

УДК 531/534: [57+61]

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОХЛАЖДЕНИЯ В ЛЕДЯНОЙ ВОДЕ

Е.Л. Тарунин\*, В.Г. Хоруженко\*\*

\*Пермский государственный университет, Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: tarunin@psu.ru

\*\*Медико-биологический центр "Феникс", Россия, 614068, Пермь, ул. Ленина, 96-3, e-mail: tsp@permonline.ru

**Аннотация.** В статье обсуждены результаты математического моделирования процесса охлаждения людей в ледяной воде. В модели используется нестационарное уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла. С помощью модели стало возможным объяснить значительную часть результатов, полученных в результате нахождения пловцов ("моржей") в ледяной воде в течение 15 минут, а также показать роль различных параметров пловцов и условий обогрева в сауне. Предварительное использование модели выполнено в [5, 6].

**Ключевые слова:** гипотермия, гипобиоз, математическое моделирование, уравнение теплопроводности.

### 1. Введение

Гипотермия (охлаждение) широко применяется в медицинской практике. Кардиологи используют охлаждение пациентов для оперирования на "сухом" сердце [1, 2]. Охлаждение необходимо используется для уменьшения риска отторжения пересаженных органов и уменьшения последствий повреждений при авариях (стресс, облучение), а также для сохранения органов, запланированных для пересадки [7]. Обязательным этапом после охлаждения является режим восстановления жизнедеятельности. Знание оптимального режима восстановления жизнедеятельности важно как для успешного завершения операций с использованием охлаждения пациентов, так и для спасения людей, оказавшихся в ледяной воде в случае аварий. Цикл исследований, описанных в монографии [7], доказывает, что охлаждение эффективнее и безопаснее проводить с использованием препаратов, вызывающих гипобиоз (снижение жизненной активности), а обычная клиническая гипотермия опасна и часто приводит к "холодовой смерти" во время операции или на этапе восстановления. Кроме того, гипобиоз может использоваться в аварийных ситуациях (подводные лодки, самолеты, космические корабли) для поддержания жизни и для уменьшения вредных воздействий (истощение, отравление, излучение, шок).

Во всех описанных случаях полезно иметь полную информацию о распределении температуры в теле человека. Получить эту информацию можно путем математического моделирования. В [2] отмечается сложность математического моделирования многих процессов, сопровождающих процесс гипотермии, и необходимость их разработки. К сожалению, в области гипотермии мало достоверных фактов, необходимых для построения адекватной модели.

В данной статье обсуждаются результаты математического моделирования, полученные в работах авторов [5, 6]. Соответствующее моделирование во многом объяснило результаты уникальных экспериментов, выполненных под руководством одного из авторов статьи (В.Г. Хоруженко). Кроме того, выяснены параметры, которые необходимо уточнять для совершенствования модели.

## 2. Результаты экспериментов

Эксперименты выполнялись 7 декабря 2002 года в Перми. Руководителем и участником экспериментов был В.Г. Хоруженко – председатель Пермского регионального отделения Федерации закаливания и спортивного зимнего плавания России. В эксперименте приняло участие 6 хорошо подготовленных спортсменов, которые находились в ледяной воде 15 минут. Самому молодому участнику было 18 лет, а самому пожилому – 81 год. Эксперименты выполнялись под контролем бригады медицинских работников. Особенность экспериментов заключалась в том, что впервые на территории России был применен мониторинг температуры "ядра" пловцов с помощью программируемого термодатчика. Датчик имел форму капсулы диаметром  $d = 17$  мм и толщиной  $h = 5,5$  мм (оболочка капсулы была выполнена из нержавеющей стали). За полчаса до момента погружения в ледяную воду капсула проглатывалась. Разрешающая способность датчика (в интервале от 15 до 46°C) составляла 0,125 градуса. Позднее (после естественного выхода капсулы из тела) на персональном компьютере воспроизводилась зависимость температуры ядра пловца от времени  $T(t)$ .

Обслуживающая бригада врачей измеряла частоту сердечных сокращений, артериальное давление и брала кровь у пловцов на анализ в ответственные моменты. Температура воздуха на улице равнялась минус 27°C, а в сауне  $\approx +65^\circ\text{C}$ . После пребывания в ледяной воде у пловцов было отмечено повышение частоты сердечных сокращений примерно на 36%, систолического давления – на 19%. Анализ крови показал увеличение теплоотдачи за счет усиления параметров обмена. В выводах отмечено, что гормональные системы испытанных пловцов надежно приспособлены к подобным стрессовым испытаниям.

Наиболее ценный материал был получен за счет мониторинга температуры пловцов. На рис. 1 представлена типичная зависимость температуры ядра от времени у одного из спортсменов. Заметно, что через 2-3 минуты после погружения произошло незначительное повышение температуры ядра. При выходе испытуемого из воды температура его ядра равнялась 35,8°C. Через 15 минут после выхода из воды она понизилась до 33,6°C.

При подобии зависимостей типа рис. 1 их параметры существенно отличаются. Так, например, за время пребывания в ледяной воде в течение 6 минут одного спортсмена (но не "моржа") температура его ядра понизилась на 3,1°C. Эти факты указывают на приобретенную "моржами" в результате закаливания адаптацию к холоду.

В [7] описан эксперимент с экспозицией в ледяной воде ( $T = 0-0,5^\circ\text{C}$ ) в течение 30 минут одного из авторов (В.Г. Хоруженко). Параметры зависимости температуры в пищеводе от времени были таковы: начальная температура 37,6°C, при выходе из воды 35°C, минимум температуры 32°C был достигнут после 25-30 минут обогрева в сауне. Измерялась температура и в подмышечной впадине: начальная температура 36,6°C, через 5 минут после выхода из воды 30,5°C. Лишь после 40 минут нахождения в сауне температура в подмышечной впадине стала выше температуры в «ядре».

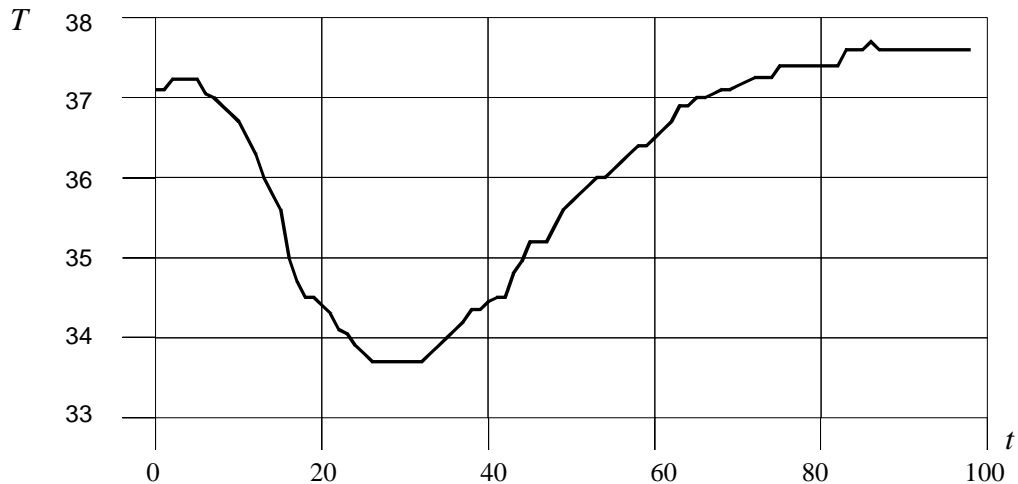


Рис. 1. Показания датчика температуры  $T$  от времени  $t$  у одного из спортсменов (15 минут в ледяной воде, 9 минут в помещении, 30 минут в сауне)

### 3. Математическая модель

Описание процесса охлаждения человека, оказавшегося в холодной воде, в общем случае, является трудной задачей, поскольку обусловлена нестационарностью процесса теплопередачи в нетривиальной трехмерной геометрии при наличии тепловыделения и влаги, которые являются индивидуальными и, кроме того, изменяются в процессе охлаждения. Сложным является и теплообмен с внешней средой. Согласно [1], "до сих пор не существует достаточно строгой схемы терморегуляции организма, которая бы объясняла принципы ее действий и позволяла предсказывать количественные эффекты".

Представленная математическая модель основана на решении одномерного нестационарного уравнения теплопроводности с внутренними источниками тепла (тело человека аппроксимировалось цилиндром):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q(t, r), \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $c$  – удельная теплоемкость,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $q$  – мощность внутренних источников тепла. Рассматривались 4 слоя с различными свойствами: поверхностный слой кожи (*epidermis*) толщиной от 1 до 1,5 мм, внутренний слой кожи (*dermis*) толщиной 2,5-3 мм, подкожная ткань (*subcutaneous tissues*) толщиной 1,5-2,5 мм и центральная часть тела [3]. Мощность внутренних источников тепла была функцией координаты (полагалось, что температура крови не отличалась от температуры ткани). На внешней границе тела ( $r = R$ ) теплообмен с внешней средой аппроксимировался законом Ньютона

$$k(R) \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda(T(t, R) - T_{out}). \quad (2)$$

Начальное распределение температуры  $T(0, R)$  соответствовало стационарному решению уравнения теплопроводности при заданных параметрах – внешней температуре воздуха  $T_{out} = T_0$ , коэффициенте теплообмена на границе  $\lambda$  и величине

тепловыделений  $Q$ . Эти параметры не были полностью независимыми – они должны были обеспечить температуру ядра из интервала 36,6-37°C. Это обстоятельство является недостатком модели. Устранить этот недостаток можно лишь существенным усложнением модели, введя "автоматическую" настройку интенсивности источников в зависимости от температуры. Неясно, как это осуществить, хотя в [2] делаются намеки на возможность такого описания.

При нахождении стационарного решения уравнения теплопроводности задавалась и зависимость коэффициента теплопроводности от координаты  $k(r)$ . Зависимость  $k(r)$  была аппроксимирована кусочно-постоянными значениями в четырех слоях тела человека:

$$k_1 = 0,209 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{C}^\circ}, k_2 = 0,314 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{C}^\circ}, k_3 = 0,418 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{C}^\circ}, k_4 = k_3.$$

Первые три значения соответствовали данным статьи [3]. Первый номер означает наружный слой. Из-за незнания коэффициента теплопроводности в центральной (четвертой) части полагали, что  $k_4 = k_3$ . В расчетах принималось, что тепловыделение с постоянной мощностью  $q_1$  происходит лишь в слое толщиной  $\Delta R = R_2 - R_1$  ( $R_2$  примерно соответствует внутренней границе поверхностного слоя кожи, а  $R_1$  соответствует внутренней границе подкожной ткани). Слой толщиной  $\Delta R$  соответствует разветвленной системе кровоснабжения. Отметим, что в [3] при вычислении температуры в поверхностном слое источники тепла задавались в двух слоях и эти источники тепла были пропорциональны разности температуры тела и фиксированной температуры крови. В нашей модели мы полагаем, что температура крови совпадает с температурой ткани.

Коэффициент пропорциональности, использованный в [3], был функцией координат. Он был отличен от нуля лишь во внутреннем слое кожи (*dermis*) и в подкожной ткани. Максимальное значение соответствовало внутренней границе подкожной ткани, на интервале до внутренней границы *dermis* коэффициент убывал линейно, а затем – по квадратичному закону.

Полагалось, что тепловыделение с постоянным значением  $q_1$  происходит в слое толщиной  $\Delta R = R_2 - R_1$ . Для вычисления величины  $q_1$  использовалась формула

$$q_1 \approx \frac{Q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)H}, \quad (3)$$

в которой  $H$  – высота пловца, а общая средняя мощность тепловыделения  $Q$  равна [1]

$$Q \approx (2,4 \div 4,0) \cdot 10^3 \frac{\text{ккал}}{\text{день}} \approx (116 \div 197) \text{ Вт}. \quad (4)$$

Согласно [4, 7], при холодном стрессе происходит всплеск тканевой биоэнергетики и уровень мощности тепловыделения может изменяться в десятки раз. Наоборот, низкие значения тепловыделения соответствуют некоторым формам гипобиоза [7].

При постоянном значении коэффициента теплопроводности  $k$  легко находится стационарное решение уравнения теплопроводности. В ядре человека ( $r < R$ ) температура максимальна и не зависит от радиуса:

$$T_1 = T_{out} + \frac{q_1}{2k} \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{k}{\lambda R} \right) (R_2^2 - R_1^2) + R_2^2 \ln \frac{R}{R_2} - R_1^2 \ln \frac{R}{R_1} \right). \quad (5)$$

В зоне с внутренними источниками тепла ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ):

$$T_2(r) = T_1 - \frac{q_1}{2k} \left( \frac{r^2 - R_1^2}{2} - R_1^2 \ln \frac{r}{R_1} \right). \quad (6)$$

В поверхностном слое кожи ( $R_2 \leq r \leq R$ ):

$$T_3(r) = T_1 - \frac{q_1}{2k} \left( (R_2^2 - R_1^2) \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{r}{R_2} \right) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (7)$$

Независимость температуры в ядре от координаты является следствием решения уравнения теплопроводности в стационарном случае при размещении источников тепла на периферии. Это обстоятельство и позволяет врачам справедливо утверждать об изотермичности ядра. Однако в нестационарном случае отклонения от изотермичности ядра вполне допустимы. Для параметров, использованных в расчетах, доля ядра составляла  $\approx 80\%$ .

Из точного решения могут быть выведены различные оценки. Так как это решение получено при постоянном значении коэффициента теплопроводности, при построении оценок следует использовать значение коэффициента теплопроводности из интервала от  $k_1$  до  $k_2$ . Из точного решения легко находятся характерные перепады температуры в поверхностных слоях:

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &\equiv T_3(R) - T_{out} = q_1 \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2\lambda R}, \\ \Delta T &\equiv T_1 - T_3(R) = \frac{q_1}{2k} (R_2^2 - R_1^2) \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{R}{R_2} - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Неравномерное размещение источников тепла почти в 5 раз уменьшает значение  $\Delta T$  по сравнению с равномерным размещением. При температуре воздуха  $T_{out}=20^\circ\text{C}$  и коэффициенте теплообмена  $\lambda < 9$  обнаженный человек в состоянии длительное время поддерживать температуру в центре тела, равную  $36,6^\circ\text{C}$ . Реальные значения  $\lambda$  могут быть выше. Особенно они велики при теплообмене в воде. Поэтому в расчетах при погружении человека в воду часто полагалось  $T(R) = T_{cold}$ , что соответствовало  $\lambda = \infty$ .

Из решения стационарной задачи следует, что человек сохранил бы температуру ядра в  $36,6^\circ\text{C}$  при помещении его ледяную воду, если бы интенсивность его тепловыделений увеличилась по сравнению со средним значением (4) в 6-10 раз. Кроме того, выясняется, что если бы система терморегуляции человека работала независимо от температуры его тела при нахождении в ледяной воде, температура ядра стремилась бы к стационарному значению в интервале от 3 до  $6^\circ\text{C}$ . Эти факты косвенно указывают на экстремальность условий нахождения человека в ледяной воде.

Решение эволюционного уравнения теплопроводности находилось методом сеток по явной схеме. Шаг по времени вычислялся по формуле, обеспечивающей устойчивость и второй порядок аппроксимации по времени. Используемое число интервалов ( $N \geq 500$ ) обеспечивало высокую точность расчетов. Расчеты выполнялись как для цилиндрической системы координат, так и для одномерного случая при замене  $r$  на  $x$  (см. рис. 2). Подробности алгоритма содержатся в [6].

#### 4. Результаты математического моделирования

Задача содержит большое число параметров. Перейдем к обсуждению результатов расчета для следующего набора параметров (расстояния указаны в сантиметрах, время – в минутах):

$$\begin{aligned}
 R &= 10, R_1 = 8,9, R_2 = 9,8, H = 165, \\
 t_0 &= 1, t_1 - t_0 = 15, t_{11} - t_1 = 6, t_{12} - t_{11} = 30, t_2 = 120, T_{cold} = 0^\circ\text{C}, \\
 T_{hot} &= 70^\circ\text{C}, k_q = 1, \lambda = 8, \lambda_c = \infty.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Зависимости температуры от времени в двух различных координатах тела для этих параметров изображены на рис. 3–4 (время указано в минутах). На рис. 3 представлена зависимость температуры от времени для  $x = R_1$  (11 мм от поверхностного слоя), а на рис. 4 представлена зависимость температуры от времени для  $x = 7$  см (3 см от поверхностного слоя). Заметно их подобие и существенное различие по глубине минимума.

Величина  $\delta T_*$  зависит от многих параметров. Увеличение размеров подкожного слоя, естественно, увеличивает возможности пловца на испытание холодом. К сожалению, при проведении экспериментов, обсужденных выше, подобного рода измерения не выполнялись. Возникает важный вопрос – какую глубину тела считать принадлежащей к "ядру" (ядро человека занимает до 90% всего объема)? В использованной постановке температура ядра не постоянна. Это соответствует реальной ситуации (неоднородность температуры ядра порядка  $0,2-0,6^\circ\text{C}$  была зафиксирована при операциях на "сухом" сердце [2]). Однако для уточнения цифровых данных требуется внести коррективы в постановку задачи. Особенно это касается параметров ядра – коэффициента теплопроводности и мощности тепловыделений.

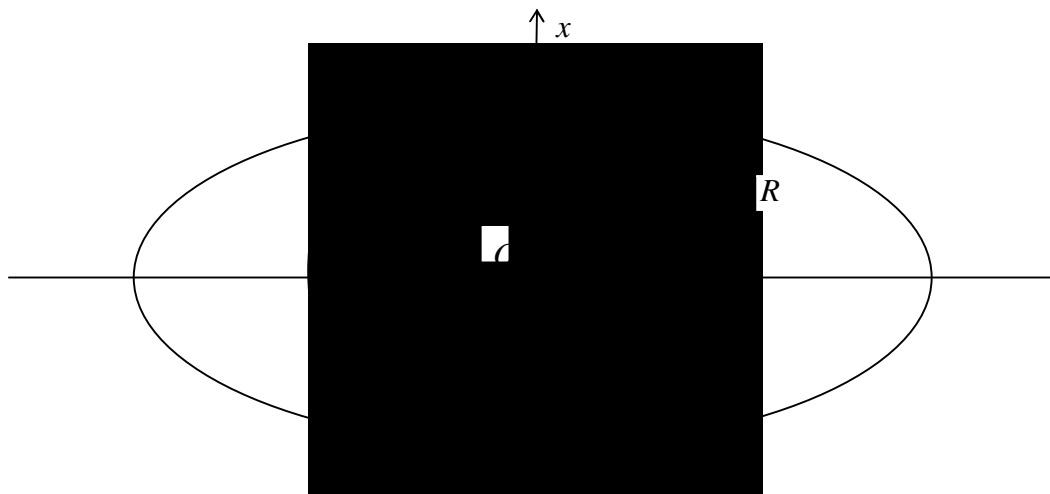


Рис. 2. Сечение тела в области талии и система координат

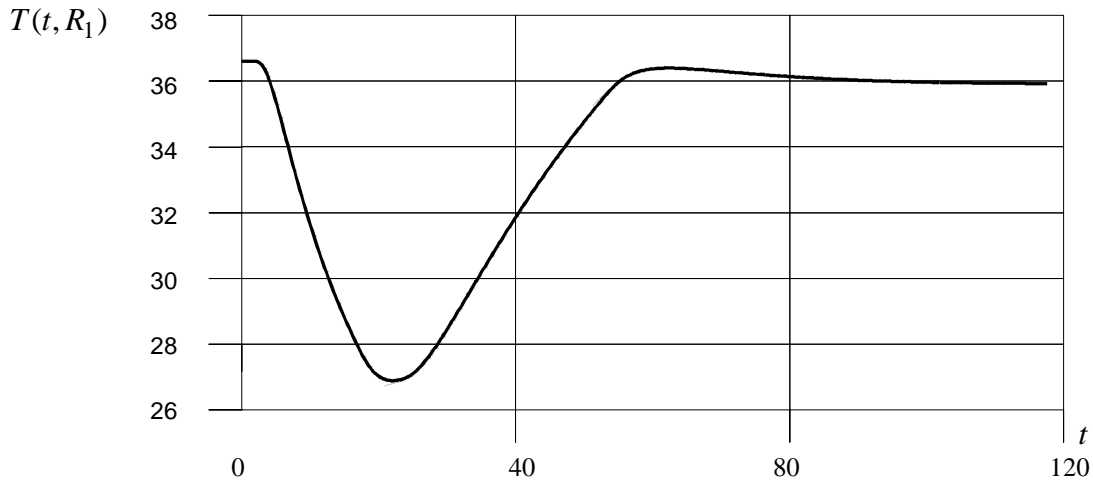


Рис.3. Зависимость температуры подкожного слоя от времени

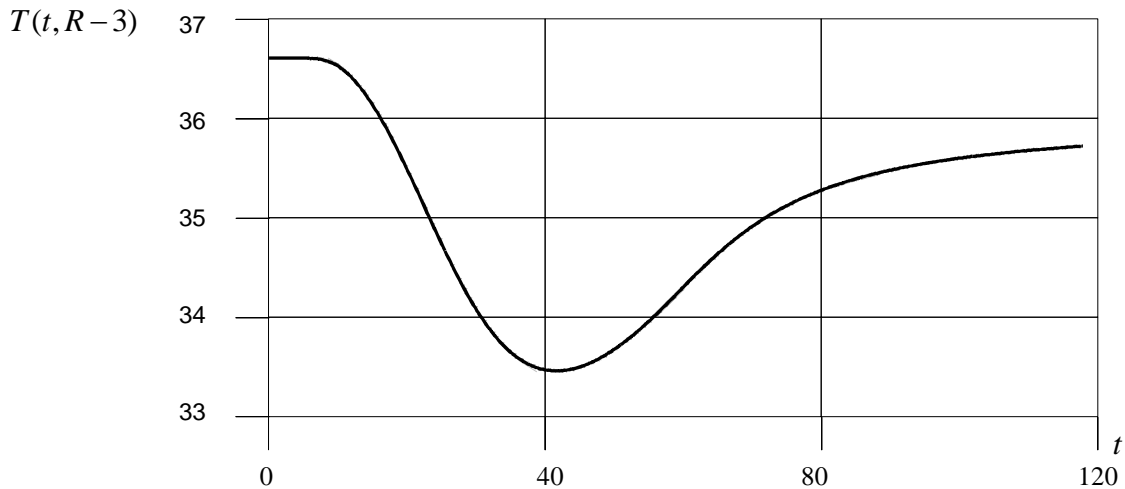


Рис.4. Зависимость температуры от времени на расстоянии 3 см от поверхностного слоя

Результаты, представленные на рис. 3–4, соответствовали интенсивности внутренних источников тепла, настроенных на равновесный вариант с температурой окружающей среды  $T_{out} = 20^{\circ}\text{C}$  и значением  $Q \approx 66\%$  от середины интервала, указанного в (4). Известно, что при понижении температуры поверхностного слоя организм настраивается на выделение большего количества тепла [4]. Механизм соответствующего регулирования изучен недостаточно. Испытана упрощенная модель, которая показывает характер влияния этого механизма на решение задачи теплопроводности. В соответствии с этой моделью мощность источников тепла увеличивалась при погружении пловца в воду. Зависимость температуры подкожного слоя от времени для параметров (9) при коэффициенте усиления  $k_q = 2$  представлена на рис. 5. Обращает на себя внимание небольшой подъем температуры в подкожном слое в первые минуты после погружения в ледяную воду (подобное поведение температуры в начальный момент охлаждения фиксировалось у некоторых пловцов). При выходе из воды температура равнялась  $29,2^{\circ}\text{C}$ , а минимальное значение температуры  $-28,0^{\circ}\text{C}$  (без усиления теплоотдачи было  $26,9^{\circ}\text{C}$ ) достигнуто через 5 минут после выхода из воды. После выхода из сауны рост температуры продолжался до значений выше нормы, так как усиление теплоотдачи не было выключено.

Основные расчеты выполнялись при задании температуры внешней поверхности кожи, равной температуре воды ( $\lambda_c = \infty$ ). Часть расчетов выполнялась при различных значениях параметра теплоотдачи  $\lambda_c$ . Расчеты показали, что отличие минимальной температуры в подкожном слое ( $x = R_1$ ) от предельной при  $\lambda_c = \infty$  равно  $\delta_1 \approx 280/\lambda_c$  °С. Допуская отклонение  $\delta_1$  менее  $0,3^\circ\text{C}$ , следует использовать в расчетах  $\lambda_c \geq 1000$ . В этом случае температура внешней поверхности пловца  $\approx 0,2^\circ\text{C}$ .

На рис. 6 представлен вычислительный эксперимент при отсутствии обогрева пловца в сауне. Условия соответствовали параметрам (9) с усилением теплоотдачи ( $k_q = 2$ ). Отличие, естественно, началось лишь с момента "входа" в сауну ( $t = 22$ ). Минимальное значение температуры незначительно (около  $0,3^\circ\text{C}$ ), но зато резко замедлился подъем температуры до нормального значения.

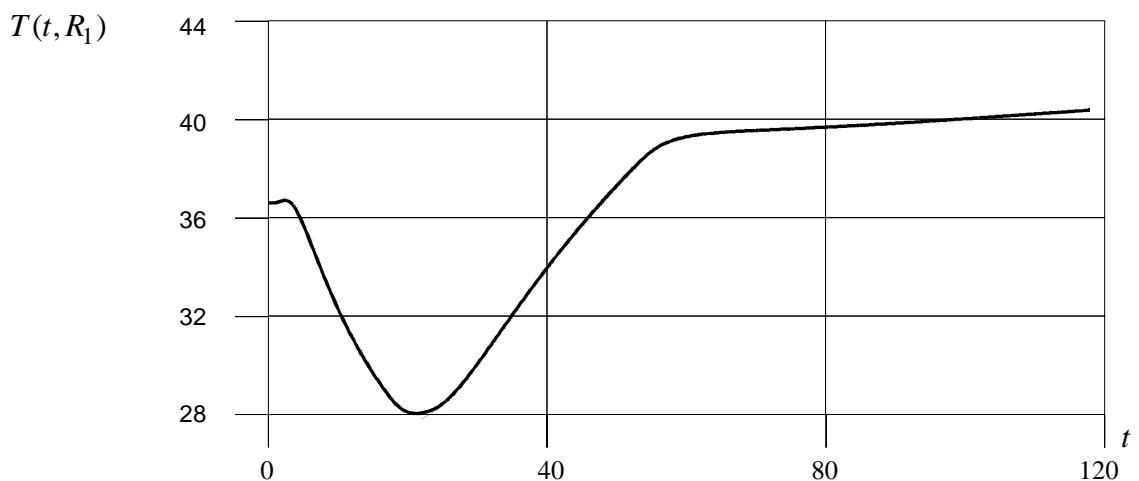


Рис. 5. Зависимость температуры подкожного слоя от времени для параметров (9) при усиленной теплоотдаче ( $k_q = 2$ )

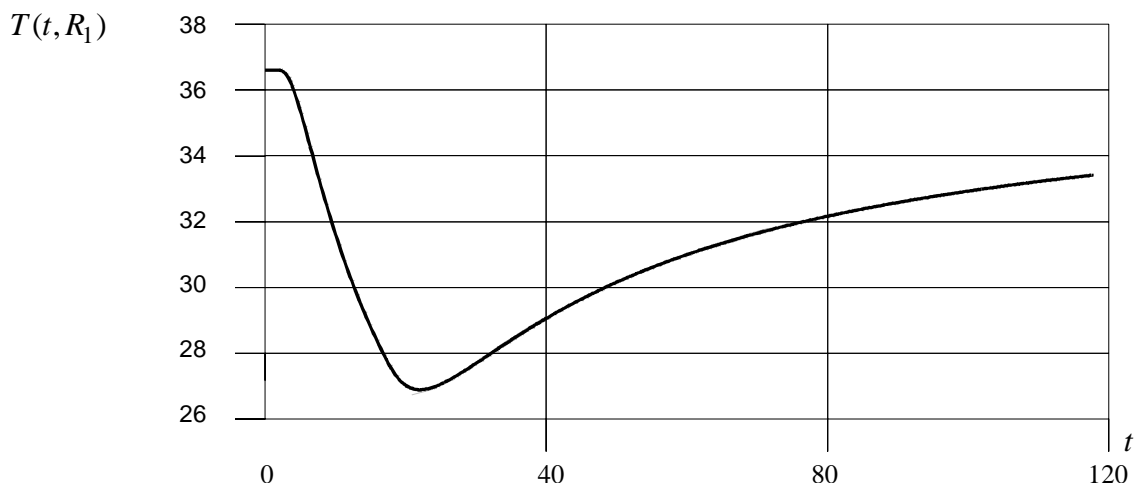


Рис.6. Зависимость температуры подкожного слоя от времени для параметров (9) при усиленной теплоотдаче с  $k_q = 2$ , но при отсутствии обогрева в сауне



## Выводы

1. Построена модель, позволяющая найти параметры охлаждения пловца в ледяной воде.
2. Представлено аналитическое решение задачи стационарной теплопроводности, позволяющее оценить параметры теплообмена.
3. Показано, что при погружении пловца в холодную воду организм начинает выделять больше тепла в 2-3 раза.
4. Расчетом обнаружено, что обогрев в сауне существенно сокращает время возвращения пловца к норме.
5. Определена глубина слоя, на котором максимальна величина понижения температуры после выхода из ледяной воды.
6. Указаны параметры ядра, требующиеся для уточнения модели.
7. Для большей адекватности модели необходимо ее усложнение, которое автоматически описывает механизм термостатирования температуры ядра при произвольных граничных условиях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств гранта РЕ-009-0 АФГИР и гранта РФФИ-Урал № 04-01-96029.

## Список литературы

1. *Иванов, К.П.* Основы энергетики организма (Теоретические и практические аспекты), Том.1, Общая энергетика, теплообмен и регуляризация / К.П. Иванов. – Л.: Наука, 1990. (*in Russian*)
2. *Литасова, Е.Е.* Клиническая физиология искусственной гипотермии / Е.Е. Литасова., Ю.А. Власов, Г.Н. Окунева, А.М. Караськов, В.Н. Ломиворотов. –Новосибирск: Наука, 1997. – 565 с. (*in Russian*)
3. Prediction of temperature profiles in the human skin and subcutaneous tissues / Pal D.S., Pal S.// J. Math. Biology. – 1990. – Vol. 28. – P.355-364.
4. *Бартон, А.* Человек в условиях холода. Физиологические и патологические явления, возникающие при действии низких температур: пер. с англ. / А. Бартон, О. Эдхолм. – М.: ИЛ, 1957. – 333 с. (*in Russian*)
5. Математическая модель Особенности длительного охлаждения в ледяной воде. / Е.Л. Тарунин., В.Г. Хоруженко // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. №1. – Пермь: ПГТУ, 2004. – С. 83-89. (*in Russian*)
6. *Тарунин, Е.Л.* Особенности длительного охлаждения в ледяной воде / Е.Л. Тарунин, В.Г. Хоруженко // Вестник ПГУ. Математика, механика, информатика. – Пермь: ПГУ, 2005. – С. 114-124. (*in Russian*)
7. *Тимофеев, Н.Н.* Гипобиоз и криобиоз. Прошлое, настоящее и будущее / Н.Н. Тимофеев. – М: Информ-Знание, 2005. – 256 с. (*in Russian*)

## MODELING OF COOLING IN ICE-COLD WATER

**E.L. Tarunin, V.G. Khorouzhenko (Russia, Perm)**

The results of mathematical modeling of the process of cooling of human body in ice-cold water are discussed. The model uses a non-stationary heat conduction equation with internal heat sources. The model does explain a significant part of results got as a result of immersion of swimmers («walruses») in ice-cold water during 15 minutes. The model shows the action of different parameters of the swimmers and re-warming in sauna. A preliminary use of the model is effected in [5, 6].

**Key words:** hypothermia, hypobiosis, mathematical modelling, heat conduction equation.

*Получено 25 августа 2005*