Российский журнал биомеханики, 2004, том 8, № 3: 19-29

Российский Журнал Биомеханики
www.biomech.ac.ru

УДК 531/534: [57+61]

БИОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СКЕЛЕТНО-МЫШЕЧНОЙ СИСТЕМЫ, ПОСТРОЕННАЯ БЕЗ СУБЪЕКТИВНЫХ КРИТЕРИЕВ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Г.Н. Колесников

Петрозаводский государственный университет, Россия, 185640, Петрозаводск, проспект Ленина, 33, e-mail: kgn@sampo.ru

Аннотация. Для построения биомеханических моделей скелетно-мышечных систем произвольного вида разработан подход, который не требует применения субъективно выбираемых критериев оптимальности при решении проблемы статической неопределимости. Предложена замкнутая система уравнений в виде соотношений конечных величин (внутренних и внешних сил, деформаций податливых компонентов и перемещений жестких звеньев). Рассмотрен пример. Применение разработанного подхода позволяет повысить эффективность биомеханических моделей в вычислительном отношении.

Ключевые слова: биомеханика, скелетно-мышечная система, математическая модель.

Введение

Необходимость построения адекватного математического описания биомеханических моделей скелетно-мышечных систем произвольного вида обусловлена потребностями многих областей человеческой деятельности. Примером может быть анализ движений человека и животных [1]. Очень часто такая необходимость обусловлена запросами травматологии в целях совершенствования методик лечения переломов и послеоперационной физиотерапии [2, 3]. В этом случае движения пациентов, как правило, достаточно медленные для того, чтобы можно было ограничить вопросы биомеханического моделирования задачами статики.

Очевидно, однако, что результаты решения задач статики можно использовать и при численном решении задач динамики, если движение рассматривать как упорядоченную во времени и пространстве очередность механических состояний объекта моделирования, учитывая при этом в соответствии с принципом Даламбера силы инерции. Одной из возможностей указанного упорядочения является использование метода конечных разностей с шагом по времени [4]. С учетом сказанного далее рассматривается подход к решению задачи моделирования скелетно-мышечной системы в статической постановке.

Предлагаемый подход не требует использования критериев оптимальности, которые применяются в многочисленных исследованиях при математическом описании биомеханических моделей скелетно-мышечных систем или их фрагментов исключительно для решения известных проблем избыточности и единственности.

Соответствующие обзоры работ о методах решения проблемы избыточности и библиографию можно найти в статьях [3, 5, 6]. Предлагаемый подход, не решая всех проблем, открывает новые возможности в проверке адекватности самих критериев оптимальности, а также некоторых других гипотез о закономерностях функционирования скелетно-мышечных систем [5].

Следует отметить, что один из рассмотренных в работе [5] подходов к построению биомеханических моделей скелетно-мышечных систем также не требует использования субъективных критериев оптимальности. Однако в математическом описании биомеханической модели скелетно-мышечной системы использованы уравнения, записанные в дифференциальной форме. В этом случае появляются значительные сложности при формировании уравнений и затруднения при решении системы дифференциальных уравнений.

Подобных затруднений удается избежать, если воспользоваться аналогичными уравнениями, но записанными в виде соотношений конечных величин [7]. Развитию именно этого направления в моделировании скелетно-мышечных систем посвящается дальнейшее изложение.

Методология исследования

Принимая во внимание опорную и двигательную функции скелетно-мышечной системы, можно рассматривать эту систему на достаточно малом отрезке времени как несущую конструкцию, которая сопротивляется воздействию веса тела и других сил, включая силы инерции. Параметры состояния системы *in vivo* непрерывно изменяются, система является нелинейной. Предполагается, что система исследуется на отрезке времени, который достаточно мал для того, чтобы зависимости механических параметров состояния исследуемого объекта живой природы могли быть аппроксимированы линейными соотношениями.

Физиологическая активность систем жизнеобеспечения позвоночного порождает возмущения (см., например, [8]), которым в соответствии с законами механики отвечает некоторый (неизвестный) набор параметров состояния биомеханической модели. В физиологической норме центральная нервная система управляет активацией мышц таким образом, что обеспечивается как поддержание позы, так и движение позвоночного. При этом на протяжении всего периода жизнедеятельности организма поддерживается динамический баланс внешних и внутренних сил. При всяком изменении равновесия центральная нервная система с помощью каналов прямой и обратной связи пытается создать такую активацию мышц, чтобы в сухожилиях, присоединенным к костям опорно-двигательного аппарата, появились силы, способные перевести звенья скелета в требуемое состояние. Появление сил в податливых компонентах сопровождается изменением их длины.

В представленном исследовании полное изменение длины сухожильно-мышечного комплекса *in vivo* в текущем его состоянии рассматривается как сумма активной и пассивной составляющих. Пассивная составляющая обусловлена податливостью сухожилий и других мягких тканей. В данном случае можно провести аналогию с моделями механических свойств волокон скелетной мышцы [9], в которых пассивное изменение длины волокна *in vivo* обусловлено, в частности, растяжимостью актиновых нитей. Активную деформацию можно определить как принудительное изменение длины вследствие мышечного сокращения, что необходимо для движения звеньев скелета.

Полное изменение длины (а, значит, натяжения и соответствующего усилия) сухожильно-мышечного комплекса как активного элемента контролируется центральной нервной системой. Однако изменение длины того же комплекса как пассивного элемента зависит от текущего значения силы и подчиняется законам физики. По каналам обратной связи информация о величине деформаций поступает в центральную нервную систему и учитывается при формировании очередных команд управления. Такой контроль осуществляется центральной нервной системой с помощью рецепторов Гольджи и других подсистем управления [10].

В представленной статье центральная нервная система, если и упоминается, то лишь как неизвестное устройство управления с известным результатом на выходе. Результатом управления является определенная активация системы мышц в заданной конфигурации скелетной системы. Далее рассматриваются только некоторые биомеханические аспекты моделирования скелетно-мышечных систем. Движение биомеханической модели, а также вклад мышц-антагонистов в данной статье не исследуются, по этой причине активные деформации, если и упоминаются, то считаются равными нулю.

С учетом сказанного скелетно-мышечная система в процессе движения позвоночного может рассматриваться как упорядоченный во времени и пространстве набор состояний некоторой несущей конструкции с управляемыми параметрами: (1) жесткостью и натяжением сухожильно-мышечных комплексов; (2) контролируемыми геометрическими параметрами (степенями свободы) звеньев скелетной системы.

В данной работе исследуется задача определения сил в сухожилиях скелетных мышц и реакций суставов по заданной конфигурации звеньев скелета. Известные методы решения задач такого класса представлены, например, в статьях [3, 5]. Основная проблема, которая до настоящего времени не имеет удовлетворительного решения, вызвана избыточностью [3] или, что в данном случае одно и то же, статической неопределимостью [6, 11] скелетно-мышечной системы. Источник этой проблемы в том, что число мышц «избыточно», т. е. число мышц больше числа степеней свободы скелетной системы и, как следствие, в системе уравнений равновесия число неизвестных превышает число уравнений. По этой причине система уравнений равновесия имеет бесчисленное множество решений, из которых в каждый момент времени осуществляется только одно. При математическом моделировании это единственное решение определяется минимизацией некоторого критерия, «выбор которого достаточно субъективен и существенно влияет на решение» [11]. Описание известных критериев с указанием области их применения можно найти, например, в статьях [3, 5]. В частности, решение простейшего примера с использованием критерия минимума максимального мышечного усилия приведено в статье [6].

Перейти от субъективно выбираемого критерия к объективно существующим зависимостям можно, если принять во внимание указанное выше изменение длины каждого сухожильно-мышечного комплекса как пассивного элемента *in vivo*. Сила связана с пассивным изменением длины *in vivo* некоторой зависимостью, точный вид которой неизвестен. Однако при решении задачи прогнозирования внутренних сил по заданной конфигурации скелетной системы можно указанные зависимости аппроксимировать линейными соотношениями – аналогами закона Гука. На приемлемость такой аппроксимации указывает анализ экспериментальных данных, например, [12]. Кроме того, нелинейные зависимости могут быть аппроксимированы, например, кусочно-линейными функциями, каждая из которых соответствует указанному выше достаточно малому отрезку времени.

Исследуемая биомеханическая модель представляет собой, как обычно, систему жестких звеньев (костей), которые соединены друг с другом идеальными шарнирами и податливыми компонентами (сухожильно-мышечными комплексами). Костная ткань является существенно более жестким материалом по отношению к тканям сухожильно-мышечных комплексов [13, 14], поэтому звенья скелета рассматриваются в биомеханической модели как недеформируемые компоненты. Необходимые данные о свойствах тканей сухожильно-мышечных комплексов достаточно полно представлены в литературе [1, 3, 15].

С точки зрения механики очевидно, что в любой момент времени должны выполняться три группы необходимых условий, а именно, (1) условия равновесия внешних и внутренних сил, (2) условия совместности деформаций податливых компонентов и перемещений жестких звеньев, (3) некоторые физические соотношения между силами в податливых компонентах и изменением их длины как пассивных элементов. Такими соотношения могут быть представлены законом Гука.

С опытом применения в биомеханике трех групп перечисленных соотношений, записанных в дифференциальной форме, можно ознакомиться по статье [5]. В данной статье используются аналоги этих уравнений, записанные в виде соотношений конечных величин.

Эти условия могут быть дополнены другими соотношениями, однако ни одно из них не может быть отброшено.

С точки зрения механики очевидно, что сухожильно-мышечные комплексы должны рассматриваться как односторонние связи, поскольку они способны сопротивляться только растяжению и, подобно гибким нитям, выключаются из работы при появлении в них сил осевого сжатия. Заметим, что в физиологически нормальном состоянии сухожильно-мышечные комплексы даже в состоянии позвоночного покоя слегка растянуты [16], т. е. для усилия Φ_i в сухожильно-мышечном комплексе i физически обусловлено неравенство $\Phi_i > 0$. В математической модели его можно заменить нестрогим неравенством вида $\Phi_i \geq 0$.

При биомеханическом моделировании необходим учет и других односторонних связей. Так, движение позвоночного возможно, если имеется опорная поверхность (грунт, основание), т.е. имеются односторонние связи, сопротивляющиеся надавливанию и не препятствующие перемещениям в противоположном направлении.

Таким образом, указанные выше три группы условий должны быть дополнены системой неравенств, отражающих условия функционирования односторонних связей. В итоге приходим к выводу, что в адекватных моделях скелетно-мышечных систем могут быть использованы результаты, полученные в теории статически неопределимых механических систем с односторонними связями [17, 18, 19]. Принимая во внимание известное правило знаков для реакций односторонних связей [17], отметим, что особенности функционирования механических систем с такими связями определяются тем обстоятельством, что для односторонней связи i возможны два состояния: «включено» (тогда $\Phi_i > 0$) и «выключено» (тогда $\Phi_i = 0$). Таким образом, для такой связи всегда выполняется нестрогое неравенство $\Phi_i \geq 0$. Если в механической системе имеется n односторонних связей, то число возможных состояний системы равно 2^n. Учет данного обстоятельства еще более усложняет рассматриваемую задачу построения адекватной модели скелетно-мышечной системы.

Математическая модель

Известно, что механическая система с односторонними связями может рассматриваться как конструкция с обычными двухсторонними связями, если односторонние связи находятся в состоянии «включено» [17]. С учетом данного обстоятельства методы моделирования механических систем с податливыми односторонними связями базируются на использовании результатов, полученных в теории систем с двусторонними связями [18]. Запишем в векторно-матричной форме уравнения равновесия внешних $\mathbf{P}$ и внутренних $\mathbf{\Phi}$ сил

$$\mathbf{C\Phi}+\mathbf{P}=\mathbf{0}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{C}$ – матрица известных коэффициентов уравнений равновесия.

Условия совместности неизвестных (пассивных) деформаций $\mathbf{D}$ и искомых перемещений жестких компонентов $\mathbf{U}$ имеют вид

$$\mathbf{C}^T\mathbf{U}=\mathbf{D}_0-\mathbf{D}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{D}_0$ – вектор, элементами которого являются начальные деформации податливых компонентов модели. С точки зрения механики уравнения (2) отражают геометрические аспекты задачи. Заметим, что начальные деформации $\mathbf{D}_0$ обусловлены мышечным (активным) сокращением, контролируемым центральной нервной системой, и, таким образом, уравнение (2) отражает в определенной мере конечный результат не только механического воздействия, но и волевого воздействия. Итоговый результат волевого управления ограничен физиологически допустимыми значениями мышечного сокращения и, если эти значения известны, может быть определен как решение рассматриваемой системы уравнений. Если определяются силы по фиксированной конфигурации скелетной системы и не учитывается работа мышц-антагонистов, то можно принять $\mathbf{D}_0=\mathbf{0}$. Именно такой случай, как отмечено выше, рассматривается в данной статье.

Зависимости усилий в податливых компонентах модели с учетом пассивных деформаций этих компонентов представим в виде линейных соотношений по закону Гука:

$$\mathbf{SD}=\mathbf{\Phi}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{S}$ – симметричная положительно определенная матрица, элементы которой представляют жесткости податливых компонентов механической модели. В рассматриваемом случае податливые компоненты представлены одномерными компонентами и поэтому матрица $\mathbf{S}$ является диагональной.

Выразим $\mathbf{D}$ из (2) и подставим в (3):

$$\mathbf{\Phi}=\mathbf{S}(\mathbf{D}_0-\mathbf{C}^T\mathbf{U}). \qquad (4)$$

Подставив выражение для $\mathbf{\Phi}$ из соотношения (4) в формулу (1), получим

$$\mathbf{CS}(\mathbf{D}_0-\mathbf{C}^T\mathbf{U})+\mathbf{P}=\mathbf{0}. \qquad (5)$$

Таким образом,

$$\mathbf{RU}=\mathbf{P}+\mathbf{CSD}_0, \qquad (6)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{CSC}^T$ – матрица жесткости. Если модель в рассматриваемом состоянии выполняет опорную функцию (т. е. играет роль несущей конструкции), то система уравнений (6) имеет единственное решение

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{CSD}_0)\,. \qquad (7)$$

Подставив найденные значения линейных и угловых перемещений жестких звеньев (7) в уравнение (4), найдем единственно возможный набор сил $\mathbf{\Phi}$ в компонентах модели. Если среди найденных сил в сухожильно-мышечных комплексах модели не будет отрицательных (т. е. вызывающих осевое сжатие), то задача решена. Иначе необходимо найти решение, отвечающее не только уравнениям (1) – (3), но и условиям в виде неравенств $\Phi_i \geq 0$, $i = 1,...,m$, где m – число сухожильно-мышечных комплексов, принятых во внимание в биомеханической модели. С точки зрения механики это означает, что необходимо рассмотреть биомеханическую модель как конструкцию с односторонними связями, о чем говорилось выше.

Задача определения сил в конструкциях с односторонними связями сводится к поиску координат точки минимума функции энергии. Соответствующие методы решения предложены в работах [18, 19, 23]. Заметим, что минимум потенциальной энергии деформации может рассматриваться в качестве критерия оптимальности, однако этот критерий объективно обусловлен, не зависит от нашего сознания и его применение к учету пассивных деформаций сухожильно-мышечных комплексов представляется правомерным в данной модели.

Задача определения сил в конструкции с односторонними связями может быть сведена к серии линейных расчетов с использованием формул (7) и (4) по методу последовательного выключения связей [24].

Как отмечено выше, в рассматриваемой модели принято во внимание, что центральная нервная система на протяжении всей жизни позвоночного оказывает управляющее воздействие через согласованное натяжение и расслабление мышц $\mathbf{D}_0$. Если воздействие $\mathbf{D}_0$ формируется в процессе управления по отклонениям, то в биомеханической модели элементы вектора $\mathbf{D}_0$, а следовательно $\mathbf{U}$ (7) и $\mathbf{\Phi}$ (4), не являются строго постоянными величинами. При этом каждому набору значений элементов вектора $\mathbf{D}_0$ будет соответствовать единственное решение.

В качестве исходных данных для вычислений по рассмотренной методике необходимы жесткости сухожильно-мышечных комплексов (или их соотношение, если интересоваться только внутренними силами). Аналогичная проблема появляется и при расчете стержневых статически неопределимых конструкций.

В простейшем случае, если речь идет о прогнозировании внутренних сил по известной конфигурации скелетной системы и при известных внешних силах, и если не принимаются во внимание усилия мышц-антагонистов, можно считать, что $\mathbf{D}_0 = \mathbf{0}$.

Адекватность результатов математического моделирования с использованием представленного концептуального подхода подтверждена при сопоставлении результатов вычислений [25] и данных телеметрических измерений сил в тазобедренных суставах пациентов [26].

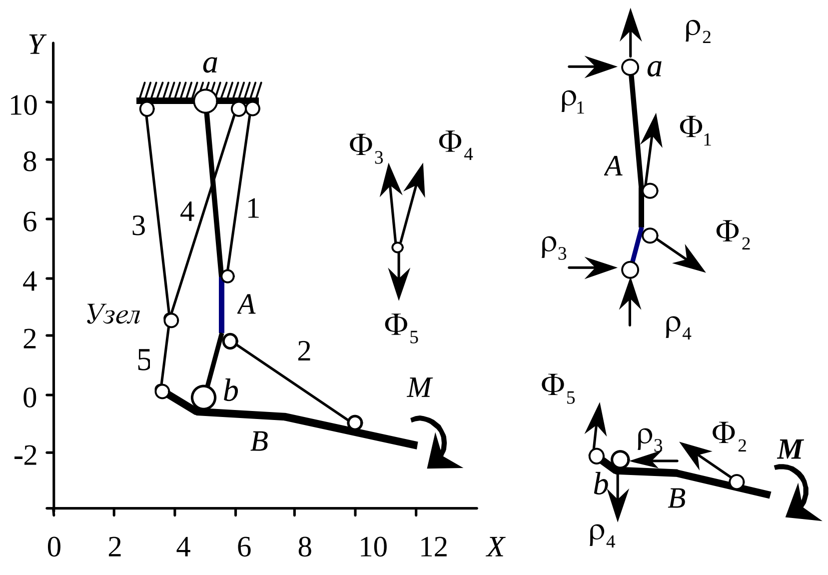

Рис. Модель с четырьмя степенями свободы, две из которых принадлежат узлу. Компоненты 1 и 2 моделируют односуставные мышцы. Компоненты 3, 4 и 5 образуют двухсуставной двуглавый комплекс. Величина момента M=10

Таблица

Компонент	Проксимальная точка		Дистальная точка		Жесткость
	X	Y	X	Y	$\frac{EA}{L}$
A	5	10	5	0	∞
1	6,5	10	5,7	4	200
2	5,7	1,8	10	-1,3	180
3	3	10	3,8	2,5	100
4	6	10	3,8	2,5	100
5	3,8	2,5	3,5	0	400

Пример

Рассмотрим пояснительный пример (см. рис.). Геометрические параметры рассматриваемой абстрактной плоской модели представлены в таблице. Модель состоит из двух недеформируемых звеньев, двух суставов и пяти условных сухожильно-мышечных комплексов. Суставные хрящи в суставах имитируем податливыми линейными компонентами, реакции которых обозначены на рисунке как ρ_i $(i = 1, \ldots, 4)$.

Жесткости всех податливых компонентов модели представим элементами диагональной матрицы $\mathbf{S}$: $\mathbf{S} = diag[200\ 180\ 100\ 100\ 400\ 1000\ 1000\ 1000\ 1000\ ]$.

Вектор нагрузки имеет вид $\mathbf{P} = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \text{-}10\ ]^T$.

Перемещения узла и жестких звеньев запишем в вектор $\mathbf{U}$: $\mathbf{U} = \left[U_{kx}\ U_{ky}\ U_{Ax}\ U_{Ay}\ U_{A\varphi}\ U_{Bx}\ U_{By}\ U_{B\varphi}\right]^T$, искомые силы (рисунок) запишем в вектор $\mathbf{\Phi} = \left[\Phi_1\ \ldots\ \Phi_5\ \rho_1\ \ldots\ \rho_4\right]^T$.

Для узла составим, как обычно, два уравнения равновесия ($\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$), для каждого из жестких звеньев – три уравнения равновесия, в том числе уравнения $\Sigma M_a = 0$ для звена A и $\Sigma M_b = 0$ для звена B (рисунок). Вычислив коэффициенты системы уравнений равновесия, сформируем матрицу $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{-}0{,}106 & 0{,}281 & \text{-}0{,}119 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}994 & 0{,}960 & \text{-}0{,}993 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}132 & 0{,}811 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}991 & \text{-}0{,}585 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1{,}487 & 6{,}242 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & \text{-}0{,}811 & 0 & 0 & 0{,}119 & 0 & 0 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 0{,}585 & 0 & 0 & 0{,}993 & 0 & 0 & 0 & \text{-}1 \\ 0 & 1{,}869 & 0 & 0 & \text{-}1{,}489 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее найдем матрицу жесткости $\mathbf{R} = \mathbf{CSC}^T$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 14{,}73 & 63{,}78 & 0 & 0 & 0 & \text{-}5{,}678 & \text{-}47{,}32 & 70{,}98 \\ 63{,}78 & 585{,}3 & 0 & 0 & 0 & \text{-}47{,}32 & \text{-}394{,}3 & 591{,}5 \\ 0 & 0 & 2122 & \text{-}59{,}19 & 10951 & \text{-}1118 & 85{,}39 & 273 \\ 0 & 0 & \text{-}59{,}18 & 2258 & \text{-}362{,}3 & 85{,}39 & \text{-}1062 & \text{-}196{,}8 \\ 0 & 0 & 10951 & \text{-}362{,}3 & 107456 & \text{-}10911 & 657{,}1 & 2101 \\ \text{-}5{,}678 & \text{-}47{,}32 & \text{-}1118 & 85{,}39 & \text{-}10911 & 1124 & \text{-}38{,}07 & \text{-}394{,}7 \\ \text{-}47{,}32 & \text{-}394{,}3 & 8539 & \text{-}1062 & 657{,}1 & \text{-}38{,}07 & 1456 & \text{-}394{,}7 \\ 70{,}98 & 591{,}5 & 273 & \text{-}196{,}8 & 2101 & \text{-}343{,}9 & \text{-}394{,}7 & 1516 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание, что в данном примере $\mathbf{D}_0 = \mathbf{0}$, найдем перемещения узла и жестких звеньев $\mathbf{U}$ (7):

$$\mathbf{U} = [0{,}013\ 0{,}014\ 0{,}00046\ 0{,}0032\ \text{-}0{,}023\ \text{-}0{,}23\ 0{,}002\ \text{-}0{,}033]^T.$$

Эти перемещения зависят от пассивных деформаций компонентов модели.

Зная $\mathbf{U}$, вычислим вектор сил (4):

$$\mathbf{\Phi} = [6{,}13\ 3{,}00\ \text{-}1{,}28\ \text{-}1{,}73\ \text{-}2{,}95\ \text{-}0{,}46\ \text{-}3{,}16\ \text{-}2{,}79\ \text{-}1{,}17]^T.$$

По физическому смыслу задачи реакции суставов могут в данной модели быть как отрицательными, так и положительными. Однако силы в сухожильно-мышечных комплексах, представленные пятью первыми элементами вектора $\mathbf{\Phi}$, отрицательными быть не могут. Единственное решение, отвечающее перечисленным выше условиям, может быть найдено с использованием методов механики систем с односторонними связями [18, 23]. Применяя известный метод последовательного выключения связей [24, 25], «выключаем» связь, реакция которой имеет наибольшее по модулю отрицательное значение ($\Phi_5 = -2{,}95$). Для этого достаточно заменить значение $S_{55} = 1000$ в матрице $\mathbf{S}$ небольшим числом. Такой прием физиологически приемлем, используется, например, в работе [5]. Если говорить кратко, то правомерность такого приема объясняется тем, что, как уже отмечалось, в физиологически нормальной системе сухожильно-мышечные комплексы всегда растянуты в большей или меньшей степени [16]. Соответственно изменяется и жесткость S_{ii} $(i = 1,\ldots,5)$, которая может быть достаточно малой, но не равной нулю (жесткость и натяжение скелетных мышц равны нулю, например, в состоянии обморока [16]).

Принимая $S_{55} = 10^{-4}$ и повторяя вычисления, получим в итоге

$$\mathbf{\Phi} = [6{,}73\ \ 5{,}35\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -0{,}89\ \ -6{,}67\ \ -4{,}34\ \ 3{,}13]^T .$$

Здесь $\Phi_i \approx 0$, $(i = 3,\ 4,\ 5)$, что на уровне математической модели может быть интерпретировано, как $\Phi_i = 0$.

Как видим, найденные значения сил в сухожильно-мышечных комплексах модели отвечают статическим и кинематическим условиям, а также физиологически предопределенному условию неотрицательности. Задача решена.

Как известно, внутренние силы в статически неопределимых механических системах зависят от соотношения жесткостей элементов системы.

Заметим, что в обычно используемой модели сустава как идеального шарнира не принимается во внимание податливость суставных хрящей, т. е. жесткость хрящей считается бесконечно большой (исключение составляют конечно-элементные модели отдельно взятых суставов, однако эти модели относятся к другому классу «локальных» моделей, не взаимодействующих с другими компонентами биомеханической системы). В рассмотренной выше модели жесткость суставных хрящей может задаваться в исходных данных в пределах физиологически допустимых значений (как в норме, так и при патологиях). Результаты вычислений с другими значениями жесткости суставных хрящей $S_{66},\ldots,\ S_{99}$ указывают, что эти значения могут существенно влиять на силы во всех компонентах биомеханической модели. Из этого наблюдения следует вывод о возможности применения предложенного подхода при моделировании скелетно-мышечных подсистем пациентов с некоторыми заболеваниями суставов, при которых изменяются физико-механические свойства суставных хрящей и (или) связок, а также пациентов с имплантированными искусственными суставами или эндопротезами с целью выработки рекомендаций по профилактике осложнений и оптимизации параметров имплантируемых устройств.

Изменение соотношения жесткостей $S_{11} : S_{22} :\ \ldots\ : S_{55}$ сухожильно-мышечных комплексов также влияет на перемещения $\mathbf{U}$ и внутренние силы $\mathbf{\Phi}$ модели. Это соотношение зависит от активации мышц и изменяется в процессе движения позвоночного. Рассмотренный подход позволяет оценить влияние изменения уровня активации мышц на внутренние силы $\mathbf{\Phi}$ и изучить соответствующие закономерности. В частности, возможна постановка и решение задачи об оптимальной жесткости (активации и массе) мышц для различных фаз некоторых движений и проверка соответствующих гипотез (ведь мышечные системы штангиста и теннисиста имеют как сходство, так и различия).

Очевидно, оптимальные для повседневных движений соотношения физиологического сечения мышц выработаны в ходе эволюции. Поэтому при моделировании повседневных движений могут быть использованы соответствующие биомеханические, анатомические и физиологические данные о компонентах скелетно-мышечной системы.

Тот факт, что для вычислений по рассмотренному алгоритму необходимы жесткости S_{ii}, не является недостатком модели. Эти жесткости могут назначаться приближенно и уточняться при повторных вычислениях, по аналогии с моделированием обычных статически неопределимых конструкций.

Отметим в заключение, что если число сухожильно-мышечных комплексов достаточно велико, то может потребоваться продолжение однотипных вычислений по рассмотренному на примере шаговому алгоритму. Если на некотором шаге будет получена вырожденная матрица $\mathbf{R}$, то это будет означать, что опорная функция моделируемой скелетно-мышечной системы (или подсистемы) утрачена.

Выводы

Концепция представленного подхода не исключает применения критериев оптимальности. Однако теперь эти критерии не требуются в качестве дополнительных соотношений для решения проблемы избыточности в биомеханике скелетно-мышечных систем. Очевидно, выбор критерия оптимальности предопределяется целью движения. Вероятно, эти критерии различны для стайера и для спринтера. Можно предположить, что эти критерии неодинаковы при выполнении быстрых и медленных движений, а также движений, требующих максимальной скорости и максимальной силы. Критерии оптимальности формируются также эволюционно [22].

С учетом сказанного выше сами критерии оптимальности могут теперь выступать в роли объекта исследования. Тем самым открываются новые возможности проверки некоторых гипотез о функционировании скелетно-мышечных систем и эволюции позвоночных. Эти гипотезы формулируются на стыке биомеханики, физиологии, анатомии и других наук, однако их обсуждение выходит за рамки возможностей одного специалиста и представленного исследования. Вместе с тем очевидно, что полученные результаты могут быть использованы в совместных исследованиях специалистов по биомеханике и смежных областей знания. Такие совместные исследования могут выполняться, например, в интересах совершенствования методик лечения и профилактики повреждений скелетно-мышечной системы.

Список литературы

1. A computational framework for simulating and analyzing human and animal movement /S. L. Delp, J. P. Loan // Computing in Science and Engineering. – 2000. –V. 2. –P. 46 – 55.
2. Musculoskeletal loading and its implication for clinical practice: February 2000, Charite, Berlin /G. N. Duda, N. P. Haas, G. Bergmann // Journal of Biomechanics. – 2001. – V. 34, No. 7. — P. 837.
3. *Зациорский, В. М.* Нахождение усилий мышц человека по заданному движению / В. М. Зациорский, Б. И. Прилуцкий // Современные проблемы биомеханики: Сб. научн. тр. Вып 7. Биомеханика мышц и структура движений /ИПФ РАН; Н. Новгород. –1992. С. 81 – 123.
4. *Бидерман, В. Л.* Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
5. A comparison of models explaining muscle activation patterns for isometric contractions /B. M. van Bolhuis, CCAM Gielen // Biological Cybernetyc. –1999. –Vol. 81. –P. 249 – 261.
6. Muscle recruitment by the min/max criterion – a comparative numerical study / J. Rasmussen, M. Damsgaard, M. Voigt // Journal of Biomechanics. – 2001. – V. 34, No. 3. – P. 409 – 415.
7. *Колесников, Г. Н.* Интервальная оценка усилий в задаче компьютерного моделирования нагруженного состояния нижней конечности / Г.Н. Колесников // Вычислительная механика и

современные прикладные программные средства: Тез. докл. X междунар. конф. (Переславль-Залесский, 7 – 12 июня 1999 г.) – Переславль-Залесский, 1999.
8. Hemodynamics as a possible internal mechanical disturbance to balance /S. Conforto, M. Schmid, V. Camomilla, T. D'Alessio, A. Cappozzo // Gait and Posture. – 2001. –Vol. 14. No. 1. – P. 28 – 35.
9. Математическая модель механических свойств волокон скелетной мышцы с учетом растяжимости актиновых нитей /Д. А. Шестаков, А. К. Цатурян // Биофизика. –1998. – Т. 43. №. 2. – С. 329 – 334.
10. *Гранит, Р.* Основы регуляции движений / Р. Гранит. – М.: Мир, 1973. –337 с.
11. Dynamics of human lower extrimity in a back lying position / Yu.V. Akulich, A.Yu. Akulich, R.M. Podgaets, M.N. Toropitsin // Russian Journal of Biomechanics. – 2003. –V. 7. No. 3. –P. 41 – 58.
12. *Хилл, А.* Механика мышечного сокращения. Старые и новые опыты / А. Хилл. – М.: Мир, 1972. –184 с.
13. *Кнетс, И.В.* Деформирование и разрушение твердых биологических тканей / И.В. Кнетс, Г.О. Пфафрод, Ю.Ж. Саулгозис. – Рига: Зинатне, 1980. –319 с.
14. *Янсон, Х.А.* Биомеханика нижней конечности человека / Х.А. Янсон. – Рига: Зинатне, 1975. –324 с.
15. Tensile properties of the in vivo human gastrocnemius tendon /C. N. Maganaris, J. P. Paul // Journal of Biomechanics. – 2002. – V. 35. – P. 1639 – 1646.
16. *Бернштейн, Н.А.* Биология и физиология движений / Н.А. Бернштейн. – М., 1997. –608 с.
17. *Рабинович, И.М.* Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями / И.М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1975. –144 с.
18. *Перельмутер, А.В.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Киев: Изд-во «Сталь», 2002. – 600 с.
19. *Гордеев, В.Н.* Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования /В.Н. Гордеев, А.В. Перельмутер // Исследования по теории сооружений. Вып.15. – М.: Стройиздат, 1967. – С. 208 – 212.
20. *Гранит, Р.* Основы регуляции движений / Р. Грант. – М.: Мир, 1973. –337 с.
21. *Самарский, А.А.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры 2-е изд., исправ. и доп. – /А.А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
22. *Образцов, И.Ф.* Оптимальные биомеханические системы /И.Ф. Образцов, М. А. Ханин. – М.: Медицина, 1989. –272 с.
23. *Панагиотопулос, П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. –М.: Наука, 1989. – 494 с.
24. *Колесников, Г.Н.* Очередность перехода односторонних связей упругих механических систем в действительное состояние / Г.Н. Колесников // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Метод граничных и конечных элементов: Тр. XX междун. конф.. – С.-Пб., 2004. – Т.3.
25. *Колесников Г.Н.* Дискретные модели механических и биомеханических систем с односторонними связями / Г.Н. Колесников. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2004. –204 с.
26. Hip joint forces during walking and running, measured in two patients /G. Bergmann, F. Graichen, A. Rohlmann // Journal of Biomechanics. – 1993. – V. 26. – P. 969 – 990.

BIOMECHANICAL MODEL OF THE MUSCULOSKELETAL SYSTEM CONSTRUCTED WITHOUT SUBJECTIVE OPTIMALITY CRITERIA

G. N. Kolesnikov (Petrozavodsk, Russia)

An approach for the construction of the biomechanical models of the musculoskeletal system of an arbitrary kind is elaborated. This approach does not require the use of subjectively chosen criteria in order to solve the problem of static indeterminacy. The author suggests a self-contained system of equations in the form of the correlation of finite quantities (internal and external forces, the deformations of compliant components, and the displacements of rigid links). An example is analyzed. The use of the approach enables to improve the efficiency of biomechanical models in computation

Key words: biomechanics, muskuloskeletal system, mathematical model.

Получено 15 августа 2004