

УДК 531/534:57+612.7

НОВЫЙ МЕТОД ОБРАБОТКИ ВИДЕОЗАПИСЕЙ ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНОВ И СПОРТИВНЫХ СНАРЯДОВ

Р.Н. Рудаков

Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, e-mail: rrn@theormech.pstu.ac.ru

Аннотация. Предлагаемый метод обработки видеозаписей основан на решении краевых задач спортивных движений. Он позволяет сохранить ту точность, которая имела место при проведении эксперимента. Применение указанного метода проиллюстрировано на примере сложного движения мяча. Показано, что его аэродинамические коэффициенты можно определить путем решения краевой задачи с обыкновенными дифференцированными уравнениями. Это существенно повышает точность обработки результатов видеозаписи спортивных движений по сравнению с прежними методами определения аэродинамических коэффициентов.

Ключевые слова: спортивный снаряд, аэродинамические коэффициенты, краевая задача.

Введение

При движении тел в сплошной среде на них действуют силы давления со стороны этой среды. При движении тел в воздухе возникают действующие на них силы давления, которые называются аэродинамическими силами. Главный вектор аэродинамических сил, действующих на тело, принято разлагать на две силы: силу лобового сопротивления \mathbf{R} и подъемную силу \mathbf{Q} . Сила лобового сопротивления направляется противоположно скорости движения центра масс тела \mathbf{V} . Направление подъемной силы зависит от геометрии тела, а в случае тела сферической формы – от направления вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в соответствии с так называемым эффектом Магнуса. Численные значения аэродинамических сил определяются по формулам

$$R = \frac{1}{2} \rho S c_D V^2, \quad Q = \frac{1}{2} \rho S c_L V^2, \quad (1)$$

где ρ – плотность воздуха, S – площадь миделя – максимального сечения тела, перпендикулярного скорости движения центра масс, c_D и c_L – аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, соответственно.

Для математического описания движения тел с помощью уравнений механики необходимо знание аэродинамических коэффициентов этих тел. Обычно их находят путем обдува тела в аэродинамической трубе. Известны экспериментальные зависимости аэродинамических коэффициентов движущейся сферы от скорости движения центра масс и угловой скорости [1-4].

В настоящее время ввиду уникальности экспериментов в аэродинамических трубах, их высокой стоимости невозможно удовлетворить всем потребностям спортивной науки постановкой опытов в аэродинамических трубах. Кроме того, каждый спортивный снаряд и каждый спортсмен имеют свои индивидуальные особенности, и потому требуется большое количество экспериментов. Однако существует более доступный и оперативный способ определения аэродинамических коэффициентов.

В последние годы для нахождения аэродинамических коэффициентов все шире используется видеосъемка движущихся объектов. Специальные видеосистемы позволяют определить зависимости координат какой-либо точки тела от времени. Главный недостаток существующих методов обработки результатов видеозаписи состоит в том, что аэродинамические коэффициенты выражаются через скорости и ускорения, которые определяются путем численного дифференцирования координат. Это иллюстрируют работы [5, 6], в которых наблюдается большой разброс найденных таким образом аэродинамических коэффициентов.

Исследования, проведенные в Пермской школе биомеханики на кафедре теоретической механики ПГТУ, показали, что существует альтернативный способ обработки видеозаписей движущихся объектов, лишенный указанного недостатка. Он состоит в многократном решении краевой задачи движения центра масс тела и получении расчетной траектории центра масс, совпадающей с экспериментальной траекторией. При этом на каждом малом промежутке времени находятся аэродинамические коэффициенты тела, а также скорость движения его центра масс. В предлагаемом методе численное дифференцирование координат, ведущее к большим погрешностям, заменяется интегрированием дифференциальных уравнений движения, которое можно выполнить с высокой степенью точности, намного превышающей точность экспериментального определения координат центра масс. Можно сказать, что новый метод не вносит дополнительной погрешности в определение аэродинамических коэффициентов движущихся объектов.

Некоторые условия проведения эксперимента

При видеосъемке, с помощью которой определяются аэродинамические коэффициенты, должно быть найдено движение центра масс движущегося объекта. В случае поступательного движения объекта достаточно поставить на него одну метку, за положением которой будет следить видеосистема. Например, в большей части фазы полета прыгуна на лыжах с трамплина его движение близко к поступательному движению. Метку можно поставить на любую часть спортивного снаряжения, видимого в видеокамере, например, на шапочку спортсмена.

В том случае, когда объект совершает сложное движение, то одной меткой на нем ограничиться нельзя. Так, при регистрации прыжка в длину метки должны стоять на всех основных сегментах тела спортсмена. По координатам этих меток и массам соответствующих сегментов должны находиться координаты общего центра масс.

Непросто следить и за движением центра масс спортивного мяча при его сложном движении. Если мяч мал, то он может восприниматься видеосистемой как материальная точка. При больших размерах мяча он должен восприниматься как протяженный объект, у которого необходимо найти положение центра масс.

Важным для решения краевой задачи является определение начальных условий движения изучаемого объекта. Начальные координаты центра масс фиксируются видеокамерой, а начальная скорость может быть определена по первым кадрам

видеосъемки или с помощью специальных измерительных комплексов, уже применяемых на крупных соревнованиях по теннису, прыжках на лыжах с трамплина и в других видах спорта.

Итак, по видеосъемке должны быть получены зависимости координат центра масс спортивного объекта от времени: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и его начальные условия движения

$$t = 0: x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0, \quad (2)$$

где точка означает производную по времени.

Кроме того, если рассматривается полет мяча, то в начальный момент времени надо определить его угловую скорость ω по величине и направлению.

Дифференциальные уравнения движения центра масс спортивного снаряда сферической формы (мяча)

Рассматривается произвольное движение мяча радиуса r и массы m в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ (ось y направлена вертикально вверх) в однородном поле тяжести в сопротивляющейся среде. На мяч, кроме постоянной силы тяжести $P = mg$, действует сила лобового сопротивления \mathbf{R} , а в случае его вращения и подъемная сила \mathbf{Q} . Аэродинамические силы определяются по формулам [7]

$$\mathbf{R} = -R \frac{\mathbf{V}}{V}, \quad \mathbf{Q} = Q \frac{\omega \times \mathbf{V}}{|\omega \times \mathbf{V}|}, \quad \omega \neq 0, \quad (3)$$

где R и Q берутся из формул (1). При $\omega = 0$ подъемная сила отсутствует ($Q = 0$).

Дифференциальные уравнения движения центра масс мяча с учетом (1), (3) имеют вид

$$\begin{aligned} m \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{2} \rho S c_D V u + \frac{1}{2} \rho S c_L \frac{\omega_y w - \omega_z v}{|\omega \times \mathbf{V}|}, \\ m \frac{dv}{dt} &= -mg - \frac{1}{2} \rho S c_D V v + \frac{1}{2} \rho S c_L \frac{\omega_z u - \omega_x w}{|\omega \times \mathbf{V}|}, \\ m \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{2} \rho S c_D V w + \frac{1}{2} \rho S c_L \frac{\omega_x v - \omega_y u}{|\omega \times \mathbf{V}|}, \\ \frac{dx}{dt} &= u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad S = \pi r^2, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \omega \neq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где u , v , w – проекции скорости движения центра масс \mathbf{V} , а ω_x , ω_y , ω_z – проекции вектора угловой скорости ω мяча на оси x , y , z , соответственно.

При интегрировании дифференциальных уравнений (4) предполагается, что вектор угловой скорости ω во время полета мяча остается постоянным ($\omega = \text{const}$). Это допущение оправдывается тем, что в воздухе силы вязкого трения, создающие вращательный момент относительно центра масс, малы и не могут заметно изменить угловую скорость мяча. Предположение о постоянстве угловой скорости мяча существенно упрощает решение системы уравнений (4). При любом направлении вектора ω его модуль ω в дифференциальные уравнения (4) явно не входит, но от значения угловой скорости ω зависят аэродинамические коэффициенты c_D и c_L .

К дифференциальным уравнениям (4) необходимо добавить начальные условия движения центра масс мяча

$$t = 0: x = x_0, y = y_0, z = z_0, u = u_0, v = v_0, w = w_0, \quad (5)$$

которые должны быть определены из эксперимента.

Задача Коши (4), (5) при заданных значениях аэродинамических коэффициентов может быть решена методами пошагового интегрирования.

Поскольку в предлагаемом методе обработки результатов видеозаписи к точности численного решения предъявляются высокие требования, то следует применять методы Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Незнание аэродинамических коэффициентов c_D и c_L позволяет к уравнениям (4), (5) добавить граничные условия, взятые из эксперимента, и сформулировать краевую задачу, из решения которой могут быть найдены аэродинамические коэффициенты.

Случай плоской траектории центра масс

Пусть вектор начальной скорости центра масс мяча \mathbf{V}_0 лежит в координатной плоскости Oxy , а вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ параллелен оси Oz (рис. 1).

В этом случае все внешние силы, действующие на мяч, лежат в координатной плоскости Oxy , и центр масс мяча будет двигаться в этой плоскости. Дифференциальные уравнения центра масс (4) несколько упростятся и примут вид

$$\begin{aligned} m \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{2} \rho S c_D V u \mp \frac{1}{2} \rho S c_L V v, \\ m \frac{dv}{dt} &= -mg - \frac{1}{2} \rho S c_D V v \pm \frac{1}{2} \rho S c_L V u, \\ \frac{dx}{dt} &= u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где верхний знак в подъемной силе относится к случаю направления вектора $\boldsymbol{\omega}$, изображенного на рис. 1 (подрезка, или обратное вращение), а нижний знак – к противоположному направлению вращения мяча (накат, или прямое вращение). Направление вращения определяется по видеозаписи удара по мячу. Начальные условия движения центра масс мяча считаем известными

$$t = 0: x = 0, y = 0, u = V_0 \cos \alpha, v = V_0 \sin \alpha. \quad (7)$$

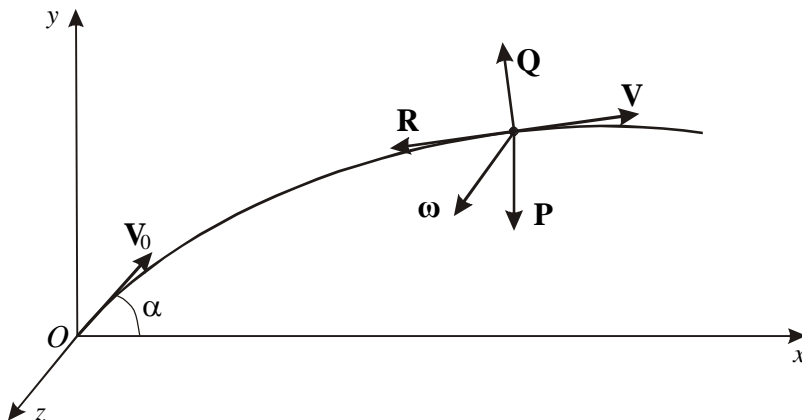


Рис. 1. Схема сил, действующих на мяч, при $\boldsymbol{\omega} \parallel Oz$

Задачу Коши можно было бы решить, если были бы известны аэродинамические коэффициенты c_D и c_L . Для их определения сформулируем краевую задачу. По частоте кадров видеосъемки находим промежуток времени Δt между двумя последовательными моментами фиксации положения мяча. Временную ось разобьем на интервалы такой величины и моменты съемки найдутся по формуле

$$t_k = k \Delta t, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Считаем, что по видеокдрам в эти моменты времени найдены координаты центра масс мяча

$$t = t_k: \quad x = x_k, \quad y = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Сначала используем краевое условие в конце первого шага по времени

$$t = \Delta t: \quad x = x_1, \quad y = y_1. \quad (10)$$

Задача (6), (7), (10) является многоточечной, или краевой задачей, с избыточными краевыми условиями (10). Надо найти такие значения аэродинамических коэффициентов c_D и c_L , при которых условия (10) будут удовлетворяться. Краевая задача решается известным способом [8], который можно назвать модифицированным методом Ньютона.

Решение задачи Коши (6), (7) зависит от независимых параметров c_D и c_L . В частности, в момент времени $t = \Delta t$ координаты можно считать функциями этих параметров

$$t = \Delta t: \quad x = x(c_D, c_L), \quad y = y(c_D, c_L). \quad (11)$$

Нулевое приближение c_D^*, c_L^* выбирается таким образом, чтобы функции (11) были достаточно близкими к значениям координат в граничных условиях (10).

Решается задача Коши (6), (7) при $c_D = c_D^*, c_L = c_L^*$ на отрезке времени $[0, \Delta t]$. Значения координат в конце интегрирования x_1^*, y_1^* являются нулевым приближением к заданному краевому условию (10). Заметим, что шаг интегрирования h должен быть много меньше интервала времени Δt и обеспечивать высокую точность интегрирования уравнений (6).

Искомое решение, удовлетворяющее граничному условию (10), разложим в ряд Тейлора около нулевого приближения с точностью до слагаемых первого порядка малости

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* + \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_D} \right)^* \Delta c_D + \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_L} \right)^* \Delta c_L, \\ y_1 &= y_1^* + \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_D} \right)^* \Delta c_D + \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_L} \right)^* \Delta c_L. \end{aligned} \quad (12)$$

Частные производные находятся приближенно с использованием двух дополнительных решений задачи Коши с новыми значениями аэродинамических коэффициентов

$$\begin{aligned} 1) \quad c_D &= c_D^* + dc_D, \quad c_L = c_L^*, \\ 2) \quad c_D &= c_D^*, \quad c_L = c_L^* + dc_L, \end{aligned} \quad (13)$$

где dc_D и dc_L – малые, но конечные добавки к нулевому приближению.

Неоднородная алгебраическая система уравнений (12) определяет поправки Δc_D и Δc_L к нулевому приближению. Новое приближение $c_D^* + \Delta c_D$, $c_L + \Delta c_L$ принимается в качестве нулевого приближения на следующей итерации решения краевой задачи (6), (7), (10) и итерационный процесс идет до тех пор, пока с заданной точностью не удовлетворится граничное условие (10), то есть модули Δc_D и Δc_L не станут меньше некоторого малого заранее заданного положительного числа.

В результате решения краевой задачи получены средние значения аэродинамических коэффициентов c_{D1} и c_{L1} на первом интервале времени Δt . Кроме этого, решение краевой задачи дает также значения проекции скорости u_1 и v_1 в конце интервала времени Δt .

Аналогично формулируется краевая задача на следующем отрезке времени $[\Delta t, 2\Delta t]$. Начальные условия определяются решением на 1-м шаге

$$t = \Delta t: x = x_1, y = y_1, u = u_1, v = v_1, \quad (14)$$

а дополнительные краевые условия имеют вид

$$t = 2\Delta t: x = x_2, y = y_2. \quad (15)$$

Краевая задача (6), (14), (15) решается так же, как на первом шаге по времени. Это решение дает значения c_{D2} и c_{L2} на втором отрезке времени видеосъемки. Решая последовательность краевых задач для всех зафиксированных на видеокадрах моментов времени, получаем дискретную зависимость аэродинамических коэффициентов от времени

$$c_D = c_D(t), c_L = c_L(t). \quad (16)$$

Поскольку на каждом отрезке времени находится также скорость движения центра масс, то нетрудно построить зависимости

$$c_D = c_D(V), c_L = c_L(V), \quad (17)$$

которые обычно получают в аэродинамических трубах и которые нужны для математического моделирования движения тел в сопротивляющейся среде. Заметим, что эти результаты получены при некотором фиксированном значении угловой скорости ω вращения мяча, найденной в эксперименте. Проводя видеозапись движения мяча с разными значениями угловой скорости и проводя описанную выше обработку результатов эксперимента, можно также найти зависимость аэродинамических коэффициентов и от угловой скорости ω .

В заключение основного алгоритма решения поставленной задачи отметим, что решение краевой задачи не вносит дополнительной погрешности в определении аэродинамических коэффициентов, так как точность численного интегрирования дифференциальных уравнений движения много выше точности экспериментального определения координат центра масс мяча. В алгоритме нигде нет так называемого “слета знаков”, наблюдаемого при численном дифференцировании координат при прежних способах обработки видеозаписей движения спортивных снарядов.

В частном случае отсутствия вращения мяча ($\omega = 0$) решается та же краевая задача, как и в случае $\omega \neq 0$, с полными дифференциальными уравнениями (6). В результате ее решения значение аэродинамического коэффициента c_L должно получиться близким к нулю. Заранее положить $c_L = 0$ нельзя, так как остается один

варьируемый параметр c_D и это усложняет постановку краевой задачи. Число избыточных граничных условий оказывается больше числа варьируемых параметров. Как можно преодолеть трудность такого рода, рассматривается в следующем параграфе.

Случай пространственной траектории

Рассмотрим движение центра масс мяча по пространственной траектории на примере подачи углового с попаданием футбольного мяча в ворота соперника. На рис. 2 показаны проекции траектории центра масс мяча на плоскость Oxy (кривая 1) и плоскость Oxz (кривая 2). Составляющие начальной скорости центра масс мяча в этих плоскости обозначены, соответственно, V'_0 и V''_0 . Вектор полной начальной скорости V_0 лежит в вертикальной плоскости $Ox'y$, составляющей угол β_0 с плоскостью Oxy , и образует угол α_0 с осью Ox' .

Мячу при ударе придается такое вращение, что вектор угловой скорости ω также лежит в плоскости $Ox'y$ и составляет угол α_0 с осью Oy . Такое направление вектора угловой скорости естественно, так как он перпендикулярен меридиональной плоскости мяча, в которой лежит точка удара бутсой и вектор скорости бутсы до удара. “Подъемная сила”, перпендикулярная векторам ω и V (формула (3)), искривляет траекторию таким образом, что мяч попадает в ворота (точка M на рис. 2).

Начальные условия движения центра масс мяча имеют вид

$$\begin{aligned} t = 0: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad u = V_0 \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\ v = V_0 \sin \alpha_0, \quad w = V_0 \cos \alpha_0 \sin \beta_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Начальные условия и зависимости координат центра масс мяча от времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (19)$$

должны быть определены из эксперимента.

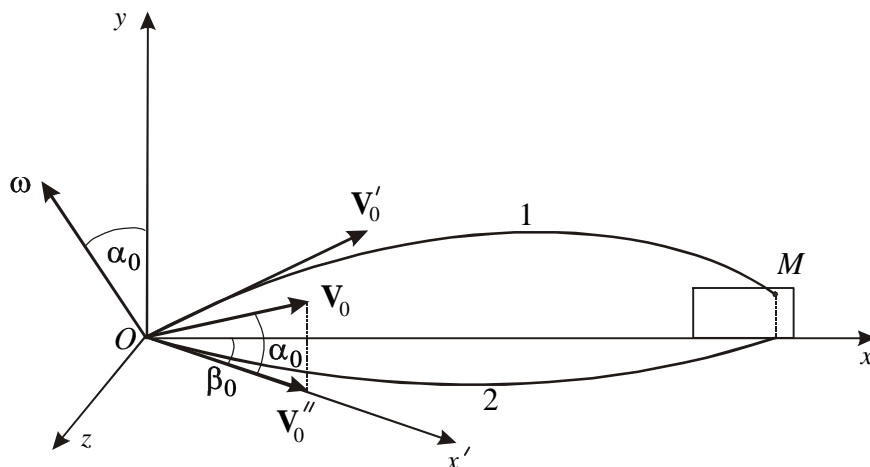


Рис. 2. Проекция пространственной траектории движения центра масс на плоскости Oxy (кривая 1) и Oxz (кривая 2) при подаче углового в футболе

По аналогии с постановкой краевой задачи в случае плоской траектории запишем краевое условие в конце первого интервала времени видеосъемки Δt

$$t = \Delta t: x = x_1, y = y_1, z = z_1, \quad (20)$$

где x_1, y_1, z_1 – найденные по видеокадру координаты.

Краевая задача (4), (18), (20) имеет три избыточных краевых условия (20), в то время как в уравнениях (4) всего два варьируемых параметра – c_D и c_L . Необходимо искусственно добавить еще один варьируемый параметр. Удобно в качестве такого параметра взять параметр

$$c_\beta = \cos \beta, \quad (21)$$

входящий в начальные условия (18). Заранее отметим, что после каждой итерации при решении краевой задачи в начальных условиях (18) должны подправляться компоненты скорости u и w

$$u = V_0 \cos \alpha_0 c_\beta, \quad w = V_0 \cos \alpha_0 \sqrt{1 - c_\beta^2}. \quad (22)$$

Такое изменение начальных условий не должно снизить точность определения аэродинамических коэффициентов, напротив, оно приводит в соответствие одно из начальных условий с формой полученной из видеозаписи траектории.

Решение задачи Коши (4), (18) при $t = \Delta t$ будет функцией трех параметров

$$t = \Delta t: x = x(c_D, c_L, c_\beta), y = y(c_D, c_L, c_\beta), z = z(c_D, c_L, c_\beta). \quad (23)$$

В качестве нулевого приближения для c_β возьмем его значение $c_\beta^* = \cos \beta_0$ в начальный момент времени. Нулевые приближения c_D^* и c_L^* берутся либо с учетом известной информации о них, либо путем компьютерного анализа траектории. На отрезке времени $[0, \Delta t]$ решается задача Коши с параметрами c_D^*, c_L^*, c_β^* , и получаются численно координаты центра масс мяча в конце этого отрезка

$$t = \Delta t: x = x_1^*, y = y_1^*, z = z_1^*. \quad (24)$$

Искомое решение, соответствующее граничным условиям (20), разлагаем в ряд около нулевого приближения с точностью до слагаемых первого порядка малости

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^* + \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_D} \right)^* \Delta c_D + \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_L} \right)^* \Delta c_L + \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_\beta} \right)^* \Delta c_\beta, \\ y_1 &= y_1^* + \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_D} \right)^* \Delta c_D + \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_L} \right)^* \Delta c_L + \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_\beta} \right)^* \Delta c_\beta, \\ z_1 &= z_1^* + \left(\frac{\partial z_1}{\partial c_D} \right)^* \Delta c_D + \left(\frac{\partial z_1}{\partial c_L} \right)^* \Delta c_L + \left(\frac{\partial z_1}{\partial c_\beta} \right)^* \Delta c_\beta. \end{aligned} \quad (25)$$

Как и в случае с плоской траекторией, частные производные находятся приближенно путем дополнительных решений задачи Коши (4), (18) с малыми добавками в нулевое приближение каждого из варьируемых параметров. Неоднородная алгебраическая система (25) определяет поправки к нулевому приближению $\Delta c_D, \Delta c_L, \Delta c_\beta$.

После первой итерации в решении краевой задачи получено новое приближение для варьируемых параметров

$$c'_D = c_D^* + \Delta c_D, \quad c'_L = c_L^* + \Delta c_L, \quad c'_\varphi = c_\varphi^* + \Delta c_\varphi. \quad (26)$$

Начальные условия на второй итерации имеют вид

$$t = 0: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad u = V_0 \cos \alpha_0 c'_\varphi, \\ v = V_0 \sin \alpha_0, \quad w = V_0 \cos \alpha_0 \sqrt{1 - c'^2_\varphi}. \quad (27)$$

По алгоритму, рассмотренному для первой итерации, решением краевой задачи (4), (27), (20) уточняется приближение (26). Итерации продолжаются до тех пор, пока поправки к аэродинамическим коэффициентам Δc_D , Δc_L и к направляющему косинусу Δc_β не станут меньше по модулю некоторого заранее заданного малого положительного числа ε . В этом случае граничное условие (20) в соответствии с разложениями (25) удовлетворяется с точностью до ε .

Итак, получены аэродинамические коэффициенты c_{D1} , c_{L1} на первом отрезке времени $[0, \Delta t]$. Помимо этого, в момент времени $t = \Delta t$ определены компоненты скорости движения центра масс u_1, v_1, w_1 . Это дает возможность перейти к определению аэродинамических коэффициентов на следующем отрезке времени $[\Delta t, 2\Delta t]$.

Сформулируем на нем краевую задачу. Начальные условия сохраним в форме (18), чтобы оставить в качестве варьируемого параметра направляющий косинус c_β . В соответствии с формулами, аналогичными начальным условиям (18), получим новые значения косинусов углов α и β , определяющих направление вектора скорости \mathbf{V}_1 в конце первого отрезка времени

$$V_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}, \quad \cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{V_1^2}}, \quad \cos \beta_1 = \frac{u_1}{V_1 \cos \alpha_1}. \quad (28)$$

Тогда начальные условия движения на следующем промежутке времени примут вид

$$t = \Delta t: \quad x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1, \quad u = V_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1, \\ v = V_1 \sin \alpha_1, \quad w = V_1 \cos \alpha_1 \sin \beta_1. \quad (29)$$

Запишем краевое условие в конце нового интервала времени, соответствующее данным эксперимента

$$t = 2\Delta t: \quad x = x_2, \quad y = y_2, \quad z = z_2. \quad (30)$$

В качестве нулевого приближения для решения краевой задачи (4), (29), (30) выберем следующие значения варьируемых параметров

$$c_D^* = c_{D1}, \quad c_L^* = c_{L1}, \quad c_\beta^* = c_{\beta1}. \quad (31)$$

Решение краевой задачи, аналогичное вышеприведенному решению на первом отрезке времени, дает новые значения аэродинамических коэффициентов c_{D2} , c_{L2} на втором отрезке времени и компоненты скорости движения центра масс в конце этого отрезка u_2, v_2, w_2 .

Таким же образом решаются краевые задачи на всех промежутках времени между моментами видеосъемки для всей траектории, изображенной на рис. 2. Получается дискретная зависимость аэродинамических коэффициентов и компонент скорости движения центра масс мяча от времени

$$c_D = c_D(t), c_L = c_L(t), u = u(t), v = v(t), w = w(t). \quad (32)$$

В прямых экспериментах получают обычно зависимости аэродинамических коэффициентов от скорости движения центра масс тела. Формулы (32) позволяют установить эту связь

$$c_D = c_D(V), c_L = c_L(V). \quad (33)$$

Таковы окончательные результаты обработки видеозаписей полета футбольного мяча. Решение задачи Коши (4), (18) с учетом зависимостей (33) должно дать траекторию движения центра масс мяча, близкую к той, которая получена по видеозаписи. Некоторое различие может быть связано с тем, что был искусственно введен третий варьируемый параметр.

Отметим, что зависимости (33) получены для конкретного значения угловой скорости вращения мяча ω , при котором была выполнена видеозапись. Меняя в эксперименте угловую скорость мяча, можно получить зависимость аэродинамических коэффициентов и от угловой скорости ω .

Заключение

Разработан новый метод обработки результатов видеозаписи движения спортивных снарядов и спортсменов в сопротивляющейся среде. Метод основан на решении последовательности краевых задач, граничные условия для которых получены из эксперимента. Метод позволяет определить аэродинамические коэффициенты движущегося тела и скорость движения его центра масс по координатам центра масс, найденным из видеозаписи. Метод устойчив к ошибкам, допущенным в эксперименте. С математической точки зрения преимущество его состоит в том, что ранее применяемое численное дифференцирование координат заменяется интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений, выполняемым с большой степенью точности.

Метод проиллюстрирован на примерах плоского и пространственного движения спортивного снаряда сферической формы (мяча) с учетом его вращения. Дан алгоритм решения краевой задачи с избыточными граничными условиями, которое определяет аэродинамические коэффициенты мяча. Показано, как можно определить зависимость аэродинамических коэффициентов от скорости движения центра масс мяча.

Точное определение аэродинамических коэффициентов позволяет использовать их при математическом моделировании движения спортсменов и спортивных снарядов и решении оптимизационных задач.

Изложенный метод может быть легко применим для изучения движения других спортивных снарядов (копье, диск), а также спортсменов (прыжки на лыжах с трамплина).

Представленный алгоритм определения аэродинамических коэффициентов есть лишь первый шаг в решении этой фундаментальной проблемы биомеханики спорта. Из-за нелинейности уравнений движения возможна неоднозначность полученного решения и возникает проблема выбора правильного решения. В случае одного

неизвестного аэродинамического коэффициента задача решается однозначно. При двух неизвестных однозначно аэродинамические коэффициенты могут быть найдены путем усложнения алгоритма, использования в краевой задаче дополнительных граничных условий.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность руководителю научного семинара по биомеханике ПГТУ профессору Ю.И. Няшину, всем участникам этого семинара за плодотворное обсуждение решаемой проблемы и полезные советы, а также студентам специальности «Компьютерная биомеханика», принявшим участие в решении задач биомеханики спорта, относящихся к проблеме определения аэродинамических коэффициентов спортсменов и спортивных снарядов.

Список литературы

1. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости / Под ред. С. Гольдштейна. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. Т. I.
2. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости / Под ред. С. Гольдштейна. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. Т. II.
3. *Achenbach E.* Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers // *Fluid. Mech.* 1972. № 54. P. 565-575.
4. *Achenbach E.* The effects of surface roughness and tunnel blockage on the flow past spheres // *Fluid. Mech.* 1974. Vol. 65. P. 113-125.
5. *Depra P., Brenzikofer R., Goes M., Barros R.* Fluid mechanics analysis in volleyball services. Proceedings of XVI International Symposium on Biomechanics in Sports. Book 2. Riele H.J., Vieten M.M. (Editors), UVK – Universitätsverlag Konstanz Gmb H. 1998. P. 161-164.
6. *Podgayets A.R., Rudakov R.N., Tuktamishv V.S., Kerov R.S., Shvetsov B.S.* Aerodynamic coefficients of a ski-jumper // *Russian Journal of Biomechanics.* 2003. V.6. № 1. P. 78-94.
7. *Рудаков Р.Н., Каменских А.В., Шульгин П.В.* Оптимизация траектории теннисного шарика // *Российский журнал биомеханики.* 2000. Т. 4. № 4. С. 42-49.
8. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И.* Вычислительные методы. Т. 2. М.: Наука, 1977. 400 с.

ON NEW METHOD OF PROCESSING OF SPORTSMEN AND SPORTS PROJECTILES MOVEMENTS

R.N. Rudakov (Perm, Russia)

In previous papers [1, 2] we showed how to determine aerodynamic coefficients of a volleyball and a ski-jumper by means of the video technology. Dependences of coordinates on time are obtained according to video records. Velocities and accelerations are found by coordinates numerical differentiation, and aerodynamic coefficients – by movement equations. The applied method of defining the velocities and accelerations led to a low accuracy of the found values, it is evidenced by the large scatter of aerodynamic coefficients in those studies. The currently suggested method of processing the video records is based on solving the boundary value problems of sports movements. It allows to keep the accuracy which took place in experiments. Usage of this method is illustrated by an example of a three-dimensional movement of a ball. Also it is shown that its aerodynamic coefficients may be

defined without coordinates differentiation but by solving the boundary value problem with regular differentiated equations.

Key words: sports projectiles, aerodynamic coefficients, boundary value problem.

Получено 1 февраля 2004