

УДК 531/534:57+612.7

## **БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКИ. ЧАСТЬ 2**

**Д.А. Черноус, С.В. Шилько**

Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого Национальной академии наук Беларуси, 32а, ул. Кирова, 246050, Гомель, Беларусь, e-mail: depa10@tut.by

**Аннотация.** Анализируется нормальная и тангенциальная жесткость периодонтальной связки с учетом пористости и анизотропии указанного биоматериала. Для составления уравнений равновесия в рамках макроскопической модели вводится предположение о правомерности гипотезы ортотропного основания Винклера. Эффективные деформационные характеристики связки определяются на основе статистического метода моментных функций, дающего наиболее точные оценки свойств пористой матрицы при объемной доле содержания пор менее 80%, и соотношений теории армирования в предположении абсолютной адгезии и линейной упругости волокон коллагена и соединительной ткани. Полученные результаты сравниваются с конечноэлементным решением.

**Ключевые слова:** периодонтальная связка, ортотропный слой, гипотеза Винклера, метод моментных функций, нормальная и касательная жесткость.

### **Введение**

Анализ структуры и свойств периодонтальной связки, например, в соответствии с [1–3], показывает, что для описания периодонтальной связки применима модель в виде тонкого слоя, адгезионно связанного с поверхностью зуба и альвеолярной костью. Учет пористости соединительной ткани и ориентированных волокон коллагена, обуславливающих неоднородность и анизотропию связки, позволяют, во-первых, получить ее более адекватное описание, во-вторых, обоснованно выбрать рецептуры и структурные схемы материала искусственного периодонта. Ниже рассматривается расчет перемещений корня зуба и напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки с учетом неоднородности и анизотропии указанной биоткани.

### **Формулировка задачи**

Рассмотрим волокноармированный пористый композит в виде тонкого слоя, адгезионно связанного с поверхностью зуба и альвеолярной костью. В предположении, что модуль упругости коллагеновых волокон значительно превосходит модуль упругости пористой матрицы и волокна направлены нормально к поверхности корня зуба, деформационные свойства данного однонаправленного композита можно охарактеризовать с помощью пяти независимых параметров – компонент тензора

модулей упругости  $\lambda_{mn}$  ( $n, m = 1..6$ ). Эти параметры определяются упругими константами Ламе и объемной долей содержания материала волокон  $\lambda_f, \mu_f, c$ , а также упругими характеристиками и пористостью материала матрицы  $\lambda_m, \mu_m, P$ , соответственно.

Используя статистический метод моментных функций [4], независимые компоненты тензора модулей упругости исследуемого материала можно определить следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda_{13} &= c\lambda_f + (1-c)\lambda_1 - \frac{c(1-c)(\lambda_f - \lambda_1)(\lambda_f + \mu_f - \lambda_1 - \mu_1)}{c(\lambda_1 + \mu_1) + (1-c)(\lambda_f + \mu_f) + m}, \\ \frac{1}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{12}) &= c(\lambda_f + \mu_f) + (1-c)(\lambda_1 + \mu_1) - \frac{c(1-c)(\lambda_f + \mu_f - \lambda_1 - \mu_1)^2}{c(\lambda_1 + \mu_1) + (1-c)(\lambda_f + \mu_f) + m} \\ \lambda_{33} &= c(\lambda_f + 2\mu_f) + (1-c)(\lambda_1 + 2\mu_1) - \frac{c(1-c)(\lambda_f - \lambda_1)^2}{c(\lambda_1 + \mu_1) + (1-c)(\lambda_f + \mu_f) + m}, \\ \lambda_{44} &= c\mu_f + (1-c)\mu_1 - \frac{c(1-c)(\mu_f - \mu_1)^2}{c\mu_1 + (1-c)\mu_f + m}, \\ \lambda_{66} &= c\mu_f + (1-c)\mu_1 - \frac{c(1-c)(\mu_f - \mu_1)(l + 3m)}{(c\mu_1 + (1-c)\mu_f)(l + 3m) + m(l + m)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l &= \frac{(3\lambda_f + 2\mu_f)(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{3[c(3\lambda_1 + 2\mu_1) + (1-c)(3\lambda_f + 2\mu_f)]} - \frac{2}{3}m, \\ m &= \frac{\mu_1\mu_f}{c\mu_1 + (1-c)\mu_f}, \quad \mu_1 = \mu_m(1-P)^2 \left(1 - P \frac{3\lambda_m - 2\mu_m}{9\lambda_m + 14\mu_m}\right)^{-1}, \\ \lambda_1 &= \left(2\lambda_m - \frac{3P(\lambda_m + 2\mu_m)(3\lambda_m - 2\mu_m)}{9\lambda_m + 14\mu_m - P(3\lambda_m - 2\mu_m)}\right) (1-P)^2 \left(2 - P \frac{3\lambda_m - 2\mu_m}{2\mu_m}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Постоянные Ламе связаны с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  известными соотношениями

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

### Метод решения

Зная упругие характеристики материала периодонтальной связки, можно определить смещения зуба при силовом воздействии. Для этого необходимо решить задачу о равновесии зуба под действием внешних усилий  $\vec{F}_i$  ( $i = 1..n$ ) и адгезионных напряжений  $\vec{p}(\vec{r}_S)$ , возникающих на поверхности раздела «связка – корень зуба». Здесь  $\vec{r}_S$  – радиус-вектор рассматриваемой точки на поверхности корня зуба. Адгезионные напряжения зависят от смещений точек  $\vec{r}_S$ . Смещение любой точки твердого тела можно выразить через 6 независимых величин: смещение  $\vec{u}$  некоторой точки  $O$  и углы

поворота относительно осей координат  $\varphi_i$ . В случае малых углов поворота смещения можно представить следующим образом

$$u_x = u_{xO} + z\varphi_y - y\varphi_z, \quad u_y = u_{yO} + x\varphi_z - z\varphi_x, \quad u_z = u_{zO} + y\varphi_x - x\varphi_y. \quad (3)$$

Тогда уравнения равновесия зуба можно записать в виде

$$\iint_S \vec{p}(\vec{r}_S, \vec{u}_O, \vec{\varphi}) dS + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \quad \iint_S \vec{r}_S \times \vec{p}(\vec{r}_S, \vec{u}_O, \vec{\varphi}) dS + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор точки приложения силы  $\vec{F}_i$ . Интегрирование ведется по площади контакта корня зуба с периодонтальной связкой. Решение системы уравнений (4) позволяет определить  $\vec{u}_O$ ,  $\vec{\varphi}$  и, следовательно, смещения всех точек зуба. Реализация изложенной методики затрудняется тем, что для определения перемещений необходимо знать функцию влияния для ортотропного слоя сложной конфигурации, адгезионно связанным с жестким основанием. Определение указанной функции представляет значительные трудности даже в двумерной постановке [5, 6].

Можно показать, что решение задачи можно существенно упростить, если принять во внимание характерные размеры и условия нагружения периодонтальной связки.

Известно, что для тонких покрытий справедлива гипотеза Винклера [7]. Если характерные размеры области контакта  $L$  значительно превосходят толщину покрытия, последнее можно представить как совокупность несвязанных упругих элементов, и контактное давление определяется простым выражением

$$\vec{p}(\vec{r}_S) = -\frac{1}{h}(k_n \vec{u}_n(\vec{r}_S) + k_\tau \vec{u}_\tau(\vec{r}_S)). \quad (5)$$

Здесь  $\vec{u}_n$ ,  $\vec{u}_\tau$  – нормальное и тангенциальное смещение точки поверхности покрытия;  $h$  – толщина покрытия;  $k_n$ ,  $k_\tau$  – нормальная и тангенциальная жесткость покрытия, соответственно.

Правомерность гипотезы (5) для тонких ортотропных покрытий (в двумерной постановке) показана в работе [6], где соотношения давлений и перемещений выведены из общего решения контактной задачи для ортотропной полосы при  $L \gg h$ . В [5] также показано, что для полосы, адгезионно связанной с жестким основанием, нормальная жесткость совпадает с компонентой  $\lambda_{33} = \lambda_{zz}$  тензора модулей упругости (ось  $z$  направлена нормально основанию), а тангенциальная – с модулем сдвига  $G_{xz}$ . Таким образом

$$k_n = \lambda_{33}, \quad k_\tau = \lambda_{44}. \quad (6)$$

Для подтверждения корректности данного подхода в трехмерной постановке рассмотрим равновесие квадратной пластины с длиной стороны  $L$  на ортотропном слое толщиной  $h$  (рис. 1).

Упругие характеристики материала слоя выбраны следующими:  $E_x = E_y = 5$  МПа;  $E_z = 50$  МПа;  $\nu_{xy} = 0,25$ ;  $\nu_{xz} = \nu_{yz} = 0,1$ ;  $G_{xy} = E_x/2(1 + \nu_{xy}) = 2$  МПа;  $G_{xz} = G_{yz} = 10$  МПа. Нормальная и тангенциальная жесткость слоя выражаются следующим образом

$$k_n = \frac{E_z^2(1 - \nu_{xy})}{E_z(1 - \nu_{xy}) - 2E_x\nu_{xz}^2}, \quad k_\tau = G_{xz}. \quad (7)$$

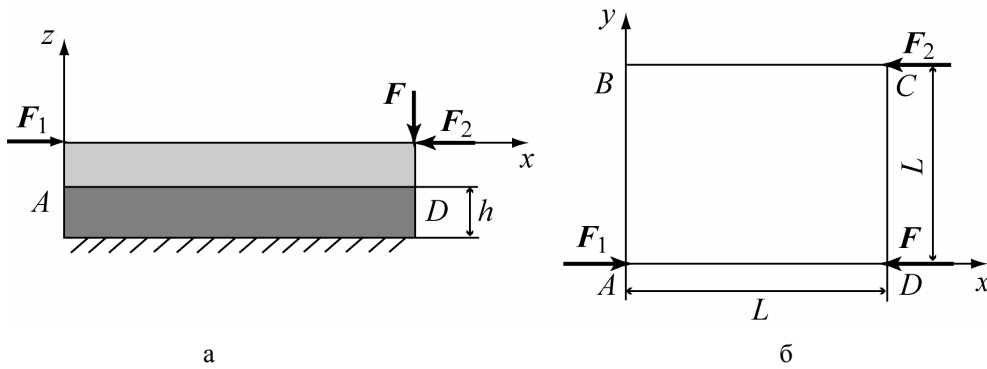


Рис. 1. Схема нагружения ортотропного слоя: а – вид сбоку, б – вид сверху

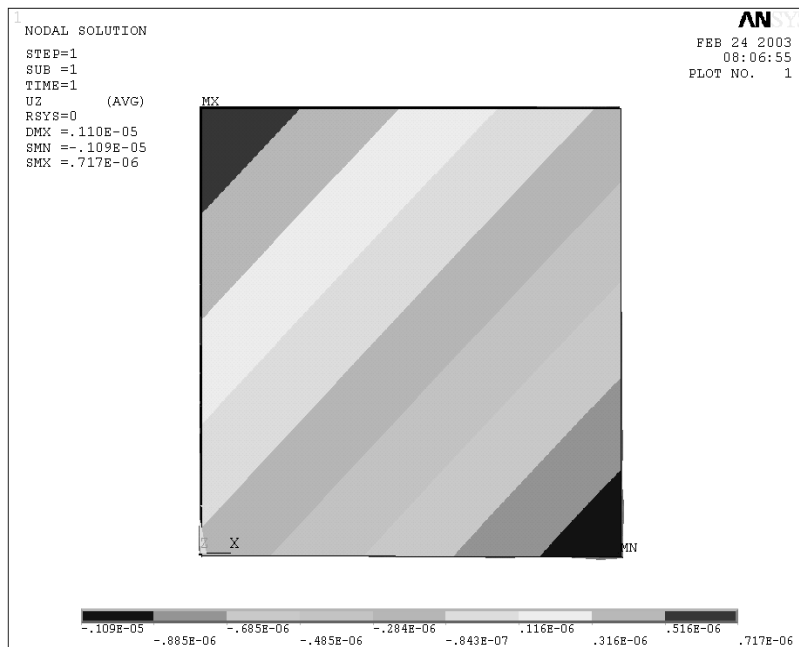


Рис. 2. Распределение осадки  $u_z$  точек жесткой пластины

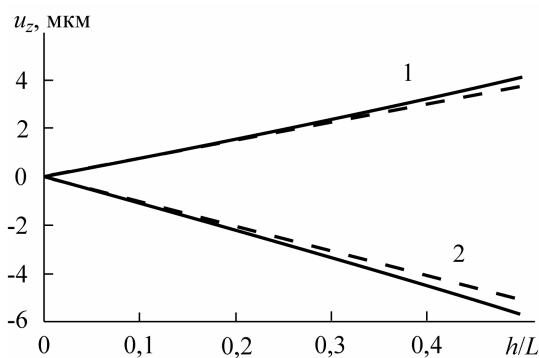


Рис. 3. Зависимость смещения точек  $B$  (кривая 1) и  $D$  (кривая 2) от отношения толщины покрытия  $h$  к длине стороны  $L$

На рис. 2 представлено распределение смещений  $u_z$  точек пластины под действием сжимающего усилия  $F_z = -100$  Н, приложенного к точке  $A$  (рис. 1), найденное численным методом конечных элементов (МКЭ). Используя соотношения (3-5), для смещений точек  $D$  и  $B$  получим

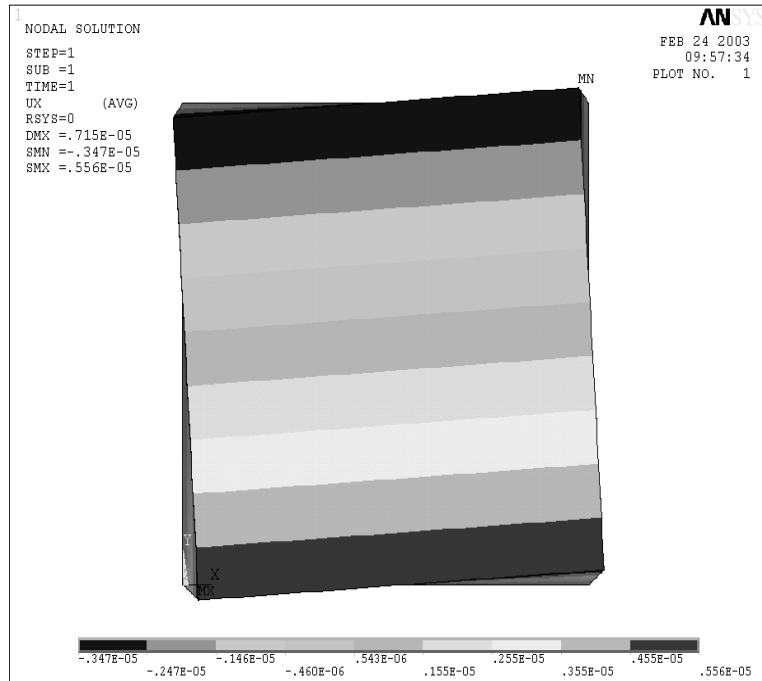


Рис. 4. Распределение перемещения  $u_x$  точек жесткой пластины

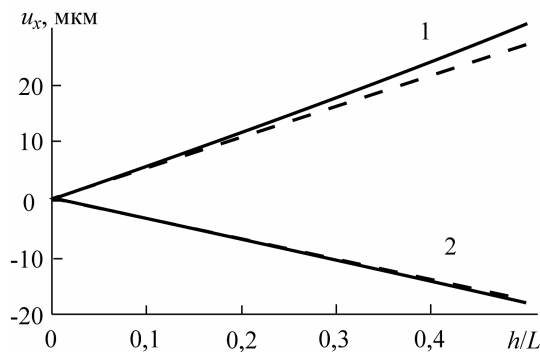


Рис. 5. Зависимость смещения точек А (кривая 1) и С (кривая 2) от отношения толщины покрытия  $h$  к длине стороны  $L$

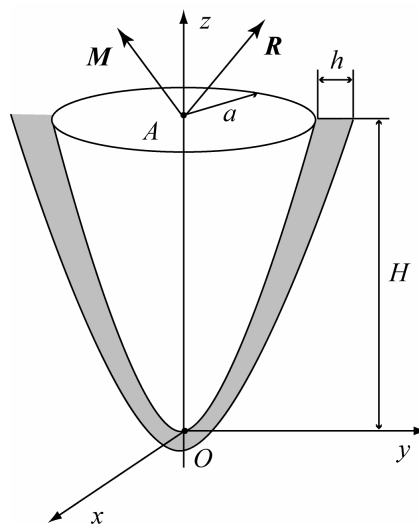


Рис. 6. Модель связочного соединения корня зуба с альвеолярной костью

$$u_B = \frac{5Fh}{k_n L^2}, u_D = -\frac{7Fh}{k_n L^2}.$$

Результаты использования полученных выражений, показанные пунктиром на рис. 3, сопоставлены с результатами расчета численным методом конечных элементов (сплошные линии).

Далее рассмотрим нагружение пластины силами  $F_{1x} = 200$  Н и  $F_{2x} = 100$  Н (рис. 1). В соответствии с гипотезой (5) для смещений точек А и С запишем

$$u_{A,C} = u_0 \pm \frac{L}{2}(1 + \sin \varphi - \cos \varphi),$$

где

$$u_0 = \frac{F_1 - F_2}{k_\tau L^2} h, \varphi = \arcsin\left(\frac{6(F_1 + F_2)}{k_\tau L^3} h\right).$$

Поле перемещений точек пластины, найденное методом конечных элементов, показано на рис. 4. На рис. 5 сопоставлены смещения точек А и С, определенные МКЭ (сплошные линии) и с использованием гипотезы Винклера (пунктирные линии). Анализ графиков на рис. 3 и 5 позволяет заключить, что при  $h < 0,2L$  гипотеза Винклера (5) дает возможность достаточно точно прогнозировать перемещения точек твердого тела на ортотропном слоистом основании.

Известно [2], что длина полуосей эллипсов верхнего поперечного сечения корня зуба более чем на порядок величины превышает толщину периодонтальной связки. Следовательно, гипотеза (5) может использоваться для описания смещений корня зуба при силовых воздействиях, и соотношения (3), (4) и (5) позволяют определить смещения корня зуба под действием внешних нагрузок. Коэффициенты жесткости  $k_n$  и  $k_\tau$  определяются по формулам (1), (2) и (6).

### Пример расчета

Используем изложенное решение для анализа равновесия тела, близкого по форме корню зуба. В качестве примера рассмотрим конус высотой  $H$  и радиусом верхнего поперечного сечения  $a$  (рис. 6). Поверхность контакта конуса с трансверсально-изотропной связкой толщиной  $h$  описывается следующим образом

$$z(x, y) = \frac{H}{a} \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8)$$

Зная форму поверхности контакта, можно определить нормальное и тангенциальное смещения точек поверхности  $\vec{u}_n, \vec{u}_\tau$ . Подставляя  $\vec{u}_n, \vec{u}_\tau$  в равенства (5) и (4), уравнения равновесия можно записать в виде

$$u_{xO} \frac{\pi a}{2\sqrt{a^2 + H^2}} \left[ (k_n - k_\tau) H^2 + 2k_\tau (a^2 + H^2) \right] + \varphi_y \frac{1}{3} \pi a H \sqrt{a^2 + H^2} (k_n + k_\tau) = R_x,$$

$$u_{yO} \frac{\pi a}{2\sqrt{a^2 + H^2}} \left[ (k_n - k_\tau) H^2 + 2k_\tau (a^2 + H^2) \right] - \varphi_x \frac{1}{3} \pi a H \sqrt{a^2 + H^2} (k_n + k_\tau) = R_y,$$

$$u_{zO} \frac{\pi a}{\sqrt{a^2 + H^2}} (k_n a^2 + k_\tau H^2) = R_z,$$

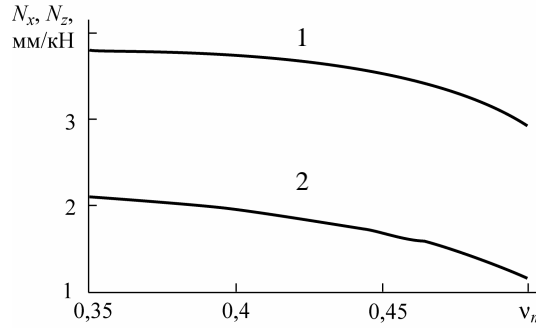


Рис. 7. Зависимость продольной (кривая 1) и поперечной (кривая 2) податливости периодонтальной связки от коэффициента Пуассона твердой фазы  $v_m$  при пористости  $P=0,1$

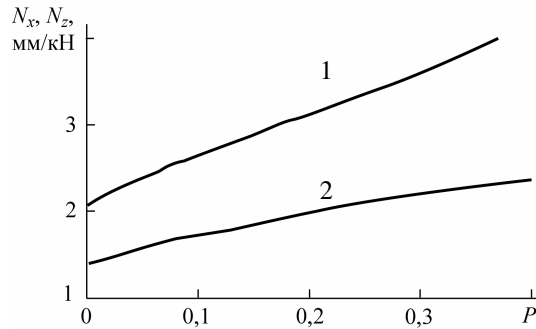


Рис. 8. Зависимость продольной (кривая 1) и поперечной (кривая 2) податливости периодонтальной связки от пористости  $P$  при  $v_m = 0,475$

$$\begin{aligned}
 -u_{yO} \frac{1}{3} \pi a H \sqrt{a^2 + H^2} (k_n + k_\tau) + \varphi_x \frac{1}{4} \pi a \sqrt{a^2 + H^2} [k_n (a^2 + H^2) + k_\tau H^2] &= M_x - H R_y, \\
 u_{xO} \frac{1}{3} \pi a H \sqrt{a^2 + H^2} (k_n + k_\tau) + \varphi_y \frac{1}{4} \pi a \sqrt{a^2 + H^2} [k_n (a^2 + H^2) + k_\tau H^2] &= M_y + H R_x, \\
 \varphi_z \frac{1}{2} k_\tau \pi a^3 \sqrt{a^2 + H^2} &= M_z.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\vec{R}, \vec{M}$  – главный вектор и главный момент внешних сил, приведенные к точке  $A$  (рис. 6). Если известны свойства компонент связки  $\lambda_f, \mu_f, c, \lambda_f, \mu_f$  и  $P$ , выражения (1), (2) и (6) позволяют определить величины  $k_n$  и  $k_\tau$ . Для определения перемещений следует решить систему (9).

В качестве примера рассмотрим нагружение конуса ( $a = 0,3$  см,  $H = 1$  см) силой  $\vec{R}$ , приложенной в точке  $A$  и лежащей в плоскости  $xz$  ( $\vec{M} = 0, R_y = 0$ ). Введем две дополнительные величины

$$N_x = \frac{u_{xA}}{R_x}, \quad N_z = \frac{u_{zA}}{R_z}.$$

Величину  $N_x$  назовем поперечной, а  $N_z$  – продольной податливостью зуба. Податливости определяются формой корня зуба  $a, H$ , а также упругими характеристиками и пористостью композитной связки  $\lambda_f, \mu_f, c, \lambda_f, \mu_f, P$ .

На рис. 7 и 8 представлены зависимости податливости связки от коэффициента Пуассона и пористости твердой фазы при  $E_f = 10$  МПа,  $E_m = 1$  МПа,  $\nu_f = 0,35$  и  $c = 0,2$ . При указанных параметрах продольная податливость более чем в 2 раза превышает поперечную. Если материал твердой фазы матрицы является несжимаемым

( $v_m > 0,45$ ), податливость связки заметно уменьшается с ростом  $v_m$ . Увеличение пористости матрицы приводит к увеличению податливости, причем скорость изменения продольной податливости с ростом  $P$  значительно превосходит скорость изменения поперечной податливости.

### Заключение

Использование гипотезы Винклера позволяет упростить биомеханический анализ периодонтальной связки в виде пористого ортотропного слоя, адгезионно связанного с корнем зуба и альвеолярной костью. Полученные соотношения могут быть использованы для определения смещений зуба под действием жевательной или корректирующей нагрузки, а также при идентификации упругих характеристик армирующей и матричной компонент периодонтальной связки.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке фонда БРФФИ–РФФИ (проект T02P–014).

### Список литературы

1. *Nyashin Y.I., Nyashin M.Y.* Biomechanical modelling of periodontal ligament behaviour under various mechanical loads // *Acta of Bioengineering and Biomechanics*. 2000. V. 2. № 2. P. 67–74.
2. *Наумович С.А., Крушевский А.Е.* Биомеханика системы зуб-периодонт. Минск: Экономические технологии, 2000.
3. *Шилько С.В.* Биомеханический анализ периодонтальной связки. Часть 1 // *Russian Journal of Biomechanics*. 2003. Т. 7. № 3. С. 00–00.
4. *Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А.* Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3 томах. Т. 1. Механика материалов. Киев: Наукова думка, 1982.
5. *Босаков С.В.* Изгиб сжатой прямоугольной пластинки на упругом основании любого типа // *Материалы, технологии, инструменты*. 1997. Т. 2. С. 93-95.
6. *Можаровский В.В., Старжинский В.Е.* Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи. Минск: Наука и техника, 1988.
7. *Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984.

## BIOMECHANICAL ANALYSIS OF PERIODONTAL LIGAMENT. PART 2

**D.A. Chernous, S.V. Shilko (Gomel, Belarus)**

The normal and tangential stiffness of the periodontal ligament are being analyzed with account of porosity and anisotropy of the biomaterial. To derive equilibrium equations within the macroscopic model a supposition is put forward on the relevance of Winkler's hypothesis of the orthotropic base. Efficient deformation characteristics of the ligament are estimated on the base of the statistical method of moment functions yielding most accurate estimates of the porous matrix properties at volume share of pores not less than 80% and the reinforcement theory relations in supposition of the absolute adhesion and linear elasticity of



collagen fibers and connective tissues. The results obtained are compared with solution by the finite element method.

**Key words:** periodontal ligament, orthotropic layer, Winkler's hypothesis, method of moment functions, normal and tangential stiffness.

*Получено 24 апреля 2003*