сложное движение, состоящее из поступательного движения вместе с центром масс со скоростью $\vec{v}$ и, вообще говоря, сферического движения около центра масс с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}_0$. Считается, что проекции этих векторов на оси декартовой системы координат 0*xyz*, связанной с игровой площадкой, известны в момент начала удара. Положение точки удара *M* задано радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из центра масс мяча, а также задана скорость удара $\vec{w}$.

Скорость центра масс мяча $\vec{u}$ в конце удара и угловая скорость $\vec{\omega}$ могут быть определены с помощью решения, полученного для плоскопараллельного движения.

Для этого нужно, прежде всего, задать положение ударной плоскости в декартовой системе координат. Ударную плоскость определим как плоскость, в которой лежат вектор относительной скорости удара

$$\vec{w}_1 = \vec{w} - \vec{v} - \vec{\omega}_0 \times \vec{r} \tag{20}$$

и единичный вектор нормали

$$\vec{n} = -\vec{r}\,/\,r, \tag{21}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра сферы в точку удара *M*.

Построим естественную систему координат $Mn\tau_1\tau$ в точке удара с ортами $\vec{n}, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}$,

$$\vec{\tau}_1 = \frac{\vec{w}_1 \times \vec{n}}{\left|\vec{w}_1 \times \vec{n}\right|}, \;\; \vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{\tau}_1. \tag{22}$$

Ось $M\tau_1$ перпендикулярна ударной плоскости, а ось $M\tau$ лежит в ней. Предполагается, что вектор ударного импульса $\vec{S}$ лежит в ударной плоскости. Это основная гипотеза в методе решения задачи. В частных движениях мяча она легко подтверждается опытом, а для общего случая приведенное ниже решение нужно сравнивать с результатами эксперимента.

В случае непроскальзывания в решении (17), полученном для плоскопараллельного движения, надо сделать некоторые изменения. Скорости *w*, *v* и ω_0 нужно заменить на проекции векторов $\vec{w}, \vec{v}$ и $\vec{\omega}_0$ на ударную плоскость $Mn\tau$ и ось $M\tau_1$, соответственно:

$$w' = \left|(\vec{w} \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{w} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}\right|, \tag{23}$$

$$v' = \left|(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} + (\vec{v} \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}\right|, \tag{24}$$

$$\omega_0' = \vec{\omega}_0 \cdot \vec{\tau}_1. \tag{25}$$

Углы γ и α в (17) заменяются углами

$$\gamma' = \arccos\frac{\vec{w}'\cdot\vec{n}}{w'},\quad \alpha' = 180^\circ - \arccos\frac{\vec{v}'\cdot\vec{n}}{v'}. \tag{26}$$

Таким образом, решение в рассматриваемом общем случае в проекциях на естественные оси координат примет вид:

$$\begin{gathered} u_n = (1+k)w'\cos\gamma' + kv'\cos\alpha',\quad u_{\tau_1} = 0,\\ u_\tau = \frac{2}{5}w'\sin\gamma' - \frac{3}{5}v'\sin\alpha' + \frac{2}{5}\omega_0' r,\\ \omega_n = 0,\quad \omega_{\tau_1} = \frac{3}{5}\frac{w'}{r}\sin\gamma' + \frac{3}{5}\frac{v'}{r}\sin\alpha' - \frac{2}{5}\omega_0',\quad \omega_\tau = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Поскольку орты естественных осей известны (формулы (21), (22)), то нетрудно найти, какие углы естественные оси составляют с осями декартовой системы координат и, используя формулы преобразования координат, из решения (27) получить проекции векторов $\vec{u}$ и $\vec{\omega}$ на оси декартовой системы координат.

Подобным же способом можно получить решение и для случая проскальзывания мяча по поверхности ударяющего тела.

4. Отскок мяча от неподвижной плоскости

Для математического моделирования игры в настольном теннисе и в других видах спорта необходимо учитывать отскок мяча от стола или игровой площадки и находить скорость центра масс мяча $\vec{u}$ и его угловую скорость $\vec{\omega}$ после удара. Рассматривается только случай плоскопараллельного движения мяча перед ударом о поверхность, причем все точки мяча движутся в плоскостях, перпендикулярных этой поверхности. Полученные результаты нетрудно обобщить на случай произвольного движения мяча аналогично обобщению в п. 3.2.

Пусть перед ударом все точки мяча движутся в плоскостях, параллельных координатной плоскости $0xz$, в которой движется центр масс мяча C. Перед ударом центр масс имеет скорость $\vec{v}$, угол падения мяча равен α (рис. 3). Мяч имеет угловую скорость ω_0. Надо найти скорость центра масс мяча u после удара, угол отражения β и угловую скорость мяча ω. Основные уравнения теории удара имеют вид:

$$\begin{gathered} mu\cos\beta - mv\cos\alpha = S_\tau,\\ mu\sin\beta + mv\sin\alpha = S_n,\\ J(\omega-\omega_0) = -S_\tau r,\\ k = u\sin\beta / v\sin\alpha. \end{gathered} \tag{28}$$

В случае непроскальзывания мяча по неподвижной поверхности абсолютная скорость проскальзывания точки касания мяча M равна нулю:

$$u\cos\beta - \omega r = 0. \tag{29}$$

Из уравнений (28), (29) находятся искомые величины:

$$\omega = \frac{3}{5}\frac{v}{r}\cos\alpha + \frac{2}{5}\omega_0,$$
$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{kv\sin\alpha}{\omega r}, \qquad (30)$$
$$u = \frac{kv\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Это решение имеет место при выполнении условия непроскальзывания

$$\frac{|S_\tau|}{S_n} < f. \qquad (31)$$

Если ввести отношение орбитальной скорости к скорости центра масс мяча до удара $n_0 = \omega_0 r / v$, то с учетом полученного решения условие (31) приводится к виду:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{|n_0 - \cos\alpha|}{(1+k)\sin\alpha} < f. \qquad (32)$$

Например, при $\omega_0 = 0$ получается условие для угла падения:

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{2}{5(1+k)f}. \qquad (33)$$

Например, при $k = 0{,}8$, $f = 0{,}2$ мяч не проскальзывает при углах падения $\alpha > 48°$.

При проскальзывании мяча по поверхности условие (29) надо заменить силовым:

$$S_\tau = f\,S_n. \qquad (34)$$

Уравнения (28), (34) дают решение:

$$\omega = \omega_0 - \frac{3}{2}\frac{f(1+k)v\sin\alpha}{r},$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{k\operatorname{tg}\alpha}{1+f(1+k)\operatorname{tg}\alpha}, \qquad (35)$$
$$u = \frac{kv\sin\alpha}{\sin\beta},$$

которое вместе с решением (30) охватывает всю область изменения параметров плоскопараллельного движения мяча перед ударом.

5. Заключение

Рассмотрены удар по неподвижному и движущемуся мячу и отскок мяча от неподвижной плоскости. Проведенное исследование интересно как приложение классической теории удара к механике спорта. Оно может быть полезным для иллюстраций в теории удара в курсе теоретической механики и для выполнения НИР студентами специальности «Биомеханика». Результаты исследований удара мяча позволяют более корректно формулировать краевые задачи движения спортивных снарядов. Найденные скорость движения центра масс мяча и его угловая скорость после удара определяют начальные условия дальнейшего движения мяча и, кроме того, позволяют по экспериментальным кривым найти аэродинамические коэффициенты движущегося мяча. Результаты работы могут быть использованы как теоретиками спорта, так и самими спортсменами. Они – хорошая база для проведения экспериментов при исследовании удара мяча. Авторы выражают благодарность руководителю научного семинара по биомеханике на кафедре теоретической механики ПГТУ профессору Ю.И. Няшину и всем его участникам за плодотворное обсуждение вопросов, затронутых в данной работе.

Список литературы

1. The Engineering of Sport / Edited by S. Haake. – Rotterdam: Balkema, 1996. – 347 p.
2. The Engineering of Sport – Design and Development / Edited by S. Haake. – Oxford: Blackwell Science, 1998. – 576 p.
3. The Engineering of Sport – Research Development and Innovation / Edited by A. Subic & S. Haake. – Oxford: Blackwell Science, 2000. – 535 p.
4. The Engineering of Sport 4 / Edited by S. Ujihashi & S. Haake. – Oxford: Blackwell Science, 2002. – 888 p.
5. The Engineering of Sport 5 / Edited by M. Hubbard, R.D. Mehta & J.M. Pallis. International Sport Engineering Association, 2004. Vol. 1 – 616 p., Vol. 2 – 656 p.
6. *Рудаков, Р.Н.* Математическое моделирование спортивных движений в сопротивляющейся среде / Р.Н. Рудаков, Ю.И. Няшин, А.Ф. Лисовский, А.Р. Подгаец, А.П. Шульгин // VII Международный научный конгресс «Современный олимпийский спорт и спорт для всех»: Материалы конф. – М., 2003. – Т. II. – С. 273–274.
7. *Рудаков, Р.Н.* Общие теоремы динамики и их приложение к решению задач биомеханики: уч. пособие / Р.Н. Рудаков. – Пермь: ПГТУ, 1999.
8. *Рудаков, Р.Н.* Оптимизация траектории теннисного шарика / Р.Н. Рудаков, А.В. Каменских, А.П. Шульгин // Российский журнал биомеханики. – 2000. –Т. 4, № 2. – С. 42–49.
9. *Rudakov, R.N.* On influence of the resistance crisis on the football flight dynamics / R.N. Rudakov, V.A. Lokhov, A.E. Fedorov // Russian Journal of Biomechanics. – 2002. – Vol. 6, No. 2. – P. 95-106.
10. *Рудаков, Р.Н.* Новый метод обработки видеозаписей движения спортсменов и спортивных снарядов / Р.Н. Рудаков // Российский журнал биомеханики. – 2004. – Т. 8, № 1. – С. 9–20.
11. *Циглер, Ф.* Механика твердых тел и жидкостей / Пер. с англ; под ред. проф. Ю.И. Няшина. – М.; Ижевск: РХД, 2002.

THE IMPACT ON THE SPORT BALL

R.N. Rudakov, R.M. Podgaets (Perm, Russia)

The rebound of the spherical sport ball from an impactor or a motionless plane has been considered on the basis of classic impact theory. The cases of the impact on motionless or moving ball have been studied. The general theory has been developed that allows calculating the velocity of the ball's mass centre and its angular velocity after impact.

Key words: biomechanics of sports, sport ball, impact on ball, rebound of ball, theory of impact.

Получено 02 ноября 2005