

УДК 531/534:57+612.7

ТЕОРИЯ СИСТОЛИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛЕВОМ ЖЕЛУДОЧКЕ

Л. А. Булавин, Ю. Ф. Забашта, С. В. Северилов

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, 03680, Украина, г. Киев, проспект Глушкова, 2, корпус 1, e-mail: severylov@univ.kiev.ua

Аннотация. Построена теория систолических напряжений в левом желудочке сердца. Показано, что напряжения являются суммой двух слагаемых: напряжений, вызванных давлением крови, и напряжений, вызванных неравномерным сокращением мышц по сечению желудочка. Сокращение мышц рассматривается как следствие возникновения клиновидной дислокации. Расчет напряжений выполнен на основе нелинейной теории упругости, учитывающей конечность деформации левого желудочка.

Ключевые слова: левый желудочек, систола, диастола, напряжения, клиновидная дислокация.

Введение

Представление о состоянии исследуемого в данной статье вопроса дает монография [1]. Левый желудочек рассматривался как полый цилиндр. Предполагалось, что напряжения являются следствием исключительно давления крови. Напряжения являются растягивающими, направлены перпендикулярно радиусу и распределены равномерно по толщине стенки желудочка. Их величина определяется формулой Лапласа для безмоментных оболочек вращения:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = P \frac{r_0}{R - r_0}, \quad (1)$$

где P – давление крови в полости желудочка, R – внешний радиус цилиндра, r_0 – внутренний радиус цилиндра. Последующие работы (ссылки в [2]) существенных изменений в эти представления не внесли.

Хотя в работах [1,2] об этом не упоминалось, фактически, предыдущие исследователи рассматривали желудочек как тонкостенный цилиндр, о чем свидетельствует формула (1). Средние значения R и r_0 составляют 5,1 и 3,7 см, соответственно, так что модель тонкостенного цилиндра не может быть применена к левому желудочку.

Кроме того, формула (1), как известно, справедлива только в случае малых деформаций. Поскольку во время систолы величины R и r_0 уменьшаются до значений 4 и 2,5 см, применение теории малых деформаций является недостаточно некорректным.

Данная статья является попыткой построения более корректной теории возникновения напряжений в левом желудочке сердца.

Расчетная модель

Следуя установившейся традиции, будем рассматривать левый желудочек как полый цилиндр. Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) , направив ось z вдоль оси цилиндра. Обозначим через ω – относительную деформацию волокон миокарда в направлении оси φ , возникающую в результате мышечного сокращения. Такую деформацию можно получить, удалив из цилиндра сектор, вырезанный двумя плоскостями, проходящими через ось z (заштрихован на рис. 1), и склеив берега образованного разреза.

Указанное поле деформаций возникает, если вдоль оси цилиндра располагается клиновидная дислокация. Причиной возникновения напряжений в этом случае является неравномерное сокращение мышц по сечению желудочка. Указанные напряжения будем обозначать посредством σ_{ik}^d . Кроме этого, на эти напряжения будет накладываться поле напряжений σ_{ik}^p , вызванное действием давления крови.

Напряжения, вызванные сокращением мышц: малые деформации. Как уже указывалось, деформационные поля напряжений, связанные с неравномерностью сокращения, можно рассматривать как следствие действия клиновидной дислокации. Указанные поля были рассчитаны в работе [3], при этом для смещений U_r, U_φ были получены формулы:

$$\begin{cases} U_r = \frac{\omega}{4\pi} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) r \ln \frac{r}{R} + \left(ar + \frac{b}{r} \right), \\ U_\varphi = \frac{\omega\varphi}{2\pi} r, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{cases} a = \frac{\omega}{4\pi} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \ln \left(\frac{r_0}{R} \right) \frac{r_0^2}{R^2 - r_0^2} - \frac{\omega}{4\pi}, \\ b = \frac{\omega}{4\pi} \frac{1}{1-\nu} \ln \left(\frac{r_0}{R} \right) \frac{r_0^2}{R^2 - r_0^2}, \end{cases}$$

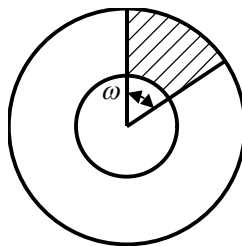


Рис. 1. Расчетная модель: деформации желудочка, вызванные сокращением мышц

а для напряжений σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ – соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{\mu\omega}{4\pi} \frac{1}{(1-\nu)} \left[\ln \frac{r}{R} - \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \ln \frac{r_0}{R} \right], \\ \sigma_{\varphi\kappa} = \frac{\mu\omega}{2\pi} \frac{1}{(1-\nu)} \left[1 + \ln \frac{r}{R} + \frac{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \ln \frac{r_0}{R} \right], \\ \sigma_{zz} = \frac{\mu\omega}{4\pi} \frac{\sigma}{(1-\nu)} \left[1 + 2 \ln \frac{r}{R} + \frac{2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2}{\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)} \ln \frac{r_0}{R} \right], \end{array} \right. \quad (3)$$

где μ - модуль сдвига материала миокарда, ν - коэффициент Пуассона.

Напряжения, возникающие вследствие давления крови: малые деформации. Для малых деформаций решение этой задачи имеет известный вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_r = Ar + \frac{B}{r}, \\ \sigma_{rr} = \frac{r_0^2 P}{R^2 - r_0^2} \left[1 - \frac{R^2}{r^2} \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{r_0^2 P}{R^2 - r_0^2} \left[1 + \frac{R^2}{r^2} \right], \\ \sigma_{zz} = 2\nu \frac{r_0^2 P}{R^2 - r_0^2}, \end{array} \right. \quad (4)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{P(1-2\nu)}{2\mu} \frac{r_0^2}{R^2 - r_0^2}, \\ B = \frac{P}{2\mu} \frac{r_0^2 R^2}{R^2 - r_0^2}. \end{array} \right.$$

Величина давления P определялась по формуле

$$P = ZV, \quad (5)$$

где V - скорость изгнания крови; Z - входной импеданс.

Суммарные напряжения: большие деформации. Поскольку объем желудочка во время систолы уменьшается на 60%, приближение малых деформаций, использованное при получении предыдущих формул, неприменимо. Необходимо воспользоваться теорией конечных деформаций [4]. В данной работе нами использовано приближение, которое заключается в следующем. Как известно, в теории конечных деформаций различают отсчетную и актуальную конфигурации системы. Будем обозначать положение частицы системы, соответствующее первой конфигурации, через \mathbf{p}_0 , для второй конфигурации введем обозначение \mathbf{p} . Вектор смещения \mathbf{U} , соответственно, определяется как разность

$$\mathbf{U} = \mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}_0. \quad (6)$$

Переход от исходной к актуальной конфигурации будем рассматривать как последовательность шагов, каждый из которых соответствует малому приращению \mathbf{U} . Актуальную конфигурацию, полученную в конце каждого шага, будем рассматривать как отсчетную конфигурацию последующего шага, что дает право применять при расчетах для каждого шага формулы линейной теории малых деформаций, включая формулы (2-4). При этом будем считать материал стенки полулинейным [3].

В соответствии с этим приближением процедуру расчета представим в виде последовательности следующих шагов:

1. Весь интервал времени систолы $[0, t_s]$ разбивается на N частей длиной Δt , так что

$$\Delta t = \frac{t_s}{N}, [0, t_s] = [0, \Delta t] \cup \dots \cup [t_s - \Delta t, t_s].$$

2. Начальная толщина стенки $h = R - r_0$ разбивается на M полос толщиной Δh таким

$$\text{образом, что } \Delta h = \frac{h}{M}, [0, h] = [0, \Delta h] \cup \dots \cup [h - \Delta h, h]. \text{ Обозначим радиус-векторы}$$

границ каждой полосы через $r_i, i = \overline{1, M}$. В каждой из точек r_i по формулам (3) вычисляются напряжения $\sigma_{rr}^d(r_i), \sigma_{zz}^d(r_i), \sigma_{\varphi\varphi}^d(r_i)$, которые возникают вследствие мышечного сокращения.

3. На границах выбранных полос по формулам (4) вычисляются смещения, обусловленные сокращением.
4. По полученным смещениям вычисляются новые внутренний и внешний радиусы, а также новые положения границ разбиения и толщины полос, так что $R \rightarrow R^d, r_0 \rightarrow r_0^d, [0, h] \rightarrow [0, h_d] = [0, \Delta h_1] \cup \dots \cup [h_d - \Delta h_M, h_d], r_i \rightarrow r_i^d$.
5. Напряжения, которые вычисляются в п. 2, пересчитываются с учетом новых положений границ полос разбиения в соответствии с формализмом нелинейной теории упругости по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r_i^d) = \sigma_{rr}(r_i) \frac{r_i}{r_i^d}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r_i^d) = \sigma_{\varphi\varphi}(r_i) \frac{\Delta h}{\Delta h_i}, \\ \sigma_{zz}(r_i^d) = \sigma_{zz}(r_i) \frac{r_i}{r_i^d} \frac{\Delta h}{\Delta h_i}. \end{cases} \quad (7)$$

6. По величине изменения внутреннего радиуса по формуле (5) вычисляется давление в полости желудочка.
7. На границах полос разбиения по формулам (6) вычисляются напряжение и смещение, которые возникают вследствие действия давления внутри желудочка. Полученные напряжения суммируются с напряжениями от сокращения, а также снова вычисляются новые положения границ разбиения.
8. Результирующие напряжения пересчитываются согласно формулам (7) с учетом новых положений границ разбиения.
9. Операции, описанные в п. 2-п. 8, циклически повторяются N раз, при этом напряжения, которые получаются, постоянно суммируются. Таким образом, решение задачи строится во времени, учитывая изменение положений полос разбиения, то есть конечность деформаций стенки на каждом шаге вычисления напряжений.

Таблица

Величины расчетных параметров	
Общее время систолы t_s , с	0,1
Модуль сдвига $\mu \times 10^{-5}$, Па	5
Внутренний радиус желудочка r_0 , см	2,5
Внешний радиус желудочка R , см	3,5
Входной импеданс Z , Па \times с/м	150
Полный угол клиновой дислокации Ω , радиан	1,027

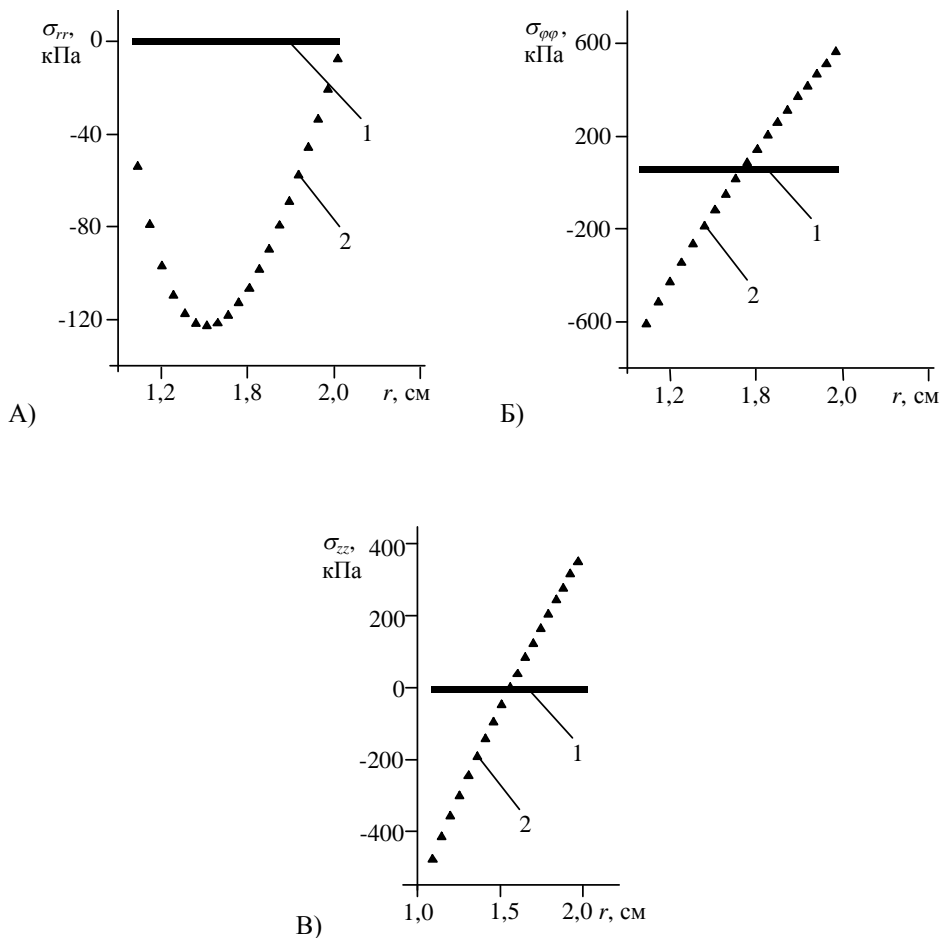


Рис. 2. Графики распределений нормальных напряжений по толщине стенки левого желудочка в момент систолы 0,1 с (А- σ_{rr} , Б- $\sigma_{\phi\phi}$, В- σ_{zz}). 1 – нормальные напряжения, рассчитанные по формуле (1), 2 – напряжения, рассчитанные по формулам (2-4)

Использование формул (2-4) является правомерным, поскольку на каждом этапе деформации являются малыми.

Выбранные расчетные параметры приведены в таблице. Результаты расчетов приведены на рис. 2.

Выводы

Выполненный в данной статье расчет приводит к представлению о поле напряжений, которое существенно отличается от представления, бытующего в литературе, а именно:

- напряжения в левом желудочке являются следствием не только действия давления крови, но также и следствием неравномерного сокращения миокарда; напряжения, связанные с последним фактором, составляют до 60% от величин напряжений, вызванных давлением;
- нормальное напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ неравномерно распределено по толщине стенки желудочка, причем в зоне, прилегающей к внутренней поверхности, это напряжение является сжимающим, а в зоне, прилегающей к внешнему радиусу, – растягивающим;
- кроме напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ отличными от нуля оказываются напряжения σ_{rr} , σ_{zz} (за исключением внешней поверхности, где σ_{rr} обращается в нуль); они являются сжимающими и при этом внутри миокарда существует слой, где они достигают значительной величины.

Список литературы

1. Раишмер Р. Динамика сердечно-сосудистой системы. Москва: Медицина, 1981.
2. Бобров В.О., Стаднюк Л.А., Крижановский В.О. Эхокардиография. Киев: Здоровье, 1997.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Мир, 1970.
4. Касевич Ф. М. Дислокации в теории упругости. Киев: Наукова думка, 1976.

THEORY OF SYSTOLIC STRESSES IN THE AORTIC VENTRICLE OF THE HEART

L.A. Bulavin, Y.F. Zabashta, S.V. Severylov (Kiev, Ukraine)

In this paper one of possible variants of the theory of formation of systolic stresses in the aortic ventricle is suggested. Necessity of construction of such theory is caused by the mathematical models of the specified process considered in the literature, which do not take into account real factors, characteristic for this process, namely: thick wall of the aortic ventricle and finiteness of its deformations occurring during a systole. It is shown, that the account of thick wall entails non-uniformity of muscles traction that results in occurrence of additional stresses. Consequently, the total field of stresses is comprised of two fields: already mentioned and the field of stresses related to the blood pressure. It is shown, that non-uniform muscles traction can be considered as occurrence of the wedge dislocation that is inserted along a longitudinal axis of the ventricle. Calculation of stresses is made with the help of the

theory of finite deformations. Prominent feature of a field of stresses in the aortic ventricle is occurrence of compressive stresses along radius and along an axis, and also occurrence of a zone of the compressive stresses acting perpendicularly to the radius, near to an internal surface of the ventricle.

Key words: aortic ventricle of the heart, systole, diastole, stresses, wedge dislocation.

Получено 27 марта 2003