

УДК 531/534:57+612.7

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ДЫХАНИЯ ПОДОГРЕТОЙ КИСЛОРОДНО-ГЕЛИЕВОЙ СМЕСЬЮ НА ТЕПЛОМАССОБМЕН**

**А.И. Дьяченко, О.В. Манюгина**

Государственный научный центр Российской Федерации – Институт медико-биологических проблем, Россия, 123007, Москва, Хорошевское шоссе, 76а, e-mail: alex\_dyachenko@mtu-net.ru

**Аннотация.** Разработана математическая модель тепломассопереноса в дыхательных путях человека. Проведен теоретический анализ влияния дыхания кислородно-гелиевыми газовыми смесями на тепломассообмен. Во время дыхания подогретыми газовыми смесями кровотока и теплопроводность стенок бронхов оказываются достаточными для быстрого выравнивания температуры стенки, поэтому тепломассообмен можно описывать стационарной моделью. Показано, что при дыхании подогретыми смесями кислородно-гелиевая смесь быстрее остывает, но лучше увлажняется, чем воздух, из-за больших коэффициентов тепло- и массопереноса. Испарение воды с поверхности слизистой оболочки приводит к тому, что тепло передается от стенки в газ даже при дыхании подогретыми смесями. Уменьшение испарения, например, из-за частичного высыхания слизистой оболочки, приводит к передаче тепла от кислородно-гелиевой смеси в стенку верхних дыхательных путей.

**Ключевые слова:** математическая модель, дыхание, дыхательные пути, подогретая смесь, кислородно-гелиевая смесь, тепломассообмен

### **1. Введение**

Известно, что при дыхании кислородно-гелиевыми газовыми смесями снижается сопротивление дыханию и работа дыхания, что обусловлено пониженной плотностью смесей по сравнению с воздухом [4, 14]. Это свойство кислородно-гелиевой смеси можно использовать для разгрузки системы дыхания. Теплопроводность гелия примерно в пять раз больше теплопроводности воздуха. Известны попытки использовать оба указанных отличия кислородно-гелиевой смеси в терапии [7, 8, 12].

По физической сущности влагообмен, как и теплообмен, является процессом переноса, поэтому увеличенный теплообмен в кислородно-гелиевой смеси неизбежно сочетается с увеличенным влагообменом, т.е. в кислородно-гелиевой смеси происходит более интенсивное испарение паров воды в дыхательных путях. При неправильно выбранной температуре и влажности вдыхаемой кислородно-гелиевой смеси это может привести к высушиванию и переохлаждению слизистой оболочки дыхательных путей и получению отрицательного физиологического эффекта вместо положительного. В связи с возрастающим применением дыхания различными газовыми смесями, в том числе кислородно-гелиевой смесью, необходимо определить влияние параметров дыхания и смесей на основные закономерности тепло- и влагообмена в дыхательных путях.

Математические модели уже показали свою эффективность для анализа некоторых особенностей процесса тепло- и влагообмена в дыхательных путях [1, 5, 6]. С помощью теоретической модели показано, что процесс кондиционирования воздуха наиболее чувствителен к следующим параметрам: распределению температуры крови по длине в стенках дыхательных путей и в направлении к объему носа. Оба эти параметра определяют локальные суммарные потоки тепла и воды во всей системе дыхания [10]. О продольном распределении температуры крови в стенках дыхательных путей и его регуляции известно очень мало.

Однако в существующих моделях не учитывали ряд важных деталей теплопереноса: особенности распределения кровотока в стенках трахеи и бронхов по их толщине, конечную толщину стенок дыхательных путей. Иногда не учитывается скрытая теплота испарения [1, 5, 6]. Все это требует использования уточненной модели.

Целью нашей работы является: 1) разработка математической модели теплопереноса в дыхательных путях человека; 2) теоретический анализ действия подогрева и введения гелия в дыхательную газовую смесь на теплообмен.

## 2. Модель теплообмена в дыхательных путях человека

По сравнению с известными моделями [1, 5, 6, 10] предлагаемая модель отличается тем, что учитывается неравномерность распределения кровотока в стенке верхних дыхательных путей. По данным [13] около 60% кровотока проходит в слизистой оболочке (поверхностный кровоток), а остальные 40% распределены в стенке дыхательных путей.

**2.1. Модель теплообмена в отдельном бронхе (трахее).** Поскольку длина трахеи намного больше толщины стенки, то её можно считать бесконечно длинным полым цилиндром и в стенке производной от температуры по длине можно пренебречь по сравнению с производной от температуры по радиусу. Это означает, что процесс передачи тепла за счет теплопроводности можно считать одномерным, а тепловой поток направленным по радиусу трубы.

Предполагаем, что:

1. Кровоток  $q_v$  в стенке трахеи постоянный, т.е. не зависит от координат, времени и температуры.

2. Кровь притекает при температуре  $T_k$ , а оттекает при температуре ткани  $T$ , в том числе кровь от слизистой оболочки оттекает при ее температуре  $T_c$ .

3. Коэффициент теплопроводности стенки трахеи  $\lambda$  и другие физические параметры постоянны, т.е. не зависят от координат и температуры.

4. В каждом сечении трахеи происходит хорошее перемешивание газа, так что температура газа  $T_z$  одинакова по сечению.

5. Скорость газа  $v$  одинакова по сечению и постоянна.

Уравнения модели, основанной на этих предположениях, имеют вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \rho_k c_k q_v (T - T_k), \quad a < r < b, \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial T_z}{\partial t} + v \frac{\partial T_z}{\partial x} \right) (\rho_z c_z + \rho_n c_n) + \left( \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + v \frac{\partial \rho_n}{\partial x} \right) c_n (T_z - T_c) = \frac{2H_c}{a} (T_c - T_z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + v \frac{\partial \rho_n}{\partial x} = \frac{2K_c}{a} (\rho_c - \rho_n), \quad (3)$$

$$H_c(T_g - T_c) + hK_c(\rho_n - \rho_c) = \rho_k c_k q_s (T_c - T_k) - \lambda \text{grad} T \Big|_{r=a}. \quad (4)$$

Здесь обозначено:  $a$  и  $b$  – внутренний и внешний радиус стенки;  $\lambda$  – теплопроводность стенки, равная теплопроводности мышечной ткани (0,418 Вт/мК);  $\rho$ ,  $\rho_g$  и  $\rho_k$  – плотность стенки, газа и крови;  $c$ ,  $c_g$  и  $c_k$  – удельная теплоёмкость стенки, газа и крови;  $q_s$  и  $q_v$  – кровоток на единицу поверхности в слизистой оболочке и кровоток на единицу объема в стенке;  $K_c$  – коэффициент массопереноса;  $H_c$  – коэффициент теплопередачи;  $h$  – скрытая теплота парообразования;  $v$  – скорость течения газа в трубке;  $\rho_n$  и  $\rho_c$  – плотность водяных паров в газе и у поверхности раздела газ-слизь;  $T$ ,  $T_g$ ,  $T_c$  и  $T_k$  – температура стенки, газа, слизистой оболочки и крови.

Уравнение (1) – это уравнение теплопроводности в стенке трахеи с условиями на границе  $T \Big|_{r=a} = T_c(x)$  и  $T \Big|_{r=b} = T_k$ . Начальная температура стенки всюду равна  $T_k = 37^\circ \text{C}$ .

Уравнение (2) – это уравнение баланса энергии в газе. Оценка показала, что вклад второго слагаемого в левой части пренебрежимо мал (5%) и что теплота, которую несут водяные пары, также намного меньше теплоты, которую несет газ. С учетом этого уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} + v \frac{\partial T_g}{\partial x} = \frac{2H_c}{\rho_g c_g a} (T_c - T_g). \quad (5)$$

Уравнение (3) – это уравнение баланса массы. Уравнение (4) – это уравнение баланса энергии в слизистой оболочке. Поток тепла, поступающий в слизистую оболочку от стенки и крови, идет на испарение воды и согревание газа.

В данной работе коэффициенты тепло- и массопереноса рассчитываются из эмпирических формул, полученных для круглых труб со смоченными водой стенками при ламинарном течении ( $Re < 2 \cdot 10^3$ ). Для переходного режима ( $2 \cdot 10^3 < Re < 10^4$ ) эмпирические формулы отсутствуют, поэтому используют зависимости, полученные как для ламинарного, так и для турбулентного режима [1, 2]:

$$K_c = \frac{D}{d} 1,4 \left( Re \frac{d}{l} \right)^{0,4} Sc^{0,33}, \quad (6)$$

$$H_c = \frac{\lambda}{d} 1,4 \left( Re \frac{d}{l} \right)^{0,4} Pr^{0,33}, \quad (7)$$

где  $Re$  – число Рейнольдса,  $Sc$  – число Шмидта,  $Pr$  – число Прандтля,  $D$  – коэффициент диффузии паров воды в газе,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности газа,  $d$  и  $l$  – диаметр и длина трубы,  $\varepsilon_1$  – поправка на участок гидродинамической стабилизации [2]:

$$\varepsilon_1 = 0,1 \cdot \left( \frac{l}{Red} \right)^{-1/7} \Big/ \left( 1 + 2,5 \frac{l}{Red} \right); \quad \varepsilon_2 - \text{ поправка на криволинейность трубы [2]:}$$

$\varepsilon_2 = 1 + 1,77 d/R$ , где  $R$  – радиус кривизны трубы.

Зависимость плотности водяных паров  $\rho_c$  от температуры найдем из линейной аппроксимации решения уравнения Клапейрона-Клаузиуса вблизи температуры тела  $\rho_c = 0,0022(T_c - T_k) + 0,0438$ .

**2.2. Модель тепломассопереноса в трахеобронхиальном дереве.** Рассматривается дыхательный тракт от ротовой полости до 16-го поколения бронхов. Условия на входе

в каждое поколение приравняли к условиям на выходе из предыдущего поколения, и для каждого поколения решали систему уравнений (1)-(4). Параметры модели приведены в таблице. Для описания размеров верхних дыхательных путей использовали данные [9, 10], полученные на модели-слепке, для описания размеров трахеобронхиального дерева использовали модель Вейбеля. В соответствии с данными [11,13] вычислили кровоток на единицу объема  $q_v = 7,4 \cdot 10^{-3}$  л/с и кровоток на единицу площади  $q_s = 1,77 \cdot 10^{-3}$  см/с.

**2.3. Решение уравнений модели.** Уравнение (1) было решено аналитически [3]. Далее из уравнения (4) получили температуру слизи  $T_c$  как функцию температуры газа  $T_g$  и плотности водяных паров  $\rho_n$ . Найденную зависимость подставили в уравнения (3) и (5) и решили систему линейных дифференциальных уравнений. Предполагали, что во время всего выдоха температура и влажность в шестнадцатом поколении бронхов совпадают с величинами, полученными для конца вдоха.

### 3. Результаты и обсуждение

Исследование нестационарной модели показало, что за время вдоха температура стенки успевает выровняться по толщине из-за мощного кровотока и высокой теплопроводности. Это совпадает с оценками [5]. Наши расчеты показали, что если температура дыхательной газовой смеси равна  $60^\circ\text{C}$ , а скорость потока порядка 0,4-1,0 л/с, то различие профилей температуры газа в стационарной и нестационарной моделях при одинаковых мгновенных скоростях не превышает  $0,5^\circ\text{C}$ . Профили влажности в стационарной и нестационарной задачах также практически совпадают. Поэтому далее представлены результаты, полученные на стационарной модели.

На рис. 1-3 представлены результаты численного исследования модели. Видно, что при дыхании подогретые кислородно-гелиевые смеси быстрее остывают, но лучше увлажняются, чем воздух (рис. 1, 2). Это связано с большими коэффициентами тепло- и массопереноса в кислородно-гелиевой смеси по сравнению с воздухом. К альвеолярному пространству (16-е поколение бронхов) дыхательные смеси приходят в хорошо кондиционированном состоянии по температуре и влажности. По-видимому, при дыхании подогретыми смесями происходит частичное высыхание слизистой оболочки дыхательных путей, что приводит к уменьшению коэффициентов массопереноса. В этом случае, как видно из рис. 2 (кривые 5, 6), дыхательные смеси не успевают насытиться водяными парами. При «нормальных» коэффициентах массопереноса и сухом вдыхаемом воздухе и кислородно-гелиевой смеси поток тепла идет из центральных участков бронха к его поверхности (кривые 1, 2 на рис. 3). Таким образом, на испарение затрачивается больше тепла, чем поступает из подогретой дыхательной смеси (рис. 3). Если вдыхаемый воздух содержит воду (кривые 3, 4, рис. 3), то затраты тепла на испарение снижаются и тепло поступает из дыхательной смеси в стенку бронха. При трехкратном снижении коэффициентов массопереноса в кислородно-гелиевой смеси также происходит обогрев поверхности верхних дыхательных путей (кривая 6, рис. 3). Отметим, что при дыхании сухой подогретой дыхательной смесью испарение больше в кислородно-гелиевой смеси, чем в воздухе (сравните кривые 1, 2 на рис. 3). Поэтому можно ожидать, что в кислородно-гелиевой смеси раньше произойдет высыхание слизистой поверхности бронхов. Подсохшая поверхность будет отдавать меньше воды, поэтому ее температура повысится. В результате даже вдыхание сухой кислородно-гелиевой смеси приведет к прогреванию верхних дыхательных путей.

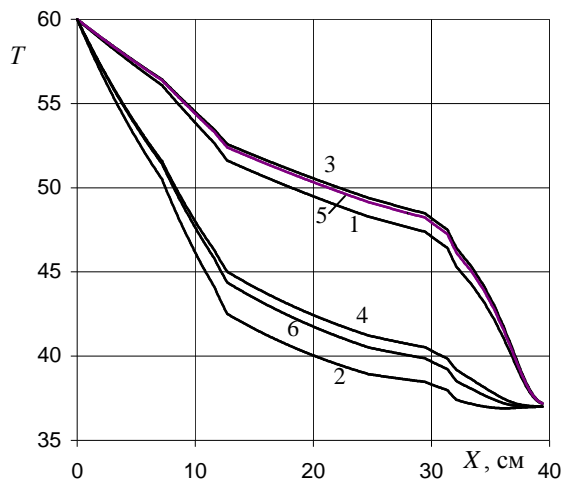


Рис. 1. Распределение температуры воздуха (1, 3, 5) и кислородно-гелиевой смеси (2, 4, 6) по длине дыхательного тракта при температуре на входе в ротовую полость  $T_0 = 60^\circ\text{C}$ . Влажность газа на входе в ротовую полость  $C_0/C_{\text{нас}} = 0$  (1, 2, 5, 6) и  $C_0/C_{\text{нас}} = 0,23$  (3, 4). Коэффициенты массопереноса «нормальные» (см. табл.) (1-4) и уменьшенные в три раза (5, 6). По оси ординат – температура газа,  $^\circ\text{C}$ ; по оси абсцисс – расстояние от входа в ротовую полость, см

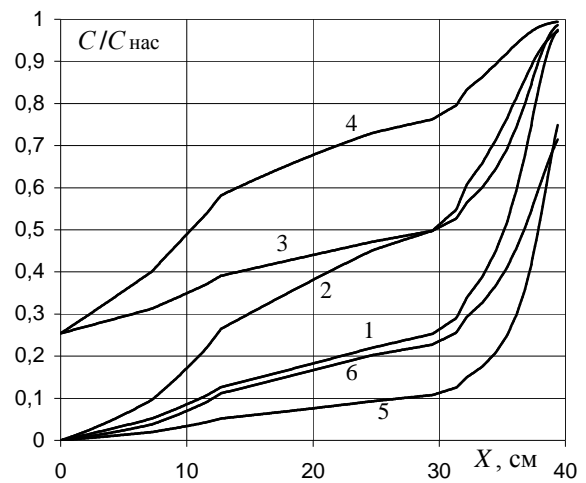


Рис. 2. Распределение относительной влажности воздуха (1, 3, 5) и кислородно-гелиевой смеси (2, 4, 6) по длине дыхательного тракта. Нумерация и параметры кривых – см. рис. 1. По оси ординат – относительная влажность водяных паров  $C/C_{\text{нас}}$ ; по оси абсцисс – расстояние от входа в ротовую полость, см.

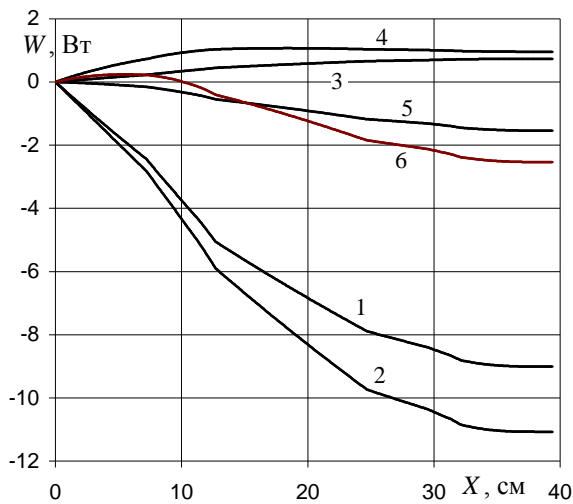


Рис. 3. Количество тепла, поступающее из воздуха (1, 3, 5) и кислородно-гелиевой смеси (2, 4, 6) в стенку дыхательных путей. Нумерация и параметры кривых – см. рис. 1. По оси ординат – суммарный тепловой поток, переходящий из газовой смеси в стенку на участке от входа в ротовую полость до данного бронха, Вт; по оси абсцисс – расстояние от входа в ротовую полость, см

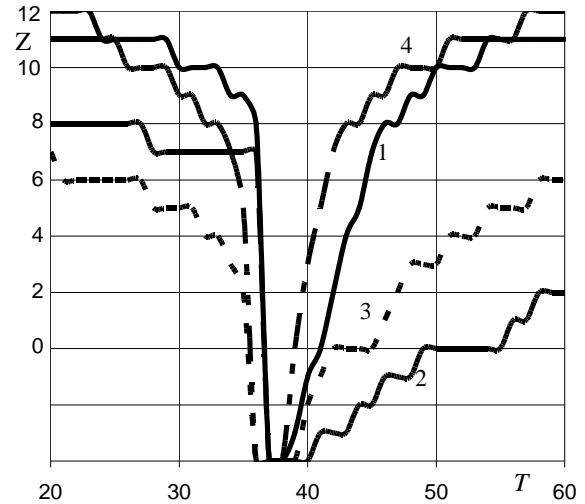


Рис. 4. Глубина выравнивания температуры воздуха (1, 3), кислородно-гелиевой смеси (2, 4) и тела. Нумерация и параметры кривых – см. рис. 1. По оси ординат – номер поколения, по отношению к которому температура газа отличается от температуры тела меньше, чем на  $1^\circ\text{C}$ ; по оси абсцисс – температура вдыхаемого сухого газа,  $^\circ\text{C}$

Таблица

Параметры модели трахеобронхиального дерева

$z$	$d$	$l$	$L$	$Re_1$	$Re_2$	$K_1$	$K_2$	$H_1$	$H_2$
$z_0$	3	7,2	7,2	1188	376	0,90	1,38	13,0	28,2
$z_1$	1,4	2,3	9,5	2546	806	3,06	4,66	43,9	95,5
$z_2$	1,4	2,1	11,6	2546	806	3,17	4,83	45,5	99,0
$z_3$	0,95	1,1	12,7	3753	1188	6,06	9,22	86,8	189,0
0	1,8	12	24,7	1981	627	1,23	1,87	17,6	38,3
1	1,22	4,76	29,5	1461	463	0,76	0,97	10,9	19,8
2	0,83	1,9	31,4	1074	340	1,61	2,06	23,1	42,2
3	0,56	0,76	32,1	796	252	3,67	4,70	52,7	96,4
4	0,45	1,27	33,4	495	157	1,56	1,95	22,3	40,0
5	0,35	1,07	34,5	318	101	1,44	1,77	20,6	36,3
6	0,28	0,9	35,4	198,9	63,0	1,31	1,56	18,7	31,9
7	0,23	0,76	36,1	121,1	38,3	1,15	1,31	16,5	26,8
8	0,186	0,64	36,8	74,9	23,7	1,01	1,07	14,5	21,9
9	0,154	0,54	37,3	45,2	14,3	0,85	0,81	12,2	16,7
10	0,13	0,46	37,8	26,8	8,5	0,67	0,57	9,7	11,6
11	0,109	0,39	38,2	16,0	5,1	0,51	0,37	7,3	7,6
12	0,095	0,33	38,5	9,2	2,9	0,36	0,23	5,1	4,6
13	0,082	0,27	38,8	5,3	1,7	0,25	0,14	3,6	2,8
14	0,074	0,23	39	2,9	0,9	0,15	0,07	2,1	1,5
15	0,066	0,2	39,2	1,6	0,5	0,08	0,04	1,2	0,8
16	0,06	0,165	39,3	0,9	0,3	0,05	0,02	0,7	0,4

Обозначения:  $z$  – номер поколения бронхов,  $z_0$  – ротовая полость,  $z_1$  – ротоглотка,  $z_2$  – гортаноглотка,  $z_3$  – гортань, 0 – трахея;  $d$  – диаметр,  $l$  – длина дыхательных путей,  $L$  – расстояние до входа в ротовую полость, см;  $Re$  – число Рейнольдса для объемного расхода 0,4 л/с; индекс 1 соответствует воздуху, 2 – кислородно-гелиевой смеси (80%-He, 20%-O<sub>2</sub>);  $K$  – коэффициент массопереноса, см/с;  $H$  – коэффициент теплопереноса, Вт/м<sup>2</sup>К.

Наши результаты подтверждают выводы [1, 6] об участии всего бронхиального дерева в кондиционировании (согревании и увлажнении) воздуха. Из рис. 4 видно, что при одном и том же небольшом отличии температуры газовой смеси от температуры тела согревание холодной смеси наступает в более дистальных бронхах, чем охлаждение подогретой смеси.

#### 4. Выводы

1. Во время дыхания подогретыми газовыми смесями кровотока и теплопроводность стенок бронхов оказываются достаточными для быстрого выравнивания температуры стенки, поэтому тепломассообмен можно описывать стационарной моделью.
2. При дыхании подогретыми смесями кислородно-гелиевая смесь быстрее остывает, но лучше увлажняется, чем воздух, из-за больших коэффициентов тепло- и массопереноса.
3. Испарение воды с поверхности слизистой оболочки приводит к тому, что тепло передается от стенки в газ даже при дыхании подогретыми смесями. Уменьшение испарения, например, из-за частичного высыхания слизистой оболочки, приводит к передаче тепла от кислородно-гелиевой смеси в стенку верхних дыхательных путей.

## Благодарности

Работа была выполнена при частичной поддержке грантов МНТЦ-0702; НШ-1996.2003.1.

## Список литературы

1. *Беляков Н.А., Сериков В.Б., Рамм М.С.* Моделирование стационарного массотеплообмена в респираторном тракте // *Биофизика*. 1986. Т. 31. № 5. С. 901-907.
2. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981.
3. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
4. *Кисляков Ю.Я., Бреслав И.С.* Дыхание, динамика газов при гипербарии. Л., 1988.
5. *Рамм М.С., Сериков В.Б., Шульга В.П., Беляков Н.А.* Моделирование нестационарного теплообмена воздуха в легких // *Физиол. журн.* 1989. Т. 35. №1. С. 113-119.
6. *Сериков В.Б., Рамм М.С., Пастернак Г.Л., Беляков Н.А.* Математическая модель влияния массопереноса на теплообмен в респираторном тракте // *Физиол. журн. СССР*. 1986. Т. 62. № 10. С. 1415-1418.
7. *Baile E.M., Godden D.J., Pare P.D.* Mechanism for increase in tracheobronchial blood flow induced by hyperventilation of dry air in dogs // *J.Appl. Physiol.* 1990. V. 68. № 1. P. 105-112.
8. *Jammes Y., Nail B., Mei N., Grimaund C.* Laryngeal afferents activated by phenildiguanide and their response to cold air or helium-oxygen // *Respir. Physiol.* 1987. V. 67. № 3. P. 379-389.
9. *Hanna L.M. and Scherer P.W.* Measurement of local mass transport coefficient in a cast model of the human upper respiratory tract // *Trans. ASME. J. Biomech. Eng.* 1986. V. 108. № 1. P. 12-18.
10. *Hanna L.M. and Scherer P.W.* A theoretical model of localized heat and water vapor transport in the human respiratory tract // *Trans. ASME. J. Biomech. Eng.* 1986. V. 108. № 1. P. 19-27.
11. *Le Merre C., Kim H.H.* Airway blood flow responses to temperature and humidity of inhaled air // *Respir. Physiol.* 1996. V. 105. № 3. P. 235-239.
12. *Shogenova L., Novikov K., Koutsenko M., Godiaev M., Chuchalin A.* Influence of heliox upon pulmonary haemodynamics in COPD patients // *Eur. Resp. Soc., Congr.* 2001.
13. *Wagner E.M., Brown R.H.* Blood flow distribution within the airway wall // *J.Appl. Physiol.* 2002. V. 92. № 5. P. 1964-1969.
14. *White D.A., Parsons G.H.* Tracheal blood flow during spontaneous and mechanical ventilation of dry gases in sheep // *J. Appl. Physiol.* 1990. V. 69. № 3. P. 1117-1122.

## MATHEMATICAL MODEL OF INFLUENCE OF THE RESPIRATION BY HEATED HELIUM-OXYGEN ON HEAT AND MASS EXCHANGE

**A.I. Dyachenko, O.V. Manyugina (Moscow, Russia)**

The mathematical model of heat and mass transfer in the human respiratory tract is elaborated. The theoretical analysis of helium-oxygen respiration influence on heat and mass exchange is conducted. During the respiration by heated gas mixtures the blood flow and thermal conductivity of bronchi walls are sufficient for fast leveling of wall temperature, therefore heat and mass transfer can be described by stationary model. It is shown that at the respiration by heated mixtures the helium-oxygen gets cold more rapidly but it becomes moist better than air due to the great coefficients of heat and mass transfer. The water evaporation from the surface of the mucous coat brings into existence heat transfer from the wall to the gas even at the respiration by heated mixtures. The decrease of evaporation, for example in view of partial drying out mucous coat, leads to heat transfer from helium-oxygen to the wall of the upper respiratory tract.

**Key words:** mathematical model, respiration, respiratory tract, heated mixture, helium-oxygen, heat and mass transfer.

*Получено 29 августа 2003*