

УДК 531/534:57+612.7

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФАЗЫ ДЕЙСТВИЯ ТОЛЧКОВОЙ НОГИ ПРИ ТОЛКАНИИ ЯДРА**

**А. Рахикайнен\*, П. Лухтанен\*\***

\*Технический университет города Хельсинки, Helsinki University of Technology, Department of Engineering Physics and Mathematics, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, PL 1000, 02015 ТКК, Otakaari 1, Espoo, Finland, E-mail: ahti.rahikainen@hut.fi

\*\*KIHU – Research Institute for Olympic Sports

**Аннотация.** Целью данной работы является изучение механических аспектов толкания ядра в фазе действия толчковой ноги и оценка его эффективности. Исследования проводились на основе анализа двух выступлений Арси Харью (Arsi Harju) в Кирёскоки (Kygöskoski), результаты которых различались на 1,43м: 4 июля 1998г., 6 попыток, результат–20,90м; 22 июля 2000г., 6 попыток, результат–19,47м. На основе проведенных измерений [1-2] определены эффективность фазы действия толчковой ноги и определяющие её факторы. В работе сделан более точный анализ такого спортивного движения на основе полученного математическими методами уравнения траектории центра масс толкателя ядра. Вычисления, выполненные с помощью этого уравнения, показали увеличение как скорости движения центра масс, так и силы, действующей на него, в фазе отталкивания опорной ноги. Эффективность этой фазы оценивалась величинами скорости и силы. В основу исследований положены данные, опубликованные в отчетах [5, 7, 8].

**Ключевые слова:** толкание ядра, фаза действия толчковой ноги, механика, движение центра масс, скорость, сила.

### **Введение**

Это исследование вместе с работами [5,7] содержит полное последовательное описание движений при толкании ядра в виде математических уравнений. В предыдущих работах, посвященных толканию ядра [9-12], содержатся данные экспериментальных измерений, проведенные КИУ (Институтом изучения олимпийских видов спорта) и служащие исходными данными для настоящего исследования. В виду отсутствия понимания физической природы процессов, происходящих при движениях, осуществляющихся при толкании ядра, предыдущие исследования приводят к неполным и противоречивым выводам. О прыжке, предшествующем фазе отталкивания толчковой ногой, в работе [9] говорится следующее: «Плоское направление взлета влево должно решительно поддерживаться своевременным и правильно распределенным ударным действием правой ноги. По-другому, взлет может быть особым прыжковым движением с чрезмерно крутым подъемом вместе с соразмерным резким опусканием правой ноги». Однако из данных той же работы следует, что «особое прыжковое движение» приводит к дальности

полета ядра на два метра большей, чем при первом упомянутом способе. Дело в том, что прыжковое движение создает значительные напряжения в мышцах отталкивающейся ноги в момент контакта с грунтом, и это приводит к увеличению толкающей силы и ускорения центра масс толкателя ядра. Другой пример из работы [9]: «Вывод Пальма (1990) о том, что активность правой ноги является решающим фактором для ускорения вращения, объясняется так: сообщение ускорения центру тяжести от правой ноги в обязательном порядке связано с работой ноги левой». Тем не менее, вывод Пальма правилен. Это связано с «мощным поворотом туловища», считающимся здесь главным фактором, дающим возможность увеличивать дальность полета ядра, что никаким образом не может рассматриваться таковым, потому что вращательное движение туловища толкателя ядра происходит после силового поворота в начале попытки перед прыжком в плоскости. В этом прыжке промежуток времени, отведенный на толчок ядра рукой, мал из-за высокой скорости вращения туловища и, тем не менее, последняя сильно влияет на увеличение скорости толчка рукой.

В одних и тех же соревнованиях дальность полета ядра может изменяться на 1 м. Техника толчка не всегда реализуется правильно и можно достичь максимальной дальности полета ядра, соответствующей состоянию спортсмена, корректируя действия толкателя ядра определенным образом. Для улучшения техники толчка необходимо изучить причины, по которым удивительным образом достигаются хорошие результаты, а в других случаях последние хуже, чем обычно. Возможно, что некоторые фазы толчка реализуются неудачно, что приводит к более слабым результатам. В этом случае, используя «скоростные кривые толчка» из отчетов КИУ (рис. 1 [1], рис. 2 [2]), возможно определить фазу и причину неудачной попытки. Если известно время фазы толчка руки, оно может быть выделено в конце «скоростной кривой толчка». Поэтому «скоростная кривая толчка» разделяется на две части: фазу действия толчковой ноги и фазу толчка рукой. Теперь скорость толкания ядра в конце фазы действия толчковой ноги, названная здесь скоростью переноса  $n_0$ , может быть определена из графика. Тогда, сравнивая дальнейший ход «скоростной кривой толчка» при лучшей и более слабой попытках, мы выясним, что в данной фазе послужило причиной ухудшения результата. Если таким образом сравнить две указанные выше попытки, то оказывается,

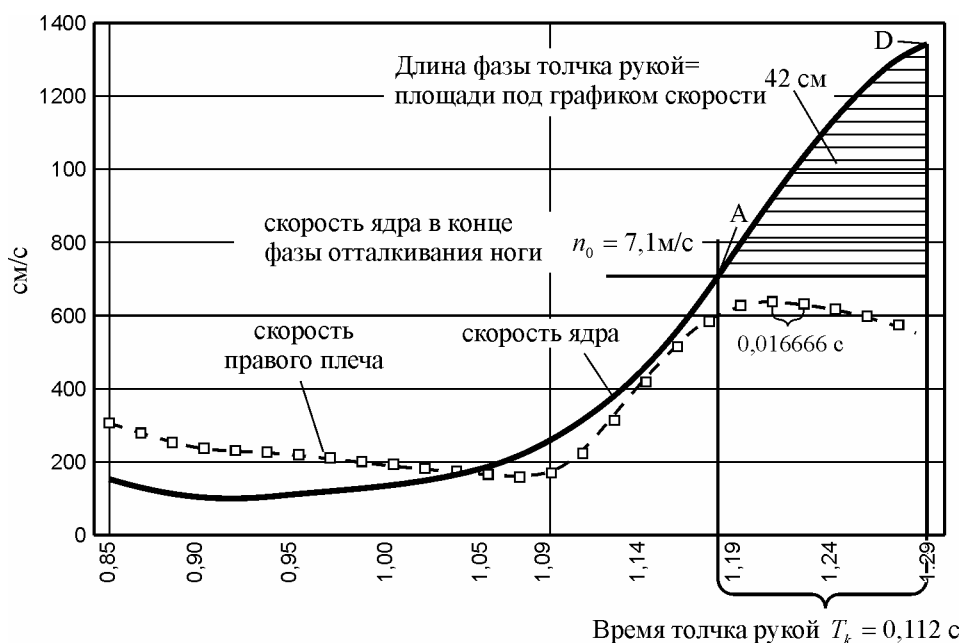


Рис. 1. Толчок ядра на 20,90 м. Время фазы толчка рукой и величина скорости ядра в конце фазы отталкивания ноги

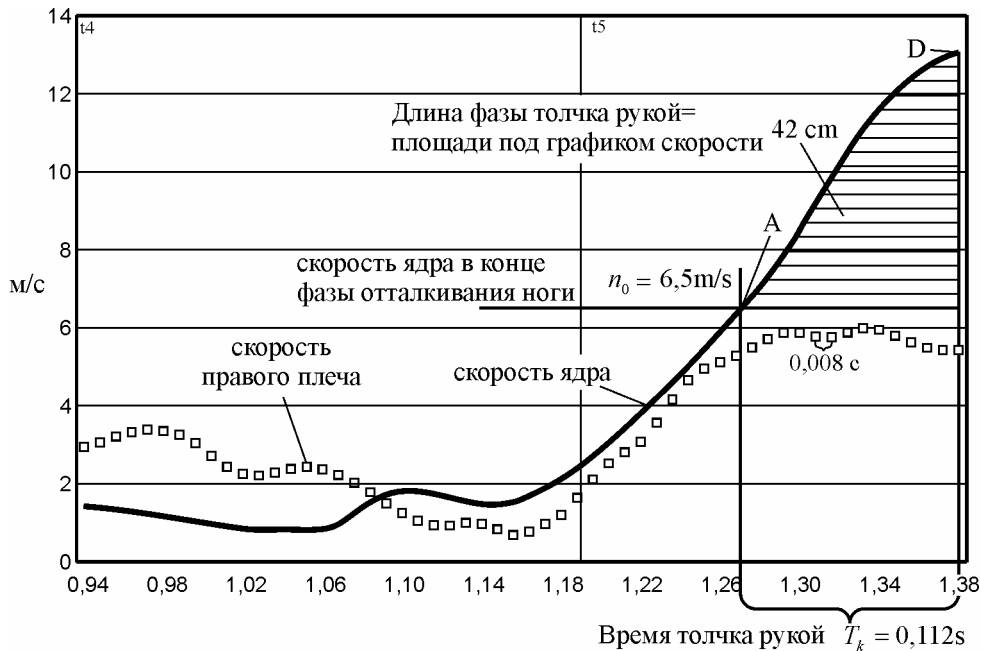


Рис. 2. Толчок ядра на 19,47 м. Время фазы толчка рукой и величина скорости ядра в конце фазы отталкивания ноги

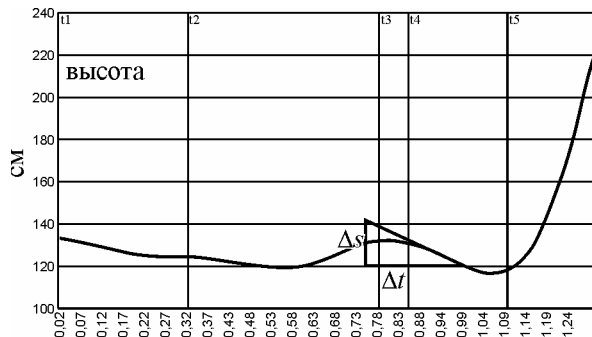


Рис. 3. Толчок ядра на 20,90 м. Вектор скорости толкателя ядра направлен книзу в начале фазы отталкивания ноги. По рис.15 минимальная скорость  $V = \Delta s / \Delta t = -1,1 \text{ м/с}$

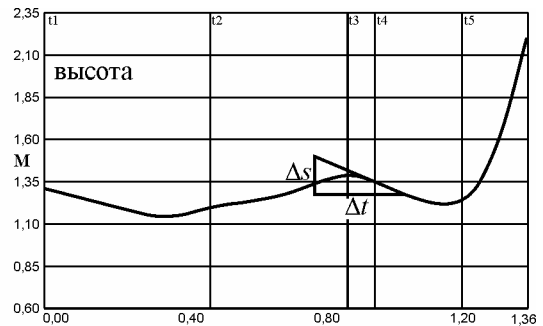


Рис. 4. Толчок ядра на 19,47 м. Вектор скорости толкателя ядра направлен книзу в начале фазы отталкивания ноги. По рис.19 минимальная скорость  $V = \Delta s / \Delta t = -0,88 \text{ м/с}$

что скорость переноса  $n_0 = 7,3 \text{ м/с}$  при дальности 20,9 м (рис. 1) очевидно выше, чем  $n_0 = 6,5 \text{ м/с}$  при дальности полета ядра 19,47 м (рис. 2). Величину скорости переноса далее можно сравнить как со скоростью в конце фазы действия толчковой ноги, так и со скоростью вращения спортсмена. Скорости вращения спортсмена в двух указанных попытках имеют почти равную величину, следовательно, результаты попыток определяются фазой действия толчковой ноги.

Дальнейший путь исследования этой фазы лежит в изучении кривых «оценка изменений скорости и высоты толкания ядра», полученных КИУ (рис. 3 [1] и рис. 4 [2]). Если мы сравним кривые «высота толкания ядра» для двух обсуждаемых попыток, можно увидеть, что перемещение ядра в фазе действия толчковой ноги меняется по направлению от нисходящего к восходящему. При этом в худшей попытке (рис. 4) толкатель ядра приходит к точке поворота с вектором скорости, менее направленным вниз, чем в более удачной попытке (рис. 3). Отсюда следует, что для улучшения результата в самом начале фазы действия толчковой ноги толкатель ядра должен иметь такую скорость, вектор которой возможно более направлен книзу. Решающим

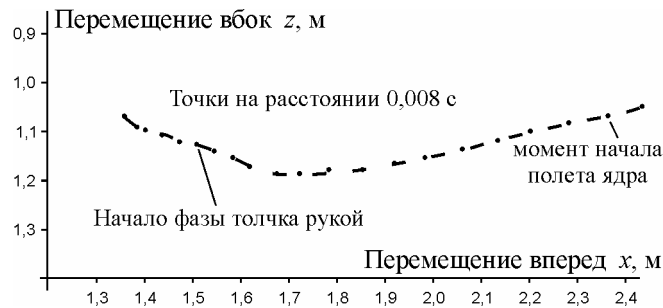


Рис. 5. Траектория ядра в фазе толчка рукой, измеренная в попытке с дальностью полета ядра 19,47 м

фактором всей рассматриваемой фазы толкания ядра является её начало. Высокая величина силы отталкивания толковой ногой в этот момент приводит к увеличению действующей силы во всей надлежащим образом реализованной фазе. Это можно считать установленным фактом. Для определения оптимальной техники в фазе действия толковой ноги необходимо изучить как прыжок, так и приземление спортсмена.

В работе выполнен более точный анализ движения в фазе действия толковой ноги и эффективности толчка с помощью уравнения движения центра масс спортсмена. Во-первых, изучен прыжок на одной ноге без учета силы отталкивания, чтобы описать механику действий в этой фазе. Теоретически получено уравнение движения при прыжке на одной ноге, затем это уравнение корректируется путем сравнения с соответствующей траекторией движения в реальном прыжке на одной ноге ([3], рис. 8 и 9). Таким способом выведено уравнение действительной траектории движения (перед тем, как усилия мускулов изменят движение) и, таким образом, находится истинная податливость мышц и сухожилий. Податливость мышц и сухожилий ноги в эффективной фазе подбирается путем сопоставления с силой отталкивания ноги. После этого оценивается эффективность фаз действия толковой ноги в обеих попытках. Таким образом, в работе выводится теоретическое уравнение движения центра масс спортсмена, которое корректируется путем подгонки к соответствующим экспериментальным кривым, полученным КИУ ([1, 2], рис. 13 и 17). Поэтому получают уравнения действительных траекторий движения. Скорости и ускорения движения вычисляются численно дифференцированием этих уравнений по времени. Этим способом находят два важных фактора, определяющие эффективность толчка ядра: увеличение скорости ядра и силы, ускоряющей толкателя.

## 2. Методы

### 2.1. Определение эффективности фазы действия толковой ноги путем использования кривых время–скорость.

2.1.1. Скорость ядра в конце фазы действия толковой ноги при попытке с дальностью 20,90 м. В кривых «Линейные скорости», полученных экспериментально КИУ (рис. 1), скорость правого плеча получена с помощью коробчатых маркеров. Эти маркеры определяли положение кадров на пленке. Съемка велась сбоку и сзади камерой со скоростями 60 и около 50 кадров в секунду. Для рис. 1 скорость съемки составляла 60 кадров в секунду, что дало 0,01666 с для интервалов времени между изображениями коробчатых маркеров. Время фазы толкания ядра вычислено с помощью того же фильма. Отход ядра от щеки спортсмена и вытягивание руки с ядром заняло полтора

кадра, а толкание ядра рукой – около четырех кадров. Таким образом, время всей фазы толкания ядра рукой составило 5,5 кадра, что при скорости съемки 50 кадров в секунду определяет интервал времени между изображениями маркеров в 0,02 с. Время фазы толкания ядра равно тогда  $5,5 \cdot 0,02 = 0,11$  с. Это время сопоставлено соответствующему времени для кривых «Линейные скорости» (рис. 1), тогда время фазы толкания ядра рукой соответствует  $0,11 / 0,01666 = 6,6$  интервалам между изображениями коробчатых маркеров. После этого на кривой можно определить точки начала и окончания фазы толкания ядра. Так как отрыв ядра происходит немедленно после появления изображения последнего маркера, начало фазы отстоит назад по времени на 6,6 интервала между маркерами. В этой точке скорость есть скорость переноса  $n_0$  и  $n_0 = 7,3$  м/с. Используя указанные начальную и конечную точки, можно вычислить перемещение ядра в фазе его толкания рукой. Для кривых «Линейная скорость» на вертикальной оси отложена скорость ядра, на горизонтальной – время. В этом случае перемещение ядра равно площади между кривыми скорости и скорости переноса  $n_0 = 7,3$  м/с и составляет примерно 40,5 см. Силу в фазе толкания ядра рукой можно вычислить, зная угол наклона кривой скорости. Среднее ускорение равняется отношению изменения скорости к промежутку времени  $a = \Delta V / \Delta t$ , а средняя сила определяется как произведение массы спортсмена на среднее ускорение  $F = m \Delta V / \Delta t$ . Таким образом, получено значение силы 540 Н, что соответствует силе тяжести 55 кгс.

2.1.2. Скорость ядра в конце фазы действия толчковой ноги при попытке с дальностью 19,47 м. Для кривой на рис. 2 скорость съемки составляла 125 кадров в секунду, поэтому интервал времени между маркерами составляет 0,008 с. Время фазы толкания ядра рукой вычислено по кривой на рис. 5 так, как указано выше. Отход ядра от щеки спортсмена и вытягивание руки с ядром (кадры 160-164) занимают около четырех кадров для первого действия и примерно десять кадров (кадры 165-174) для второго действия. При скорости 125 кадров в секунду время этой фазы соответствует 14 кадровым интервалам, и при интервалах между кадрами, равными 0,008 секундам, время всей фазы составляет 0,112 с. Это время сопоставлено соответствующему времени для кривых «Линейные скорости» (рис. 2), тогда время фазы толкания ядра рукой соответствует  $0,11 / 0,008 = 14$  интервалам между изображениями коробчатых маркеров (то же самое на рис. 5). После этого на кривой можно определить точки начала и окончания фазы толкания ядра. Начало фазы отстоит назад по времени на 14 интервалов между маркерами. В этой точке скорость переноса равна  $n_0 = 6,5$  м/с. Ядро в фазе толкания рукой перемещается примерно на 41 см. Максимальная сила равна 580 Н, что соответствует силе тяжести 59 кгс.

## 2.2. Оценка эффективности фазы действия толчковой ноги с помощью математического моделирования

2.2.1. Математическая модель прыжка на одной ноге в фазе действия толчковой ноги. Будем рассматривать вначале механику прыжка на одной ноге, что позволит понять механизм воздействия фазы действия толчковой ноги на процесс толкания ядра. Вращательное движение при толкании ядра согласовывается с поступательным движением при прыжке на одной ноге, причем механизм действий в фазе действия толчковой ноги тот же самый. Проведенные эксперименты в прыжках на одной ноге основаны на анализе фотографических изображений, описанном в [3] (рис. 8). Траектория движения центра масс спортсмена измерялась по стробоскопическим фотографиям, представленным на рис. 8. На рис. 9 показана полученная траектория. Часть кривой траектории движения, соответствующая моментам контакта ноги и

грунта, такова, что она соответствует движению при затухающих колебаниях при отсутствии мышечных усилий. В фазе действия толчковой ноги прямо перед прыжком спортсмен использует мышечное усилие, сообщающее скорость поступательного движения. При движении сила упругости сухожилий ноги, имеющая вид  $F = -kx$  ( $x$  – перемещение,  $k$  – постоянная), изменяет направление движения книзу на движение вверх. Внутреннее трение ноги продуцирует силу  $F'$ , которая соответствует вязким свойствам мышечной ткани. Эту силу можно определить как  $F' = -\lambda v$ , где  $\lambda$  – постоянная и  $v$  – скорость ([6], рис. 6). Также учитывается сила тяжести  $mg$ , где  $m$  – масса прыгающего спортсмена и  $g$  – ускорение свободного падения. Масса  $m$  не равняется полной массе двигающегося спортсмена, так как свободная нога полностью не принимает участия в ускоренном движении, а ускорение напряженной ноги изменяется от нуля на подошве ноги до ускорения верхнего окончания ноги, равного ускорению верхней части туловища. Поэтому удовлетворительным приближением для массы  $m$  служит величина, равная  $2/3$  массы движущегося объекта. Тогда уравнение, описывающее прыжок на одной ноге в фазе действия толчковой ноги, имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = mg. \quad (1)$$

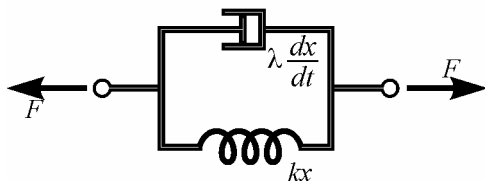


Рис. 6. Прыжок на одной ноге. Модель для сил, действующих в фазе толкания ноги. Эта сила представляет собой комбинацию силы упругости сухожилий ноги  $kx$  и силы внутреннего трения  $\lambda dx/dt$ , моделирующей вязкость материала ноги. Сила  $F$  действует на голеностопный и тазобедренный суставы (адаптировано из [6])

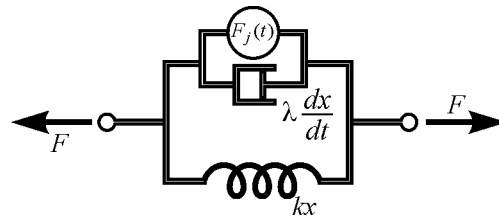


Рис. 7. Толкание ядра. Модель для сил, действующих в фазе толкания ноги. Эта сила  $F$  представляет собой комбинацию ускоряющей силы отталкивания ноги  $F_j(t)$ , силы упругости сухожилий ноги  $kx$  и силы внутреннего трения  $\lambda dx/dt$ . Сила  $F$  действует на голеностопный и тазобедренный суставы (адаптировано из [6])

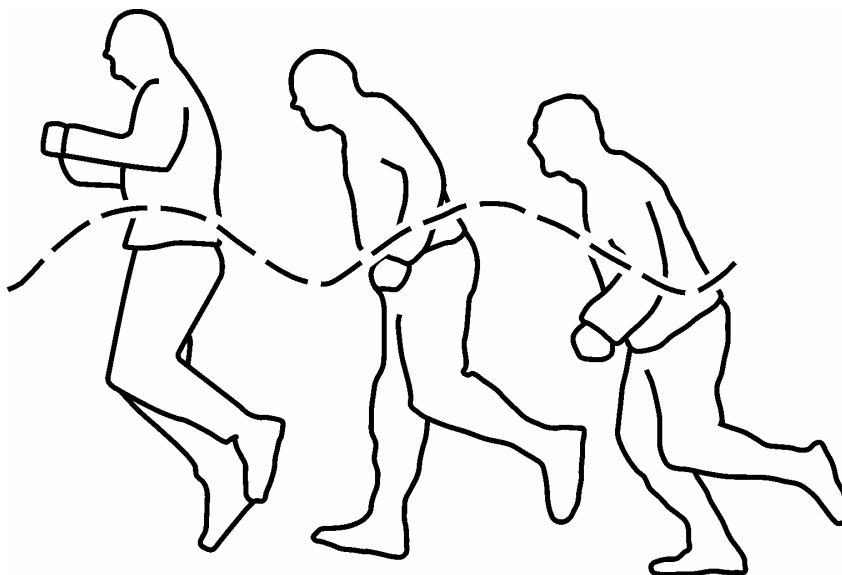


Рис. 8. Прыжок на одной ноге в стробоскопическом изображении. Прерывистая линия – траектория движения центра масс. Промежуток между вспышками соответствует интервалу времени 0,04 с.

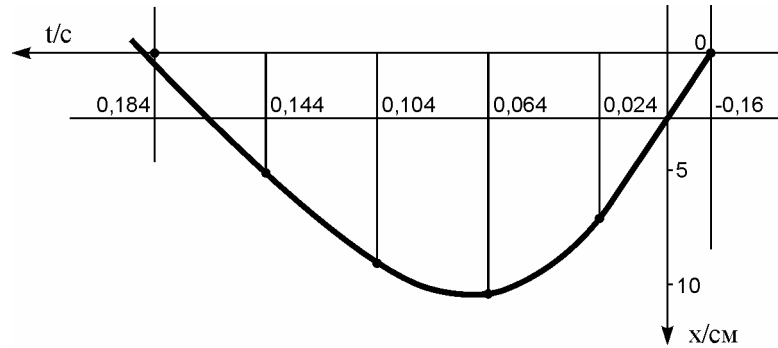


Рис. 9. Траектория движения центра масс спортсмена при прыжке в фазе действия толчковой ноги (прерывистая линия на рис. 8). Ось времени направлена влево

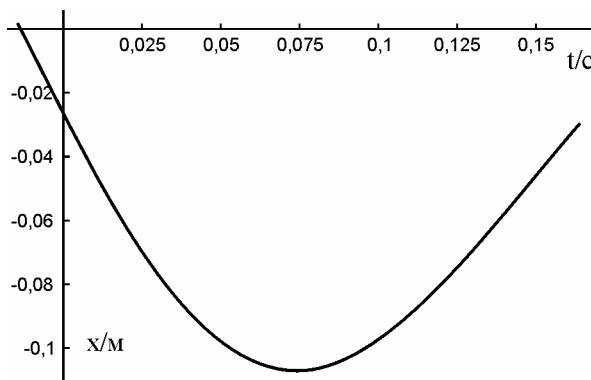


Рис. 10. Кривая движения центра масс спортсмена при прыжке из рис. 9. Для лучшего восприятия произведено умножение на  $-1$ . Ось времени направлена вправо. Сила толчка начинает увеличивать скорость в момент времени  $t = 0,164$  с

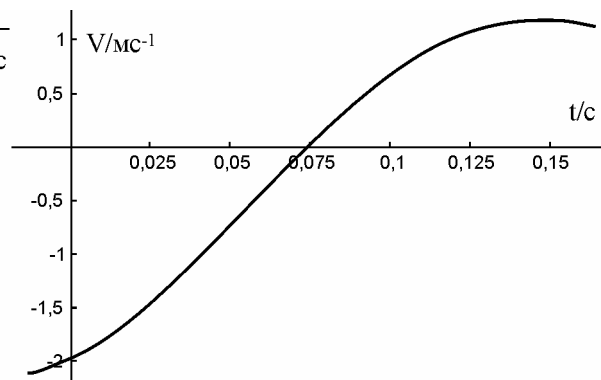


Рис. 11. Скорость в прыжке  $V$ , умноженная на  $-1$ :  
 $V = -A e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$ ,  
 $A = 0,105 м, \gamma = 3,5 c^{-1}, \omega = 18,9 c^{-1}$

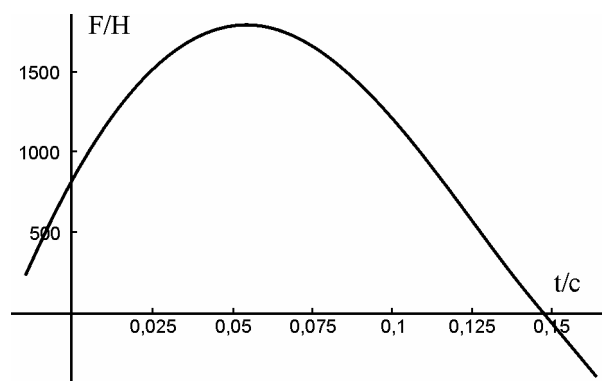


Рис. 12. Сила, действующая на центр масс, вычисленная по уравнению (7) (умножена на  $-1$ ). Масса составляет  $2/3$  массы спортсмена, равной 85 кг.

$$F = -m A e^{-\gamma t} [\gamma^2 - \omega^2] \sin(\omega t) - 2\gamma \omega \cos(\omega t)$$

$$A = 0,105 м, \gamma = 3,5 c^{-1}, \omega = 18,9 c^{-1}, m = 56,7 кг$$

Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - g = 0, \quad (2)$$

где  $2\gamma = \lambda/m$  и  $\omega_0^2 = k/m$  – угловая частота при колебаниях без вязкого сопротивления. Решение этого уравнения запишем в следующей форме

$$x = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega_0^2}, \quad (3)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}. \quad (4)$$

Вычисляя производную по времени для выражения (3), получим скорость

$$V = \frac{dx}{dt} = A e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)]. \quad (5)$$

Дифференцируя по времени (5), получим ускорение и силу, действующую на центр масс

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A e^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\gamma \omega \cos(\omega t)], \quad (6)$$

$$F = m A e^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\gamma \omega \cos(\omega t)]. \quad (7)$$

Подставив (3), (5), (6) в дифференциальное уравнение (2), получим, что выражение (3) является искомым решением.

### 2.2.2. Определение коэффициентов уравнений по измерениям в прыжке на одной ноге.

На рис. 9 показана измеренная траектория движения центра масс при прыжке (прерывистая линия на рис. 8). Уравнение (3), определяющее эту кривую (сплошная линия), имеет вид

$$x = A e^{-\gamma t} \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2},$$

$$A = 0,105 \text{ м}, \gamma = 3,5 \text{ с}^{-1}, \omega = 18,9 \text{ с}^{-1}, \frac{g}{\omega_0^2} = 0,027 \text{ м}, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 18,9 \text{ с}^{-1}.$$

### 2.2.3. Математическая модель фазы действия толчковой ноги при толкании ядра.

Раскачивающееся движение центра масс толкателя ядра в фазе действия толчковой ноги описано дифференциальным уравнением, которое отличается от уравнения (1) для прыжка на одной ноге тем, что содержит дополнительный член, соответствующий действию ускоряющей силы  $F_j(t)$  (рис. 6 и 7). При движении сила упругости сухожилий ноги, имеющая вид  $F = -kx$  ( $x$  – перемещение,  $k$  – постоянная), изменяет направление движения книзу на движение вверх. Внутреннее трение ноги продуцирует силу  $F'$ , которая соответствует вязким свойствам мышечной ткани. Эту силу можно определить как  $F' = -\lambda v$ , где  $\lambda$  – постоянная и  $v$  – скорость ([6], рис. 6). Также учитывается сила тяжести  $mg$ , где масса прыгающего спортсмена  $m$  и  $g$  – ускорение свободного падения. Масса  $m$  составляет 2/3 массы толкателя ядра. Тогда уравнение, описывающее фазу действия толчковой ноги, имеет вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = mg - F_j(t). \quad (8)$$

Если мы будем считать, что  $2\gamma = \lambda/m$  и  $\omega_0^2 = k/m$ , то уравнение принимает форму



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - g + \frac{F_j(t)}{m} = 0. \quad (9)$$

Для нахождения силы  $F_j(t)$  воспользуемся физической интуицией и запишем уравнение движения центра масс спортсмена в виде

$$x = A e^{\gamma t} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega_0^2}. \quad (10)$$

Беря производную по времени в (10), получим скорость

$$V = \frac{dx}{dt} = A e^{\gamma t} [\omega \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)]. \quad (11)$$

Дифференцируя по времени (11), получим ускорение и силу, действующую на центр масс

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A e^{\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\gamma \omega \cos(\omega t)], \quad (12)$$

$$F = m A e^{\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\gamma \omega \cos(\omega t)]. \quad (13)$$

Подставляя выражения (10), (11) и (12) в уравнение (9), получим силу отталкивания ноги

$$F_j(t) = -m A e^{\gamma t} \left[ (3\gamma^2 - \omega^2 + \omega_0^2) \sin(\omega t) + 4\gamma \omega \cos(\omega t) \right]. \quad (14)$$

2.2.4. Определение коэффициентов уравнений по измерениям при толкании ядра на 20,90 м. На рис. 13 представлено измеренное расстояние ядра до земли (прерывистая линия) в фазе действия толчковой ноги при попытке с дальностью 20,90 м [1]. В этой фазе расстояние от ядра до центра масс спортсмена остается постоянным, поэтому эта же кривая задает положение центра масс спортсмена по вертикали в зависимости от времени. Перемещение центра масс толкателя ядра  $x$ , мм показано на вертикальной оси, а по горизонтали отложено время  $t$ , с. Кривая (сплошная линия), аппроксимирующая результаты измерений (прерывистая линия), построена по уравнению(10), и уравнение имеет вид

$$x = A e^{-\gamma t} \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2},$$

$$A = 0,065 \text{ м}, \gamma = 4 \text{ с}^{-1}, \omega = 14,2 \text{ с}^{-1}, \frac{g}{\omega_0^2} = 0,045 \text{ м}, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 14,2 \text{ с}^{-1}.$$

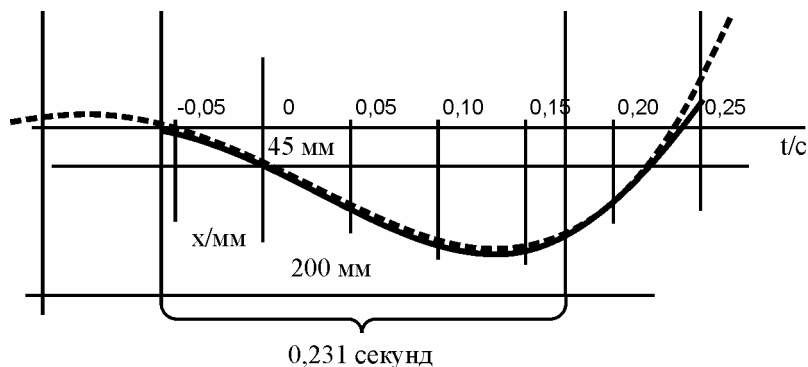


Рис. 13. Измеренная кривая центра масс толкателя ядра при попытке с дальностью толчка 20,90 м (прерывистая линия) и ее теоретическое приближение (сплошная линия). В момент времени  $t_4$  правая нога касается земли после прыжка. В момент времени  $t_5$  левая нога касается земли. Сила отталкивания левой ноги начинает увеличивать скорость толкателя ядра в момент времени  $t = 0,23 \text{ с}$

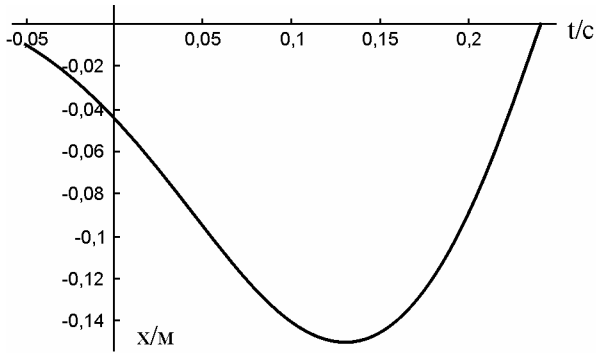


Рис. 14. Кривая движения центра масс спортсмена из рис. 13. Для лучшего восприятия произведено умножение на  $-1$ . Сила отталкивания левой ноги начинает увеличивать скорость толкателя ядра в момент времени  $t = 0,23$ :

$$x = -A e^{-\gamma t} \sin \omega t - \frac{g}{\omega^2},$$

$$A = 0,065 \text{ м}, \gamma = 4 \text{ с}^{-1}, \omega = 14,2 \text{ с}^{-1}, \frac{g}{\omega^2} = 0,045 \text{ м}$$

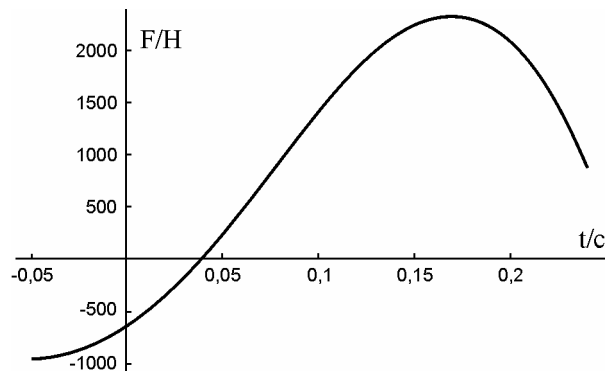


Рис. 16. Сила, действующая на центр масс, вычисленная по уравнению (13) (умножена на  $-1$ ). Масса составляет  $2/3$  массы спортсмена равной  $131,6$  кг

$$F = -m A e^{\gamma t} \left[ (\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\gamma \omega \cos(\omega t) \right],$$

$$A = 0,065 \text{ м}, \gamma = 4 \text{ с}^{-1}, \omega = 14,2 \text{ с}^{-1}, m = 87,7 \text{ кг}$$

2.2.5. Определение коэффициентов уравнений по измерениям при толкании ядра на  $19,47$  м. На рис.17 представлено измеренное расстояние ядра до земли (прерывистая линия) в фазе действия толчковой ноги при попытке с дальностью  $19,47$  м [2]. В этой фазе расстояние от ядра до центра масс спортсмена остается постоянным, поэтому эта же кривая задает положение центра масс спортсмена по вертикали в зависимости от времени. Перемещение центра масс толкателя ядра  $x$ , мм показано на вертикальной оси, а по горизонтали отложено время  $t$ , с. Кривая (сплошная линия), аппроксимирующая результаты измерений (прерывистая линия), построена по уравнению, имеющему вид

$$x = A e^{\gamma t} \sin \omega t, \quad A = 0,065 \text{ м}, \gamma = 4 \text{ с}^{-1}, \omega = 10 \text{ с}^{-1}. \quad (15)$$

Подставляя выражения (15), (11) и (12) в уравнение (9), получим силу отталкивания ноги

$$F_j(t) = -m A e^{\gamma t} \left[ (3\gamma^2 - \omega^2 + \omega_0^2) \sin(\omega t) + 4\gamma \omega \cos(\omega t) \right] - mg. \quad (16)$$

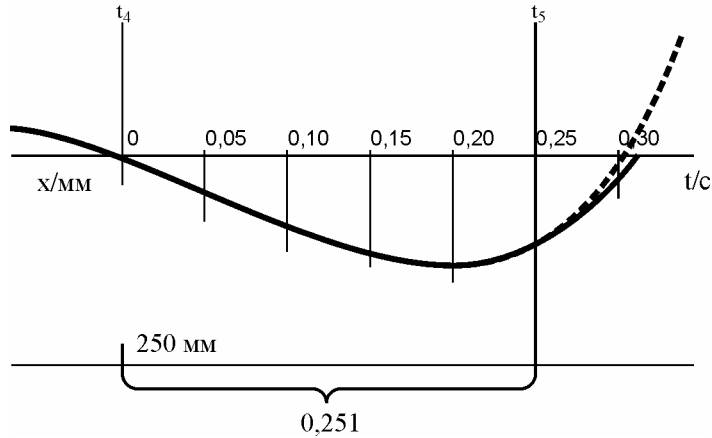


Рис. 17. Измеренная кривая центра масс толкателя ядра при попытке с дальностью толчка 19,47 м (прерывистая линия) и ее теоретическое приближение (сплошная линия). В момент времени  $t_4$  правая нога касается земли после прыжка, и в момент времени  $t_5$  левая нога касается земли

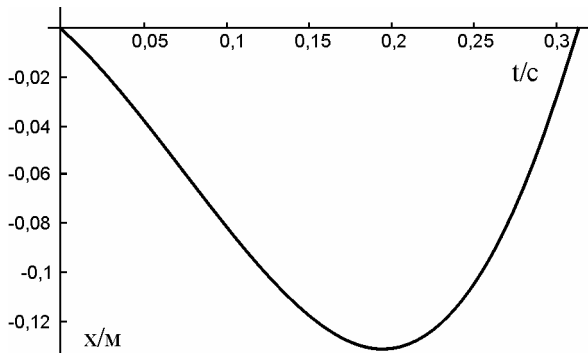


Рис. 18. Кривая движения центра масс спортсмена из рис. 17. Для лучшего восприятия произведено умножение на  $-1$ . Сила отталкивания левой ноги начинает увеличивать скорость толкателя ядра в момент времени  $t = 0,28$  с.

$$x = -Ae^{\gamma t} \sin \omega t, \quad A = 0,065 \text{ м}, \quad \gamma = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \omega = 10 \text{ с}^{-1}$$

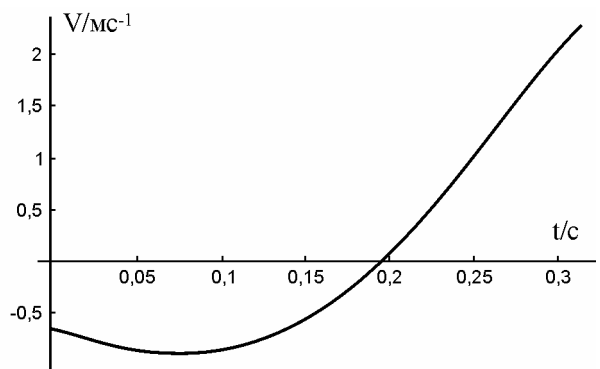


Рис. 19. Скорость  $V$ , вычисленная по уравнению (11) и умноженная на  $-1$ :

$$V = -Ae^{-\gamma t} [\omega \sin(\omega t) + \gamma \cos(\omega t)],$$

$$A = 0,065 \text{ м}, \quad \gamma = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \omega = 10 \text{ с}^{-1}$$

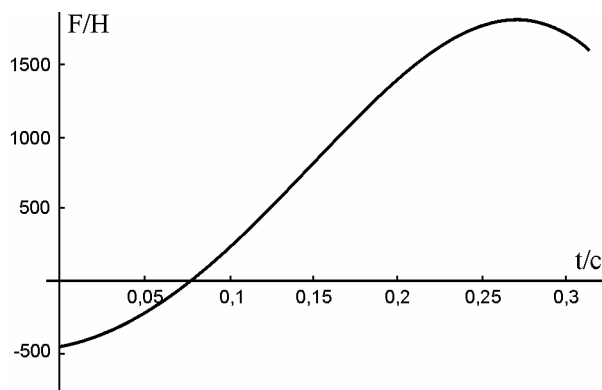


Рис. 20. Сила, действующая на центр масс, вычисленная по уравнению (13) (умножена на  $-1$ ). Масса составляет  $2/3$  массы спортсмена, равной 131,6 кг.

$$F = -mAe^{\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\gamma \omega \cos(\omega t)], \quad A = 0,065 \text{ м}, \quad \gamma = 4 \text{ с}^{-1}, \quad \omega = 14,2 \text{ с}^{-1}, \quad m = 87,7 \text{ кг}$$

### 3. Результаты

#### 3.1. Оценка степени увеличения скорости и силы отталкивания в фазе действия толчковой ноги с использованием кривых скорость-время

По кривым скорость-время, измеренным КИУ по двум попыткам Арси Харью (Arsi Harju), определена скорость ядра в конце фазы действия толчковой ноги, или скорость переноса. Скорость переноса в попытке с дальностью 20,90 м составляла  $n_0 = 7,3$  м/с, а при дальности толчка 19,47 м –  $n_0 = 6,5$  м/с. Оценка скорости переноса отражает эффективность фазы действия толчковой ноги. В лучшей попытке скорость переноса на 0,8 м/с больше. Это увеличение скорости вызывает повышение дальности толчка ядра на 2,1 м. Тем не менее, в более слабой попытке эффективность фазы толчка рукой выше, поэтому разность дальностей полета ядра равна только 1,43 м. Вычисления показывают, что при правильной технике в фазе действия толчковой ноги реально совершить более дальний толчок. Комбинируя фазу отталкивания ноги в лучшей попытке с фазой толчка рукой в более слабой, можно достичь дальности полета ядра на 21,6 м.

#### 3.2. Прыжок на одной ноге. Оценка степени увеличения скорости и силы отталкивания в фазе действия толчковой ноги математическим моделированием

Прыжок на одной ноге изучался, чтобы оценить действия в этой фазе без учета силы отталкивания. Теоретическое уравнение движения при прыжке корректировалось сопоставлением с кривыми, полученными экспериментально. Таким образом, получается уравнение, соответствующее реальности (перед тем, как мышечная сила ускорит движение), и вычисляются значения податливости мышц и сухожилий. В эффективной фазе значение податливости корректируется по силе отталкивания, действующей в фазе действия толчковой ноги.

Для сравнения сил отталкивания эффективность этих сил вычислялась по отношению максимальной силы отталкивания к силе тяжести спортсмена. Это отношение названо здесь как коэффициент силы отталкивания. При прыжке на одной ноге (рис.12) сила тяжести отрицательна. В начале фазы отталкивания по кривой на рис. 12 определяется сила величиной 350 Н. К ней нужно добавить силу тяжести спортсмена  $85 \text{ кг} \cdot 9,82 \text{ м/с}^2 = 830 \text{ Н}$ , тогда сила отталкивания равна 1180 Н. Максимальная сила по кривой сил равна 1800 Н. Добавляя силу тяжести 830 Н, получим, что максимальная сила отталкивания достигает 2630 Н. Коэффициент силы отталкивания равен  $2630/830 = 3,2$ . Поэтому сила отталкивания в прыжке превышает вес в 3,2 раза.

Увеличение скорости в фазе отталкивания (рис. 11) вычислялось от минимальной величины вектора скорости, направленного книзу, до момента времени, отстоящего от предыдущего на 0,15 секунды. Увеличение скорости составило 3,0 м/с. В течение времени от 0,1 до 0,15 с скорость увеличивается незначительно, так как отсутствует сила, ускоряющая движение.

#### 3.3 Толкание ядра. Оценка степени увеличения скорости и силы отталкивания в фазе действия толчковой ноги математическим моделированием

3.3.1 Толчок ядра на 20,90 м. В начале фазы отталкивания по кривой на рис. 16 определяется сила величиной -1000 Н. К ней нужно добавить силу тяжести спортсмена

$131,6 \text{ кг} \cdot 9,82 \text{ м/с}^2 = 1300 \text{ Н}$  , тогда сила отталкивания равна 300 Н. Максимальная сила отталкивания определялась следующим образом: по кривой усилий определена максимальная сила отталкивания 2300 Н, к которой добавлена сила тяжести спортсмена 1290 Н. Тогда максимальная сила примерно равна 3590 Н. В этом случае коэффициент силы отталкивания  $3590/1290 = 2,8$ .

Увеличение скорости в фазе отталкивания (рис. 15) вычислялось от минимальной величины вектора скорости, направленного книзу, до момента времени, отстоящего от предыдущего на 0,15 секунды. Увеличение скорости составило 2,6 м/с .

3.3.2. Толчок ядра на 19,47 м. В начале фазы отталкивания по кривой на рис. 20 определяется сила величиной -700 Н. К ней нужно добавить силу тяжести спортсмена  $131,6 \text{ кг} \cdot 9,82 \text{ м/с}^2 = 1300 \text{ Н}$ , тогда сила отталкивания равна 600 Н.

Максимальная сила отталкивания: по кривой усилий определена максимальная сила отталкивания 1800 Н, к которой добавлена сила тяжести спортсмена 1290 Н. Тогда максимальная сила примерно равна 3090 Н. В этом случае коэффициент силы отталкивания  $3090/1290 = 2,4$ .

Увеличение скорости в фазе отталкивания (рис. 19) вычислялось от минимальной величины вектора скорости, направленного книзу, до момента времени, отстоящего от предыдущего на 0,15 секунды. Увеличение скорости составило 1,4 м/с .

#### 4. Заключение

Вычисления показывают, что в лучшей попытке максимальная сила отталкивания равна 3590 Н, в более слабой попытке – 3090 Н. Увеличение силы отталкивания на 500 Н приводит к повышению дальности полета ядра на 2,1 м. Это значит, что техника толчка в первой попытке значительно более эффективна. В лучшей попытке наклон вектора скорости книзу больше (рис. 3 и 4), что приводит к увеличению силы давления на ногу. Способность мышц ноги развивать силу увеличивается в той же степени и приводит к увеличению эффективности фазы действия толковой ноги.

В лучшей попытке коэффициент силы отталкивания равен 2,8, увеличение скорости составило 2,6 м/с . В более слабой коэффициент силы отталкивания равен 2,4, скорость увеличилась на 1,4 м/с . Для двух выступлений Арси Харью (Arsi Harju) [5, с. 56] вычислены максимальные силы отталкивания ноги: 2610 Н для попытки на 19,85 м и 2400 Н для толчка ядра на 18,79 м. Сила тяжести спортсмена равна 1290 Н. Коэффициент силы отталкивания равен 2,0 и 1,86 соответственно. Разброс значений может быть вызван различными причинами, но они одного порядка величины. Ради сравнения получены также соответствующие значения для прыжка на одной ноге. Коэффициент силы отталкивания равен 3,2, скорость увеличилась на 3 м/с.

#### Список литературы

1. *Milnor W.R.* Hemodynamics. Baltimore: Williams &Wilkins, 1989.
2. *Wang Y.Y., Chang S.L., Wu Y.E., Hsu T.L., Wang W.K.* Resonance. The missing phenomenon in hemodynamics // *Circ Res.* 1991. V. 69. P. 246-249.
3. *Кизилова Н.Н.* Принципы организации транспортных систем растений и животных // Сб. докл. конф., посвященной 90-летию со дня рождения А.А.Ляпунова. Новосибирск, 2001. С. 266-273.

4. *Vanttinen T., Blomqvist M., Luhtanen P., Auvinen M., Palo-Kangas J., Tuominiemi J., Yrjola M., Ranta M., Von Hertzen R., Holmlund U.* Rotational shot put technique V / Research Institute for Olympic Sports. Research Report. Jyvaskyla, Finland, 1998.
5. *Vanttinen T., Blomqvist M., Luhtanen P., Auvinen M., Palo-Kangas J., Tuominiemi J., Yrjola M., Ranta M., Von Hertzen R., Holmlund U.* Rotational shot put technique VII / Research Institute for Olympic Sports. Research Report. Jyvaskyla, Finland. 2000.
6. *Rahikainen A.* United States Patent, Patent Number: 4,927,261. Date of Patent: May 22. 1990.
7. *Luhtanen P., Auvinen M., Yrjola M., Rahikainen A.* (editorial staff) Finnish Shot Put, Lahti: Lahden Kirjapaino ja Sanomalehti Oy LahtiPrint, 2000.
8. *Rahikainen A., von Hertzen R., Ranta M.A., Luhtanen P.* About optimum shot put technique / Helsinki University of Technology. Laboratory of Mechanics. Research Report. No 58. 2000. 30 p.
9. *McMahon Th.A.* Muscles, Reflexes and Locomotion. Princeton New Jersey: Princeton University Press, 1984. P. 8-17.
10. *Rahikainen A., Luhtanen P.* A new method to evaluate the effect of shot putter's rotational velocity on the length of put / Helsinki University of Technology. Laboratory of Mechanics. Research Report. No 60. 2001. 15 p.
11. *Rahikainen A., Luhtanen P.* A new method to estimate the efficiency of leg-pushing phase in shot put / Helsinki University of Technology. Laboratory of Mechanics. Research Report. No 59. 2001. 21 p.
12. *Bartonietz K.E.* Rotational Shot Put Technique: Biomechanical Findings and Recommendations for training. //Track and Field Quarterly Review. V. 94, № 3. 1994. P. 18-29.
13. *Pyka I., Otrando B.* Rotational shot put // National Strength and Conditioning Association Journal. V. 13. № 1, 1991.
14. *Palm V.* Some Biomechanical Observations of the Rotational Shot Put // Modern Athlete and Coach. V. 28. № 3. 1990. P. 15-18.
15. *Stepanek J.* Comparison of the Glide and the Rotational Technique in the Shot Put // Biomechanics in Sports V. Proceedings of the Fifth International Symposium of Biomechanics in Sports, held in 1987. Athens: Hellenic Sports Research Center of Athens, 1987.

**Ahti Rahikainen, Pekka Luhtanen (Espoo, Finland)**

## **A STUDY OF THE EFFICIENCY OF THE LEG-PUSHING PHASE IN SHOT PUT**

The aim of this paper is to study the mechanics of the leg-pushing phase in shot put, and to evaluate its efficiency. The length of a shot put may vary during the same competition by as much as 1 meter. The technique of a shot put usually cannot be controlled so well that with a certain technique the best possible distance corresponding to the shot putter's condition is obtained. The purpose of this work is to find causes of insufficient shot put technique.

In this paper two shot puts by Arsi Harju (20.90 m and 19.47 m) in "Kyroskoski Shot Put Carnivals" were analyzed. A mathematical analysis was made by employing an equation of the path of shot based on the kinematic data observed in a research report by KIHU. Using this equation, the rate of increase of the shot putter's velocity during the leg-pushing phase and the force acting on the center of the shot putter's mass were computed. The efficiencies of the leg-pushing phases of the two shot puts were determined by two different means: first, by employing the speed values at the end of the leg-pushing phase in the "speed of shot"-curves of KIHU, and second, by using the shot putter's velocity values and their changes.

It was found that the speed of shot of the 20.90 m put (7.1 m/s) was noticeably higher than that of the 19.47 m put (6.5 m/s). The speed of shot as a velocity vector is comprised of the velocity produced by the leg-pushing phase and the velocity of the shot putter's rotation. The rotational velocities of these two shot puts were almost the same, and therefore, the velocity increase produced by the leg-pushing phase was the cause for the velocity variation at the end of the leg-pushing phase, and it actually determined the outcome of the put. The rate of speed of the shot at the end of the leg-pushing phase indicates the efficiency of the leg-

pushing phase. The better shot put produced a 0.6 m/s higher speed of shot than the poorer put. This speed increase could yield a 1.6 m increase to the length of the put. The calculations indicated that if the leg-pushing technique is correct, it is possible to get really long puts.

The jump on one leg was studied in order to find out how the mechanics of the leg-pushing phase work without a pushing force, and thereby to find the natural flexibility of the muscles and tendons. In the effective leg-pushing phase the leg's natural flexibility matches the leg-pushing force in the best possible way.

The better shot put had a higher downward velocity before the leg-pushing phase, which increased the pressure in the leg. The muscle's ability to produce force increases as the pressure in the muscle increases (to a certain degree) and due to this fact the efficiency of the leg-pushing phase also increases. To find the optimum technique for the leg-pushing phase in shot put, the jump and the fall that is after the jump should be studied.

**Key words:** motion analysis, sports research, biomechanics, muscle mechanics, shot put.

*Получено 15 ноября 2002 года*