

УДК 531/534: [57+61]

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯМИ В АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМАХ БИОМЕХАНИКИ

В.Ю. Кирюхин, Ю.И. Няшин

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614000, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: kvu@perm.ru

Аннотация. В данной работе авторы делятся опытом формализации актуальных проблем биомеханики, связанных с управлением напряжениями и, в отдельных случаях, деформациями. Действительно, решение очень широкого круга проблем стоматологии, ортопедии, восстановительной медицины и других областей медицинский знаний оказались хорошо интерпретируемыми, как решение задач, в которых необходимо теми или иными путями создание желаемых напряжений. Авторы приводят несколько наиболее представительных примеров формулировки таких проблем.

Также авторами предлагается теория управления напряжениями. В результате анализа были выделены особенности формулировок проблем биомеханики, связанные с созданием заданного распределения напряжений. В конце работы авторы описывают принцип работы предложенной теории для сформулированных задач, а также иных, которые, возможно, знакомы читателю.

Ключевые слова: биомеханика, теория упругости, управление напряжениями, постановка задачи.

Введение. О практических проблемах управления в биомеханике

Помимо чисто механических и технологических проблем изготовления аппаратов, применяемых в медицине по уже известным методикам, возникает проблема разработки новых методов развития индивидуализации подхода при осуществлении лечения. Решение возникающих при этом практических и теоретических проблем биомеханики (моделирование перестройки, роста и морфогенеза, проведение операций по замене органов, прогнозирование протекания постлечебного периода и др.) связано с учетом, математическим описанием и вычислением напряжений в живых тканях и их искусственных заменителях. При этом значительная часть проблем не может сводиться только к моделированию состояния рассматриваемого тела. Более ценными с позиции приложения оказываются формулировки и методы решения задач, сфокусированных на выборе некоторого оптимального варианта. Так, например, для медицинской практики интересны оптимальные конструкции протезов любых частей тела, оптимальный выбор материала или сочетания нескольких материалов, наилучший способ установки искусственных заменителей (имплантатов), настройки отдельных параметров тренажеров и многое другое.

Авторы данной работы предлагают вниманию читателя описание ряда актуальных проблем медицины, которые уже на протяжении нескольких лет активно

рассматриваются как задачи биомеханики. Их отличительной особенностью является то, что каждая задача с позиции механики может быть сформулирована и решена как проблема управления напряжениями по всему объему тела или лишь в его части.

Авторы предлагают следующую последовательность изложения. Изначально рассматриваются основные типы напряжений, которые на основе опыта решения проблем биомеханики моделируются в живых структурах. Потом описывается ряд задач биомеханики, чтобы, рассмотрев их механическую суть, вычленив в каждом случае проблему обеспечения нужного уровня напряжений. В результате формулируется общая постановка задачи управления напряжениями в модели термоупругости. В конце статьи авторы кратко излагают идеи метода решения проблемы управления напряжениями, разработанного авторами ранее для проблем термоупругости.

Напряжения в живых структурах

В действительности в тканях и органах живого организма постоянно происходят процессы, приводящие к возникновению напряжений. Причем, что интересно, не все процессы имеют чисто механическую природу и изначально не связаны с действием каких-либо сил или температуры. Например, процессы роста, резорбции или перестройки. Ниже авторы предлагают описание нескольких вариантов возникновения напряжений в костных и мягких тканях на основе литературных данных.

Остаточные напряжения

Остаточные напряжения в механике классически понимаются как самоуравновешенные напряжения, создаваемые в теле после снятия внешних нагрузок. О существовании остаточных напряжений в живых мягких и твердых тканях известно давно, в частности, из экспериментальных исследований [1]. Так, хорошо известно, что кусочек кожи, вырезанный в форме круга, принимает эллиптическую форму [2].

Основополагающими работами по изучению остаточных напряжений в живых тканях считаются работы Ю. Фанга [3] и Воссуги [4], сумевших экспериментально обосновать существование остаточных напряжений и описать основные тенденции их распространения в живых тканях. Причем большинство результатов по остаточным напряжениям в биомеханике связано с мягкими тканями (кардиоваскулярная система в целом и артерии в частности) [3, 5].

Одна из гипотез говорит о необходимости существования остаточных напряжений в живой ткани. Так, в работе [6] показано, что учет остаточных напряжений приводит к уменьшению больших окружных напряжений на внутренней стенке артерии на 62% и градиента напряжений вдоль стенки артерии на 94% в сравнении с напряжениями, полученными без учета остаточных напряжений. Аналогичные результаты, подтверждающие с механической точки зрения необходимость остаточных напряжений, можно также найти в работах [7, 8]. В работе [7], в частности, указывается на то, что остаточные напряжения приводят к выравниванию напряжений в стенке артерии. Д. Гонзалес-Карраско и др. [8] обосновывают необходимость остаточных напряжений для сохранения целостности биоматериалов в процессе деформирования и для повышения выносливости и усталостной устойчивости.

Также известно, что присутствие остаточных напряжений и их уровень в живой ткани оказывают влияние на ее рост, являясь одним из стимулирующих факторов [3, 9, 10, 11]. Так, в работе А. Рачева [9] выдвигается гипотеза, что артерия перестраивает

свою ненапряженную конфигурацию таким образом, чтобы распределение деформаций и напряжений в артериальной стенке и гипертензивных условиях было бы таким же, как и при нормальной нагрузке. Другими словами, считается, что источником остаточных напряжений, существующих в ненагруженной конфигурации, является рост, вызванный напряжениями.

Температурные напряжения

Обширный обзор по тепловым явлениям в живых тканях дан в работе Й. Телеги с соавторами [12]. В данной работе указывается, что в живой ткани могут возникать даже повреждения из-за напряжений, вызванных охлаждением ткани (температурные напряжения).

Эксперименты показали [13], что появление напряжений в цементе, фиксирующем протез, связаны с его температурой во время затвердевания и что во время охлаждения напряжения возникают во многом благодаря температурным деформациям в противоположность объемному сжатию.

Также температурные проблемы возникают во время и после операции замещения сустава и могут быть разделены на три категории [12]:

- вопросы латентного нагрева заменителей-имплантатов во время поляризации цемента (если он используется при операции);
- проблемы нагрева, вызванного трением во время нормального функционирования протеза;
- вопросы интенсивного нагрева во время распиливания и сверления при ортопедической операции.

Таким образом, к температурным напряжениям относятся не только напряжения, вызванные непосредственным изменением температурного поля и появлением несовместных температурных деформаций [13], но и процессами усадки компонентов искусственных протезов [12], их фазовыми превращениями, поскольку эти изменения могут быть представлены как несиловое объемное расширение или сжатие, характерное для температуры.

Ростовые напряжения

Под ростовыми напряжениями понимаются напряжения, возникающие в теле в процессе (в результате) адаптационного роста живой ткани. Понятие и особенности ростовых напряжений встречаются и обсуждаются в работах А. Штейна, С. Регирера [14], Л. Табера [3].

Математическое обоснование ростовых напряжений представлено, в частности, в работе [15]. В этом теоретическом исследовании появление напряжений в растущем объеме объясняется как результат несовместного роста отдельных его частей. Сохранение целостности приводит к необходимости создания ростовых напряжений. Такой подход к теоретическому пониманию ростовых напряжений позволяет отнести их к остаточным напряжениям, что и делается в работе [15].

Биологические напряжения

Имеющиеся многообразие задач биомеханики приводит к избытию моделей и способов решения задач вычисления и управления напряжениями. В отличие от этого авторы данной работы выдвигают предположение о единообразной природе и механике напряжений, возникающих в живых тканях в процессе их роста, теплового и механического взаимодействия с окружающими телами. Авторы предлагают объединить понятия остаточных, тепловых, усадочных и ростовых напряжений в одно

понятие биологических напряжений. Так, везде далее в работе будет говориться о напряжениях, придавая им смысл биологических.

Задача 1. Оптимальное протезирование тазобедренного сустава

К одним из самых активно обсуждаемых вопросов относится проблема проектирования эндопротезов тазобедренного сустава.

Как и другие суставы, тазобедренный сустав выполняет важнейшую физиологическую функцию эффективного движения, но его особенность состоит в создании правильной осанки человека в сочетании с функцией позвоночника. Это связано с его анатомическим строением – сочетанием глубокой вертлужной впадины, образующейся тазовыми костями, и шарообразной головки бедренной кости, позволяющей осуществлять широкий диапазон многоосевых движений [16].

Суставные поверхности соприкасающихся костей в норме покрыты очень гладким гиалиновым хрящом. Суставные поверхности костей удерживаются друг напротив друга суставной капсулой, которая укреплена очень прочными связками. Окружающие сустав мышцы также принимают участие в укреплении тазобедренного сустава.

Нарушение этих свойств сустава вследствие таких заболеваний, как деформирующий коксартроз различной этиологии (43%), ревматоидный артрит (30%), тяжелая травма сустава и переломы шейки бедра (7%) (рис. 1а), асептический некроз головки бедра (8%) (рис. 1в), диспластический коксартроз (12%), ведет к дисфункции тазобедренного сустава [17]. Пациенты с травмой и заболеваниями суставов составляют 68% среди всех больных с патологией костно-мышечной системы, а на долю крупных суставов (в первую очередь, тазобедренного) приходится 25,7%. Недостаточная эффективность консервативного лечения последствий травм и заболеваний тазобедренного сустава ведет к снижению трудоспособности в 60-70% случаев, а в 12-13% – к инвалидности.

В современной клинической практике эндопротезирование суставов как метод лечения указанных заболеваний заняло прочное место в ряду ортопедических вмешательств, избавляя пациентов от болей и возвращая им работоспособность [18]. Эндопротезирование – это хирургическая операция, при которой пораженный сустав пациента удаляется и заменяется искусственным эндопротезом (рис. 1б, 1г, 2). В настоящее время для фиксации компонентов эндопротеза к бедренной и тазовой костям используются две технологии: цементное и бесцементное эндопротезирование (рис. 3). Обе техники являются эффективными, однако каждая из них имеет свои показания и противопоказания. При цементном эндопротезировании искусственная впадина и ножка эндопротеза фиксируются при помощи метилметакрилатного цемента, который вводится в костномозговой канал бедренной кости и вертлужную впадину, подготовленные особым образом. В течение нескольких минут цемент застывает, прочно фиксируя детали эндопротеза к костям.

При бесцементной технике впадина эндопротеза соединяется с тазовой костью при помощи винтов. Бедренная ножка плотно вбивается в специально подготовленный костномозговой канал бедренной кости. Поверхности такого эндопротеза, соприкасающиеся с костями, имеют пористый вид. Благодаря такой структуре костная ткань может постепенно врастать в поверхностный слой, что является важным фактором дополнительной фиксации.

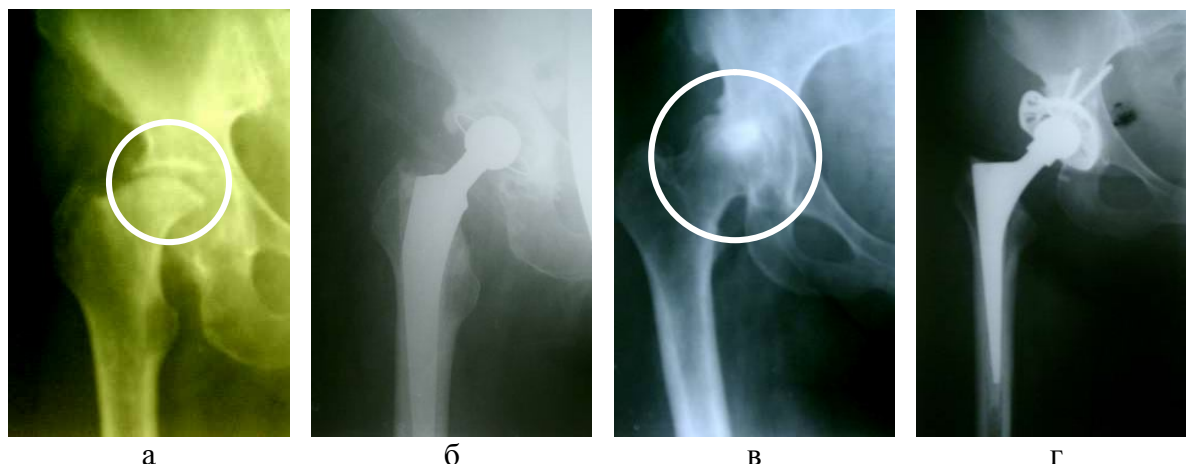


Рис. 1. а) рентгенограмма при переломе шейки бедра, б) эндопротезирование при переломе шейки бедра, в) рентгенограмма при асептическом некрозе головки бедра, г) эндопротезирование при асептическом некрозе головки бедра

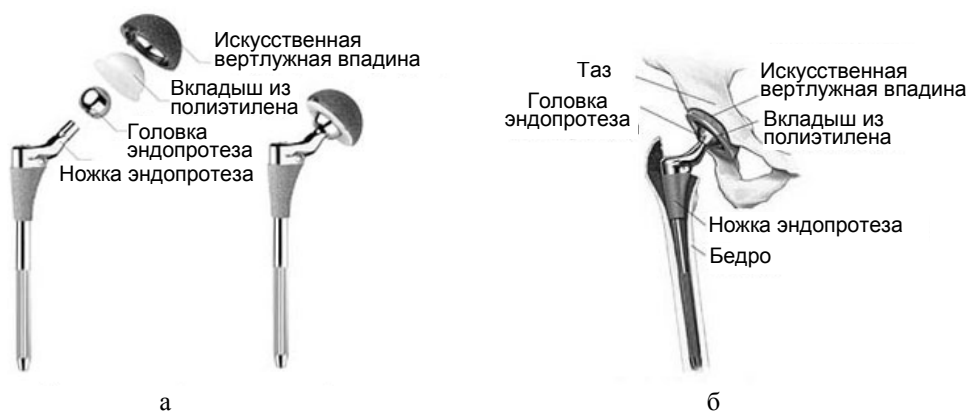


Рис. 2. Конструкция тотального эндопротеза тазобедренного сустава: а) в разобранном и собранном виде, б) в установленном виде



Рис. 3. Схемы цементного (а) и бесцементного (б) эндопротезирования

Преимущества эндопротезирования тазобедренного сустава перед иными способами восстановления функции тазобедренного сустава, такими как остеотомия, остеосинтез шейки бедренной кости, в настоящее время не вызывают сомнения, так как оно позволяет поставить на ноги больного уже на вторые – третьи сутки после операции и начинать ходьбу с помощью костылей. Через одну – две недели пациент может полностью нагружать оперированную конечность.

При тотальном эндопротезировании тазобедренного сустава в костной ткани, контактирующей с имплантатом, увеличивается интенсивность перестройки, что обусловлено влиянием таких факторов как микроподвижность, термический некроз (при использовании костного цемента), гранулематозная реакция на метилметакрилат и ионы металла. На интенсивность ремоделирования влияют длина, ширина ножки эндопротеза. Факторами риска, увеличивающими потерю костной ткани, являются возраст пациентов, низкая исходная масса окружающей кости вследствие остеопороза. Усиление интенсивности перестройки, особенно выраженное за первые 6 месяцев после операции, может стать причиной потери 78% окружающей кортикальной кости. Дефицит костной массы, в свою очередь, – причина нестабильности эндопротеза, перелома его ножки, протрузии вертлужного компонента, и, наконец, перелома бедренной кости [19]. Таким образом, основной причиной некачественной установки протеза и потери его функциональности является перестройка костной ткани в области протеза с последующей резорбцией и расшатыванием протеза.

В этой связи был и до сих пор остается актуальным вопрос подбора наилучшей конструкции протеза, предотвращающей, насколько это возможно, негативные вышеперечисленные последствия. Выбор и разработка протеза осуществляется на различных уровнях: материалы, форма протеза, способы его установки и др.

Известно [20], что резорбция возникает в области пиковых напряжений, и причина перестройки в целом – изменение напряженно-деформированного состояния в объеме костной ткани. Поэтому авторы предлагают рассмотреть вопрос об оптимальной конструкции и способе закрепления протеза как вопрос о создании равных напряжений по границе контакта протеза и костных стенок, чтобы предотвратить резорбцию, стимулировать укрепление и прорастание кости в область протеза (если такая возможность предусмотрена его конструкцией).

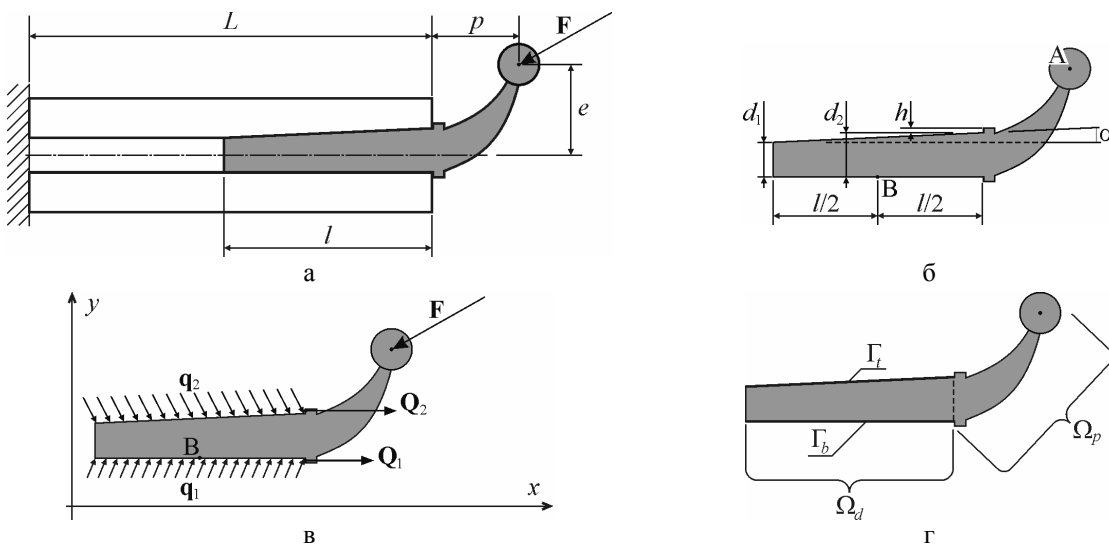


Рис. 4. Схема проектируемого протеза: а – геометрические размеры установки протеза в полость бедренной кости, внешние граничные условия; б – размеры ножки протеза; в – внутренние граничные условия, приложенные к протезу силы; г – области контакта ножки протеза и стенок кости Γ_b и Γ_t , область проектирования Ω_d , область неопределяемых механических свойств Ω_p

На сегодняшний день в мире разработано и активно на практике используется целый ряд конструкций протезов, отличающихся геометрией элементов, материалами и способами обработки. При поиске оптимальной конструкции авторы предлагают пока не ставить вопрос об определении геометрии подготовленного для протеза ложа, способе закрепления головки протеза и обеспечении ряда ограничений (к примеру, биологическая инертность применяемых материалов, их нетоксичность, прочность, хрупкость, свойства ползучести и т.п.).

С точки зрения математического моделирования указанная механическая цель поиска оптимальной конструкции протеза может иметь следующий вид. Пусть рассматривается идеализированная модель эндопротеза, основные параметры которого показаны на рис. 4. Подбор конструкции эндопротеза означает выбор оптимальных свойств материала по всей области $\Omega_d \cup \Omega_p$. При этом предполагается, что свойства могут быть не постоянны относительно координат и могут изменяться, выражая тем самым неоднородность схемы искомого протеза.

Цель проектирования. Поскольку при эксплуатации протеза не избежать возникновения напряжений, как в кости, так и в протезе (включая границу между ними), то целью проектирования должны стать «благоприятные» напряжения, т.е. напряжения, в максимальной степени соответствующие успешному исходу операции в долгосрочной перспективе. Желательные напряжения не должны приводить к резорбции, которая возникает в области эпифиза с латеральной стороны и в области диафиза в центральном направлении относительно центральной оси бедра. Как было показано в работе [21], механической причиной резорбции служат пиковые напряжения в указанных областях, возникающие при передаче протезом нагрузки со стороны бедра на стенки бедра. Также не должно возникать разрушающих усилий ни в объеме кости, ни в объеме протеза. Суммируя сказанное и основываясь на изложенных во введении медицинских соображениях, предлагается следующая цель оптимального проектирования: уровень напряжений по поверхностям контакта между протезом и костью Γ_b и Γ_t (рис. 4г) должен быть однородным, хотя сама величина пограничных усилий \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 (рис. 4в) не задается. Такой критерий был бы более правдоподобен, поскольку эксплуатация установленного протеза происходит под воздействием постоянно изменяющейся нагрузки. Следовательно, нельзя заранее установить те напряжения, которые в точности, с одной стороны, не вызывают резорбцию и обеспечивают рост костной ткани, а с другой стороны, соответствуют равновесию (возможно, квазистатическому) протеза или его динамике.

Дополнительно к уже указанным критериям в виде постоянных пограничных усилий можно добавить еще одно требование на поле напряжений, заключающееся в постоянстве напряжений по всему объему $\Omega_d \cap \Omega_p$, поскольку это соответствует естественному требованию к долгосрочной прочности протеза.

Справедливости ради необходимо отметить, что выбранный критерий оптимальности протеза не может считаться единственно возможным. К примеру, имеет смысл при выборе наилучшей конструкции протеза добиваться создания таких напряжений в объеме кости, какие возникают в кости здорового человека, то есть естественных напряжений.

Задача 2. Оптимальная конструкция мостовидного протеза

В клинической практике часто приходится иметь дело с таким явлением, как изменения положения одного или ряда зубов вследствие каких-либо нарушений целостности зубного ряда. Будем называть такие смещения вторичными деформациями зубного ряда. Само по себе подобное смещение, конечно, ведет к негативным последствиям для здоровья пациентов: нарушение жевательной функции, снижение эффективности пережевывания пищи, возникновение блокирующих движений нижней челюсти при значительном перемещении антагонистов в область дефекта, нарушение функции жевательных мышц и их нервной регуляции, изменения со стороны височно-нижнечелюстного сустава, заболевания тканей пародонта, травматизация мягких тканей ротовой полости, эстетический дефект. Но, более того, оно создает серьезные трудности для восстановления жевательной функции при протезировании.

Имеющиеся в литературе данные о причинах и механизме возникновения вторичных деформаций зубов [22, 23] не могут объяснить всё многообразие клинических примеров данной патологии. Несмотря на то, что рассматриваемый процесс, очевидно, связан с механикой зубочелюстной системы и многие исследователи пытаются объяснить его в терминах сил и моментов [24], до настоящего времени нет чётких механических обоснований возникновения вторичных деформаций.

Исследования в данном направлении могли бы дать биомеханическое обоснование возникновения смещений зубов, согласно которому в результате перераспределения нагрузок в костной ткани изменяются напряжения и деформации вокруг исследуемого объекта – зуба, что приводит к перестройке в структуре кости и формированию вторичной деформации. Основополагающими факторами данного процесса являются вязкоупругопластические свойства костного материала, величина и распределение прилагаемых жевательных нагрузок, время формирования деформации.

Установив чёткую функциональную зависимость между данными факторами, с достаточной степенью достоверности можно будет прогнозировать сроки возникновения вторичной деформации, скорость её формирования, возможные осложнения. Данная информация в клинике позволит на основе объективных показателей определять необходимость протезирования, оптимальные сроки для начала лечения, выбор рациональной конструкции протеза.

Исследовав механические особенности вторичной деформации, в работе [25] выдвинута следующая гипотеза о ее причинах: зуб должен восприниматься как элемент всей зубочелюстной системы в целом. В норме при целостном зубном ряду на зуб действует комплекс нагрузок различной природы: усилия со стороны пищи, усилия со стороны соседних зубов и зубов-антагонистов, усилия со стороны костных тканей альвеолярного отростка, передаваемые через слой периодонта. Все вместе данные усилия образуют уравновешенную (в среднем по времени) систему сил. Геометрия, механические свойства и иные параметры зубочелюстной системы соответствуют гомеостатическому состоянию, которое обладает способностью сохраняться достаточно продолжительное время, если не возникает каких-либо непреодолимых регуляционными механизмами отклонений. Исчезновение какого-либо зуба (нарушение целостного зубного ряда) приводит к тому, что какие-то из усилий, перечисленных выше, либо изменяются, либо исчезают вовсе. Но адаптационные механизмы работы организма обладают определенной инертностью, их реакция не может быть мгновенной. Поэтому, когда нарушается гомеостатическое состояние, в элементах зубочелюстной системы возникают новые напряжения, отличающиеся от

тех, которые возникают при равновесии в норме. Изменение напряжений (вместе с механическими деформациями) запускает механизмы перестройки и адаптационного роста, которые, в свою очередь, изменяют форму и положение лунки и самого зуба.

В результате оказывается, что существенной отличительной особенностью предлагаемого механизма является исследование всего комплекса механических напряжений и деформаций, возникающих в твердых тканях, окружающих зуб. Поэтому следует рассматривать не силы, действующие на зуб, а напряжения, возникающие вокруг него в области альвеолярного отростка. И при описании вторичной деформации авторами предлагается рассматривать лишь твердые ткани альвеолярного отростка, подверженные действию усилий со стороны мышц в местах их крепления и со стороны зуба, передающего через слой периодонта весь комплекс воспринимаемых им нагрузок. То есть задача биомеханического описания причин вторичного деформирования должна формулироваться и решаться как задача механики деформируемого твердого тела.

Определившись с причинами вторичной деформации, которые видятся как исключительно механические, если в основе процесса лежит лишь утрата какого-либо из зубов, нужно ставить практически востребованный вопрос о способах лечения таких пациентов. Естественный способ привести зубной ряд в норму – это установить в ротовой полости конструкцию, восстанавливающую целостность и непрерывность жевательной поверхности. Существует множество способов того, как это можно сделать. Остановим внимание читателя сейчас лишь на использовании мостовидного протеза, когда на соседние с вакансией зубы устанавливаются коронки (называемые опорными), между которым устанавливается перемычка. На ней формируется поверхность, повторяющая анатомическую форму жевательной поверхности утраченного зуба.

Одной из наиболее трудных и неоднозначных клинических проблем является выбор такой конструкции протеза, при которой не должны в объеме кости возникнуть описанные выше процессы. Другими словами, зубы не должны смещаться относительно своей челюсти, они не должны со временем расшатываться, сочленение протеза с зубом, перемычки с коронками должно обеспечивать долговременную прочность.

К сожалению, при том, что решение о выборе конструкции оказывается столь ответственным, практически этот вопрос решается на основе опыта врача и его предпочтений. Хотя, очевидно, здесь обязательно должен производиться объективный анализ протезирования с позиции биомеханики и расчет на основе выбранного критерии оптимальности. Тем более, что современное развитие оказания медицинской помощи имеет направленность на индивидуализацию подхода к лечению.

Авторы данной работы предлагают рассматривать проблему оптимального протезирования как проблему управления напряжениями в следующем виде. В костной ткани после протезирования должны создаваться напряжения наиболее близкие к тем, что возникали в ней при нормально функционирующем зубном ряду. В области же протеза напряжения должны быть таковы, чтобы обеспечивалась его прочность. Оптимальные напряжения в костной ткани могут быть получены при расчете напряжений по модели с полным зубным рядом, а необходимые напряжения в протезе могут выбираться по разному, в частности, имеет смысл стремиться к равномерному напряженному состоянию.

Достижение же заданной цели в терминах напряженного состояния возможно варьированием целого ряда параметров: форма обработки зубов под коронку, способ и место крепления перемычки, материал протеза целиком или его отдельных компонент. Однако с точки зрения математического моделирования все эти проблемы можно

свести к распределению механических свойств в объеме протеза и частично в объеме коронок опорных зубов.

Задача 3. Перестройка костной ткани

Достаточно давно специалисты в биомеханике обратили внимание на такой процесс, как перестройка в костной ткани. Под перестройкой обычно понимают весь комплекс химических, биологических и механических процессов, приводящих к изменению формы и свойств костного образования. Среди причин, вызывающих перестройку, обычно выделяют изменившийся характер нагрузки на рассматриваемую область или естественное формирование костного образования в процессе роста. Так, клинический опыт ортопедической хирургии показывает, что у пациента, лишенного в течение долгого времени движения, возникает механическое ослабление костной ткани в нижних конечностях, которое выражается в снижении плотности минеральных солей. Изменения становятся заметными на рентгенограмме по увеличивающейся проницаемости материала кости.

Правильное моделирование процесса перестройки позволило бы строить надежные прогнозы по направлению и интенсивности изменения свойств ткани. Также необходимый процесс реабилитации после долгого бездействия конечности должен производиться с учетом того, что кость должна восстановить свою прочность, не подвергаясь при этом разрушению. Тогда возникает вопрос об управлении процессом перестройки, которое также опирается на ее адекватное моделирование.

Сложившаяся традиция исследований в данном направлении [3, 5] заключается в том, что к построенной модели квазистатического поведения тела кости добавляется уравнение перестройки. Суть этого уравнения – описание скорости изменения свойств кости через изменение некоторых параметров напряженно-деформированного состояния, называемых в этом случае стимулом перестройки. Известны модели описания перестройки на основе таких стимулов, как отличие напряжений от гомеостатического уровня, отличие актуальных деформаций от гомеостатических, неравномерность напряжений и деформаций, отклонение плотности энергии деформации от заданного значения и прочие [3, 5].

Помимо того, что выбор типа самого уравнения представляет собой определенную проблему, его использование требует определения ряда констант (коэффициентов пропорциональности, показателей степени и прочих).

Авторы данной работы, понимая всю многогранность, трудность и актуальность проблемы описания процесса перестройки, предлагают следующий взгляд на механический фактор перестройки.

Будем считать, что в процессе перестройки костная ткань (или какая-то ее часть) стремится достигнуть некоторого состояния, характеризуемого выбранным параметром напряженно-деформированного состояния, выраженным через напряжения. Тогда процесс перестройки означает достижение этих напряжений с помощью создания таких свойств собственно костного материала, которые обеспечили бы создание в ней требуемого уровня и распределения напряжений. К примеру, напряженными состояниями, которые кость стремится достигнуть в процессе перестройки, могут быть равномерность распределения напряжений по объему или минимум пиковых напряжений.

В приведенной постановке задача имеет вид задачи управления напряжениями и не требует построения уравнения перестройки. Это представляет существенное

преимущество. Однако такой подход не позволяет моделировать протекание самого процесса перестройки.

Если считать, что заданное поле напряжений (к примеру, равномерное напряженное состояние) создается формированием полостей в объеме костной ткани, то результатом перестройки становится образование трабекулярной костной ткани.

Задача упругости с собственными деформациями. Общая постановка проблемы управления напряжениями

Как и большинство других задач в области биомеханики, работы, связанные с моделированием и вычислением напряжений в живых тканях, в перспективе ориентированы на постановку и решение задач управления или оптимизации. Последние в биомеханике представляют огромный пласт перспективных проблем.

Рассмотрим сейчас общую постановку задачи управления напряжениями в теле, поведение которого смоделировано обобщенной постановкой теории упругости с собственными деформациями. В деталях эта постановка для произвольных тел вообще и для объектов анализа в биомеханике приведена в работе [26]. Ниже представлены ее основные элементы.

Постановка краевой задачи определения биологических напряжений

Проблемы теоретического исследования различных аспектов биологических напряжений в данной работе основываются на результатах анализа напряжений и деформаций, который проводился учеными разных стран (С. Тимошенко [27], В. Новацкий [28], А. Коваленко [29], Б. Боли и Д. Уэйнер [30], Я. Подстригач [31], Я. Бурак [32], А. Поздеев [33] и др.) в течение ряда лет. В частности, близким к указанным проблемам биомеханики оказался вопрос о температурном нагреве, который не вызывает температурных напряжений. В работе Т. Мура [34] такая температурная деформация была названа импотентной. Ученые Венского технического университета (Э. Мелан, Х. Паркус, Ф. Циглер, Х. Иршик, Ф. Раммерсторфер и др.) [35-38] внесли существенный вклад в теорию математического моделирования и оптимального управления для температурных напряжений, деформаций и перемещений. Недавно было разработано новое приближение к этим задачам, основанное на методе В. Майзеля [39], см. работы Ф. Циглера и Х. Иршика [40, 41]. Было введено понятие нильпотентного нагрева как нагрева, не вызывающего деформации (в этом случае сумма температурной и силовой деформаций должна быть равна нулю). Все указанные работы основаны на дифференциальной постановке краевой задачи термоупругости и соответствующем классическом решении задачи.

Иной подход к исследованию напряжений, основанный на понятиях функционального анализа в гильбертовых пространствах и обобщенном решении задачи, был разработан учеными г. Перми (А. Поздеев, Ю. Няшин, П. Трусов) [33]. Этот подход был использован для моделирования и управления остаточными напряжениями в задачах термоупругопластичности. Был решен ряд задач управления остаточными напряжениями в технологических процессах обработки металлов давлением (горячая прокатка двутавровых балок, холодное волочение проволоки и др.). Эти результаты собраны и приведены в работе [33]. В данной работе этот подход будет использован для решения задачи об исследовании и управлении биологическими напряжениями и ростовыми деформациями.

Пусть исследуемое тело занимает ограниченную область Ω трехмерного евклидова пространства E^3 . Замыкание области обозначим через $\bar{\Omega}$, границу (которая считается достаточно гладкой) – через Γ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$).

Классическая постановка

1) Уравнение статического равновесия внутри области

$$\text{Div } \tilde{\sigma} + \vec{Q} = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений, \vec{Q} – вектор объемной силы, $\vec{Q} \in (C(\Omega))^3$. В формуле (1) и далее величины $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$, \vec{u} считаются функциями координат, представленными радиусом-вектором $\vec{r} \in \bar{\Omega}$.

2) Деформации будем считать малыми и аддитивными, т.е. тензор малой деформации $\tilde{\varepsilon}$ представляется в виде суммы тензоров упругой $\tilde{\varepsilon}^e$ и неупругой $\tilde{\varepsilon}^i$ деформации

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^i, \quad \vec{r} \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

где под $\tilde{\varepsilon}^i$ следует понимать деформацию роста ткани или температурную, пластическую деформацию, деформацию ползучести, деформацию от фазовых превращений, деформацию, созданную при перестройке в живой ткани. В работе Т. Мура [34] эти деформации называются собственными деформациями (*eigenstrain*).

3) Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot \tilde{\varepsilon}^e, \quad \vec{r} \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

где \tilde{C} – четырехвалентный тензор модулей упругости, $C_{ijkl} \in C^1(\bar{\Omega})$.

4) Соотношения деформация-перемещение записываются в рамках линеаризованной теории

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla}), \quad \vec{r} \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

где \vec{u} – вектор перемещения, $\vec{u} \in (C^2(\bar{\Omega}))^3$.

Заметим, что компоненты тензора деформации удовлетворяют условиям совместности деформаций, которые эквивалентны обращению в нуль компонент тензора второго ранга $\text{rot}(\text{rot } \tilde{\varepsilon})$ [42] (при условии существования вторых производных по координатам от компонент деформации):

$$\text{rot}(\text{rot } \tilde{\varepsilon}) = 0, \quad \vec{r} \in \bar{\Omega}. \quad (5)$$

5) Будем считать, что граница области Γ делится на две взаимно непересекающиеся части $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$. На части границы Γ_u заданы кинематические граничные условия, на части Γ_σ задан вектор напряжений $\vec{P} \in (C(\Gamma_\sigma))^3$:

$$\vec{u} = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_u, \quad (6)$$

$$\vec{n} \cdot \tilde{\sigma} = \vec{P}, \quad \vec{r} \in \Gamma_\sigma. \quad (7)$$

6) Будем считать, что деформации $\tilde{\varepsilon}^i$ могут быть выражены в виде функциональной зависимости

$$\tilde{\varepsilon}^i = \tilde{f}(t, \vec{r}, \tilde{\sigma}). \quad (8)$$

Так, в частности температурные деформации $\tilde{\varepsilon}^T \in (C^1(\overline{\Omega}))^6$ будут равны

$$\tilde{\varepsilon}^T = \int_{T_0}^T \tilde{\alpha}_T(T) dT, \quad \vec{r} \in \overline{\Omega},$$

где $\tilde{\alpha}_T(T)$ – тензор коэффициентов линейного теплового расширения как функция температуры T ; T_0 – температура, при которой тело находится в естественном (ненапряженном и недеформированном) состоянии.

Обобщенное решение задачи

Назовем обобщенным решением задачи упругости с собственными деформациями тензор $\tilde{\sigma}$, который представим в виде

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot (\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) - \tilde{\varepsilon}^i), \quad (9)$$

где $\vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, $\vec{u} = 0$, $\vec{r} \in \Gamma_u$, и имеет место соотношение

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w}) dV - \int_{\Gamma_{\sigma}} \vec{P} \cdot \vec{w} dS - \int_{\Omega} \vec{Q} \cdot \vec{w} dV = 0, \quad (10)$$

$$\forall \vec{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \vec{w} = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_u.$$

Здесь $(W_2^1(\Omega))^3$ есть соболевское функциональное пространство функций с обобщенной производной, причем сами функции и их производные суммируемы в квадрате. Деформации $\tilde{\varepsilon}(\vec{u})$ и $\tilde{\varepsilon}(\vec{w})$ определяются линейризованными геометрическими соотношениями (4), где производные понимаются в смысле распределений (или, другими словами, как обобщенные производные). Заметим, что значения функций на границе понимаются с помощью оператора следа, $\vec{P} \in (L^2(\Gamma_{\sigma}))^3$, $\vec{Q} \in (L^2(\Omega))^3$.

Задача управления напряжениями

Сама задача управления напряжениями имеет следующую формулировку: пусть теперь тензор $\tilde{\sigma}$ известен, причем для него выполняются условия (10) (или (1) и (7)). Требуется определить деформации $\tilde{\varepsilon}^i$ или свойства $\tilde{C}(\vec{r})$ так, чтобы выполнялось соотношение (1) или (9).

Метод решения задач управления напряжениями

Рассмотрим множество H симметричных тензоров второго ранга. Пусть компоненты тензоров являются вещественными функциями пространственных координат и принадлежат функциональному пространству L^2 , тогда совокупность компонент тензора \tilde{A} принадлежит пространству $(L^2)^6$: $\tilde{A} \in (L^2)^6$.

В пространстве H вводится скалярное произведение и порождаемая им норма

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int_{\Omega} A_{ij} C_{ijkl}^{-1} B_{kl} dV, \quad (11)$$

$$\|\tilde{A}\| = \sqrt{(A_{ij}, A_{ij})}, \quad (12)$$

где C_{ijkl}^{-1} , как и ранее, коэффициенты матрицы податливости.

Введем подпространство $H_u \subset H$ согласно следующему определению. Симметричный тензор $\tilde{f} \in H$ принадлежит подпространству H_u , если выполняется условие: $\exists \bar{u}(\bar{r}) \in (W_2^1(\Omega))^3$: $\bar{u}(\bar{r}) = 0$, $\bar{r} \in \Gamma_u$, так что имеет место

$$\tilde{f}(\bar{r}) = \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \bar{u} + \bar{u} \bar{\nabla}), \quad (13)$$

где производные понимаются в обобщенном смысле, а значение вектора \bar{u} на границе Γ_u понимается в смысле оператора следа.

Физический смысл подпространства H_u состоит в том, что сюда входят совместные тензоры деформации, причем перемещения, соответствующие этим деформациям, обращаются в нуль на неподвижных опорах. Легко убедиться, что подпространство H_u является линейным, так как операции сложения элементов и умножения на скаляр не выводят за его пределы.

Теорема о необходимых и достаточных условиях получения заданного поля биологических напряжений

В работе [26] была показана справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $\tilde{\sigma}^*(\bar{r})$ – симметричный тензор второго ранга, который удовлетворяет соотношению (10) при заданных силах \bar{P} и \bar{Q} . Введем тензор \tilde{f} согласно соотношению

$$\tilde{f} = \tilde{\varepsilon}^i + \tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{\sigma}^*. \quad (14)$$

Если $\tilde{f} \in H_u$, то это является необходимым и достаточным условием того, что напряжения $\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \tilde{\sigma}^*(\bar{r})$ имеют место в данной области $\bar{\Omega} \in E^3$.

Естественным следствием этой теоремы стала следующая теорема. Помимо нее был получен ряд иных полезных с теоретической точки зрения следствий, но авторы не приводят их в данной работе, а отсылают заинтересованного читателя к работе [43].

Теорема 2. Для того чтобы в точках тела не возникали биологические напряжения ($\tilde{\sigma}(\bar{r}) = \tilde{0}$, $\bar{r} \in \bar{\Omega}$), необходимо и достаточно, чтобы тензор собственной деформации $\tilde{\varepsilon}^i$ был совместным и соответствующие ему перемещения обращались в нуль на границе Γ_u .

Таким образом, авторы данной работы поддерживают тезис о единообразности математического описания температурных, остаточных и ростовых напряжений, имеющих место при различных процессах в живой ткани. Обоснованием такого предположения служит формализация в виде общей математической модели. Модель предполагает существование упругих деформаций, а также и неупругих: ростовых, температурных, деформаций усадки.

В работе проведен теоретический анализ постановки задачи определения напряженно-деформированного состояния, позволивший выделить ряд основных

свойств решения поставленной задачи, в частности, единственность классического и обобщенного решений.

Использование Теоремы 1 (или Теоремы 2) для построения реальных процедур поиска оптимального решения привело к получению мажорирующей оценки. Подробный вывод, основанный на функциональных свойствах решения задачи теории упругости с собственными деформациями, здесь не приводится, детали можно найти в работах [26, 43].

$$\|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^*\|_{H_u} \leq \frac{1}{\min_{\tilde{r} \in \tilde{V}} \lambda_{\min}(\tilde{r})} \sqrt{(\tilde{f}, \tilde{f})_{L_2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}, \quad (15)$$

где $\lambda_{\min}(\tilde{r})$ – минимальное собственное значение тензора податливости \tilde{C}^{-1} , a_i – коэффициенты разложения тензора \tilde{f} по базису пространства H_u .

При решении задач управления напряжениями используется функционал, выражающий правую часть неравенства (15) в некотором приближении

$$\Phi = K \sqrt{(\tilde{f}, \tilde{f})_{L_2} - \sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (16)$$

Стремление к минимуму введенного функционала означает приближение в интегральном смысле истинных напряжений к заданным

$$\Phi \rightarrow \min \Rightarrow \|\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^*\|_H \rightarrow \min. \quad (17)$$

Задачи управления напряжениями

Для описанных выше проблем биомеханики предлагаются следующие возможные формулировки задач управления напряжениями в рамках описанной модели упругости с собственными деформациями. Надо понимать, что в каждом случае постановки могут модифицироваться по мере накопления знаний о механике процесса или в результате сверки теоретических результатов с практическими.

Задача 1

Требуется определить такое поле распределения модуля упругости $E(\tilde{r})$ по объему протеза $\Omega_d \cap \Omega_p$, что по границам контакта Γ_b и Γ_t возникают равномерные поверхностные усилия \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 , а в объеме протеза создается однородное поле напряжений σ_{ij} . Все участвующие в формулировке величины должны удовлетворять выписанным соотношениям (1, 7).

Задача 2

Пусть в теле кости заданы желаемые напряжения $\tilde{\sigma}^*$, равные естественным напряжениям при нормальном зубном ряде. В объеме устанавливаемого протеза задан характер распределения напряжений $\tilde{\sigma}^* = \text{const}$. Требуется определить распределение свойств $\tilde{C}(\tilde{r})$ в объеме протеза и форму границы контакта между зубом и опорной

коронкой, чтобы возникающие в результате жевания напряжения в максимально возможной степени приблизились к заданным оптимальным.

Задача 3

Пусть заданы в области кости напряжения $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}^*(\vec{r})$. Процесс перестройки означает создание в объеме кости распределение такого тензора $\tilde{C}(\vec{r})$, который минимизировал бы функционал (16), обеспечивая возникновение в кости напряжений близких к заданным. Характер зависимости полученных упругих свойств должен охарактеризовать тип анизотропии костного материала, определить линии анизотропии.

Также имеет смысл дополнить задачу условием минимума массы

$$J = \int_V \rho(\vec{r}) dV \rightarrow \min, \quad (18)$$

где $\rho(\vec{r})$ – плотность материала.

Выводы

В данной работе авторы предлагают вниманию специалистов набор задач биомеханики, имеющих принципиально различные практические корни. Однако в результате выделения механической составляющей и моделирования приведенные проблемы свелись, по сути, к одной и той же проблеме управления напряжениями за счет подбора оптимального распределения свойств.

Конечно, в данной работе детально не рассмотрено достаточно много иных проблем, безусловно входящих в спектр клинических ситуаций, интерпретируемых с механической точки зрения как задачи управления напряжениями. Вот примеры некоторых из них:

1. Применение пломб и вкладок для лечения пораженных кариесом участков эмали [44]. В этом случае важную роль играет обеспечение долговременной прочности в условиях тепловой нагрузки (нагрев или охлаждение восстановленного участка во время приема пищи), вызывающей соответственно температурные напряжения. Пломбы и вкладки можно изготавливать из различных материалов, и существуют варианты при подготовке области для их установки. Для вкладок к тому же необходимо определять толщину и материал фиксирующего цемента.
2. Восполнение дефектов зубного ряда часто производится с помощью установки имплантатов. Их устойчивость в объеме кости связана с направлением перестройки (резорбции или роста). Благоприятной считается ситуация, когда кость прорастает в заготовленные полости в объеме имплантата. Однако направить перестройку в нужном направлении можно с помощью соответствующих напряжений вокруг имплантата.
3. Любой вид ортопедического лечения, по сути, является генерированием в объеме корректируемых костных образований напряжений и деформации, вызывающих адаптивный рост, перестройку и морфогенез, направленных на положительный клинический эффект. Тогда необходимо определять параметры ортопедического лечения с целью создания в кости необходимых напряжений.

Основным результатом данной работы авторы считают формирование основы унифицированного представления о целом ряде проблем биомеханики как о проблеме

управления напряжениями. Это позволило бы применить развитую теорию управления напряжениями и деформациями для достижения практических результатов в актуальных медицинских вопросах.

Более того, вычленение общей механической сути подобных проблем биомеханики, на взгляд авторов, способствовало бы лучшему пониманию ситуации специалистами и со стороны точных наук, и со стороны практической клиники.

Конечно, авторы не призывают все приведенные задачи интерпретировать только как задачи управления напряжениями. В действительности приведенные проблемы биомеханики могут рассматриваться и с других позиций, и тогда актуальным может оказаться не уровень напряжений, а, например, уровень кислотности или биологическая совместимость. Так процесс перестройки может рассматриваться как химический или трофический. А верификацию того или иного подхода может осуществить только эксперимент.

Список литературы

1. *Takamizawa, K.* Kinematics for Bodies Undergoing Residual Stress and its Applications to the Left Ventricle / K. Takamizawa, T. Matsuda // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1990. – Vol. 57, No. 3. – P. 321-329.
2. *Chaudhry, H.R.* Evaluation of Residual Stress in Rabbit Skin and the Relevant Material Constants / H.R. Chaudhry, B. Bukiet, T. Findley, A.B. Ritter // Journal of Theoretical Biology. – 1988. – Vol. 192. – P. 191-195.
3. *Taber, L.A.* Biomechanics of Growth, Remodeling, and Morphogenesis / L.A. Taber // Applied Mechanics Reviews. – 1995. – Vol. 48, No. 8. – P. 487-545.
4. *Vossoughi, J.* Intimal residual stress and strain in large arteries / J. Vossoughi, Z. Hedjazi, F.S. Borris // Proc. Summer Bioengineering Conference. – 1993. – P. 434-437.
5. *Taber, L.A.* Theoretical Study of Stress-Modulated Growth in the Aorta / L.A. Taber, D.W. Eggers // Journal of Theoretical Biology. – 1996. – Vol. 180. – P. 343-357.
6. *Chaudhry, H.R.* Residual Stresses in Oscillating Thoracic Arteries Reduce Circumferential Stresses and Stress Gradients / H.R. Chaudhry, B. Bukiet, A. Davis, A.B. Ritter, T. Findley // Journal of Biomechanics. – 1997. – Vol. 30, No. 1. – P. 57-62.
7. *Delfino, A.* Residual Strain Effects on the Stress Field in a Thick Wall Finite Element Model of the Human Carotid Bifurcation / A. Delfino, N. Stergiopoulos, J.E. Moore, J.J. Meister // Journal of Biomechanics. – 1997. – Vol. 30, No. 8. – P. 777-786.
8. *Gonzales-Carrasco, J.L.* Thermal Oxidation Treatments in the Development of New Coated Biomaterials: Application to the MA 956 Superalloy / J.L. Gonzales-Carrasco, M.L. Escudero, J. Chao, M.C. Garcia-Alonso // Materials and Manufacturing Processes. – 1998. – Vol. 13, No. 3. – P. 431-443.
9. *Rachev, A.* Theoretical Study of the Effect of Stress-Dependent Remodeling on Arterial Geometry Under Hypertensive Conditions / A. Rachev // Journal of Biomechanics. – 1997. – Vol. 30. № 8. – P. 819-827.
10. *Rodriguez, E.K.* Stress-Dependent Finite Growth in Soft Elastic Tissues / E.K. Rodriguez, A. Hoger, A.D. McCulloch // Journal of Biomechanics. – 1994. – Vol. 27, No. 4. – P. 455-467.
11. *Tanaka, M.* Preliminary Study on Mechanical Bone Remodeling Permitting Residual Stress / M. Tanaka, T. Adachi // JSME International Journal. – 1994. – Vol. 37, No. 1. – P. 87-95.
12. *Stańczyk, M.* Thermal Problems in Biomechanics: From Soft Tissues to Orthopaedics / M. Stańczyk, J.J. Telega // Russian Journal of Biomechanics. – 2001. – Vol. 5, No. 4. – P. 30-75.
13. *Kiryukhin, V.Y.* Prescribed thermal stress in anisotropic and inhomogeneous elastic structures: a novel approach / V.Y. Kiryukhin, Y.I. Nyashin, F. Ziegler // Proc. 4th Int. Congress on Thermal Stresses. – 2001. – P. 577-580.
14. *Штейн, А.А.* Приложение методов механики сплошной среды к моделированию роста биологических тканей / Штейн А.А. // Современные проблемы биомеханики. – 2000. – Т. 10. – С. 148-173.
15. *Skalak, R.* Compatibility and the Genesis of Residual Stress by Volumetric Growth / R. Skalak, S. Zargaryan, R.K. Jain, P.A. Netti, A. Hoger // Journal of Mathematical Biology. – 1996. – Vol. 34. – P. 889-914.

16. *Насонова, В.А.* Остеоартроз тазобедренного сустава / В.А. Насонова, Е.Л. Насонов, Л.И. Алексева, Ю.В. Муравьев // Справочник поликлинического врача. – 2004. – № 3.
17. *Загородний, Н.В.* Эндопротезирование тазобедренного сустава у пациентов пожилого возраста / Н.В. Загородний // Клиническая геронтология. – 2001. – № 3-4.
18. *Лобенко, А.А.* Эндопротезирование при заболеваниях и последствиях повреждений тазобедренного сустава / А.А. Лобенко, А.Н. Поливода, А.М. Игнатъев, А.Л. Чатковский, Д.Н. Дворников. – http://endoprotez.odessa.ua/obzor.html#text_3.
19. *Матвеева, Н.Ю.* Остеопороз как причина нестабильности эндопротезов и ее фармакологическая профилактика / Н.Ю. Матвеева, Н.А. Еськин, З.Г. Нацвлшивили, Л.К. Михайлова. – <http://endoprotez.odessa.ua/obzor.html>.
20. *Denisov, A.S.* Some Aspects of Application of Carbon Composite Material in Human Hip Joint Prosthetics / A.S. Denisov, Y.I. Nyashin, Y.V. Akulich, Y.A. Zmeev, Y.K. Osorgin, R.M. Podgaets, V.L. Scryabin, A.V. Sotin // Russian Journal of Biomechanics. – 1997. – No. 1-2. – Vol. 1. – P. 12-24.
21. *Huiskes, R.* The Relationship Between Stress Shielding and Bone Resorption Around Total Hip Stems and the Effects of Flexible Materials / R. Huiskes, H. Weinans, B. Van Rietbergen // Clinical Orthopaedics and Related Research. – 1992. – No. 274. – P. 124-134.
22. *Гаврилов, Е.И.* Деформация зубных рядов. – М.: Медицина, 1984.
23. *Пономарева, В.А.* Механизм развития и способы устранения зубочелюстных деформаций. – М.: Медицина, 1964.
24. *Шварц, А.Д.* Биомеханика и окклюзия зубов. – М.: Медицина, 1994.
25. *Вершинин, В.А.* Биомеханические аспекты вторичной деформации зубов / В.А. Вершинин, В.Ю. Кирюхин, Г.И. Рогожников // Российский журнал биомеханики. – 2004. – Том 8, № 2. – 19-28.
26. *Няшин, Ю.И.* Биологические напряжения в живых тканях. Вопросы моделирования и управления / Ю.И. Няшин, В.Ю. Кирюхин // Российский журнал биомеханики. – 2002. – Том 6, № 3. – С. 13-32.
27. *Тимошенко, С.П.* Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979.
28. *Новацкий, В.* Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975.
29. *Коваленко, А.Д.* Термоупругость / А.Д. Коваленко. – Киев: Вища школа, 1975.
30. *Боли, Б.* Теория термоупругих напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964.
31. *Григолюк, Э.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак. – Киев: Наукова Думка, 1979.
32. *Бурак, Я.И.* Об одной форме уравнений термоупругости в напряжениях / Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич // Математические методы и физико-механические поля. – 1977. – Т. 2. – P. 73-75.
33. *Поздеев, А.А.* Остаточные напряжения, теория и приложения / А.А. Поздеев, Ю.И. Няшин, П.В. Трусов. – М.: Наука, 1972.
34. *Mura, T.* Micromechanics of Defects in Solids / T. Mura. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 1991.
35. *Мелан, Э.* Термоупругие напряжения, вызванные стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1958.
36. *Parkus, H.* Thermoelasticity / H. Parkus. – Vienna, New York: Springer Verlag, 1976.
37. *Irschik, H.* Eigenstrain without stress and static shape control of structures / H. Irschik, F. Ziegler // AIAA Journal. – 2001. – Vol. 39. – P. 1985-1999.
38. *Irschik, H.* A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation / H. Irschik // Engineering Structures. – 2002. – Vol. 24, No. 3. – P. 5-11.
39. *Майзель, В.М.* Температурная задача теории упругости / В.М. Майзель. – Киев: Издательство АН УССР, 1951.
40. *Ziegler, F.* Thermal Stress Analysis Based on Maysel's Formula / F. Ziegler, H. Irschik // Thermal Stress II (edited by Hetnarski R.B.). – Amsterdam: Elsevier, 1987.
41. *Irschik, H.* Dynamic shape control of solids and structures by thermal expansion strains / H. Irschik, U. Pichler // Journal of Thermal Stresses. – 2001. – Vol. 24. – P. 565-576.
42. *Михайлов, В.Л.* Дифференциальные уравнения в частных производных / В.Л. Михайлов. – М.: Наука, 1983.
43. *Nyashin, Y.* Modeling and Control of Stress and Strain by Eigenstrain Proceedings of the Third European Conference on Structural Control / Y. Nyashin, V. Lokhov, V. Kiryukhin // III European Conference on Structural Control, Vienna, Austria. – 2004. – Vol. II. – P. S1-131-S1-134.
44. *Pechenov, V.S.* Finite Element Stress Analysis of Tooth Crowns with Titanium Inlays / V.S. Pechenov, N.B. Astashina, Y.I. Nyashin, G.I. Rogozhnikov // Russian Journal of Biomechanics. – 1997. – Vol. 1, No. 1-2. – P. 108-118.

STRESS CONTROL TASKS IN ACTUAL PROBLEMS OF BIOMECHANICS

V.Y. Kiryukhin, Y.I. Nyashin (Perm, Russia)

In the present paper the authors describe the own experience of the formalization of the actual biomechanics problems related with the stress control and with strain control in some cases. Really the solution of very wide scope of tasks of dentology, orthopaedic clinics, rehabilitation practics and other fields of medical knowledges are seems to be interpreted as the problems when a desirable stresses have to be created by possible ways. Authors quote some more presentative examples of formulations of such problems.

The theory of stress control is proposed in the study. As a result of the analisys the features of the biomechanical problems formulation when the prescribed stress are to be reached were established. In the final part of the article the authors describe the basics of the proposed theory utilization for the specified problems and for other ones that are known to reader possibly.

Key words: biomechanics, theory of elastisity, stress control, problems formulation.

Получено 30 ноября 2005