

УДК 531/534:57+612.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА ПРИ ФОТОСЪЕМКЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

А. Рахикайнен

Технический университет города Хельсинки, Helsinki University of Technology, Department of Engineering Physics and Mathematics, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, PL 1000, 02015 TKK, Otakaari 1, Espoo, Finland, E-mail: ahti.rahikainen@hut.fi

Аннотация. Предложен новый метод анализа движения человека с помощью фотосъемки. Основная идея метода состоит в фотографировании движущегося человека через вращающийся диск, который имеет одно прозрачное и несколько закрытых фильтрами окон, служащих затворными апертурами. Тогда производится ряд экспозиций с равными интервалами времени и на фотографии виден процесс движения. Фотография содержит ряд изображений человека, между которыми видны, как прерывистые линии, траектории мини-пржекторов, прикрепленных к испытуемому. Такая фотография дает наглядное представление о движении в целом. Различные фазы движения и соответствующие им временные зависимости приобретают форму, в которой хорошо видны их физические характеристики. Применение описываемого изобретения устраняет типичный недостаток обычных методов анализа движения – неудовлетворительное общее представление сложных движений. Поэтому предлагаемый метод представляет собой полезное дополнение к уже имеющимся. Используемая аппаратура является простой и недорогой.

Статья состоит из двух разделов. В первом разделе описывается конструкция и работа аппаратуры, во втором – описываются проведенные измерения. Второй раздел, в свою очередь, состоит из двух частей. В первой части приводятся несколько простых примеров поддержания устойчивости движения человека. Во второй части описываются более сложные движения: прыжок на одной ноге и толкание ядра. Исследование фазы отталкивания для прыжка на одной ноге основано на данных, полученных с помощью описанного метода. Теоретическое описание более простого движения для прыжка на одной ноге затем применяется при изучении более сложного движения для толкания ядра.

Ключевые слова: стробоскопическая фотография, анализ движения, ходьба, походка, бег, прыжок, толкание ядра.

1. Введение

Движение человека изучается с помощью различных способов кино- и фотосъемки. Можно сделать отдельные фотографии или, с помощью автоматической камеры, ряд фотографий, на которых виден процесс движения. Такие камеры обеспечивают весьма медленную съемку: 1–6 фотографий в секунду. Значительно более быстрая съемка производится кинокамерами. На фотографиях, сделанных с помощью кинокамер, можно различить отдельные фазы быстрых движений. При использовании видеокамеры процесс движения записывается на магнитную ленту и различные его фазы можно наблюдать на мониторе. При замедленном просмотре кино- или видеофильма можно обнаружить новые особенности движения.

Для изучения механики быстрых движений нужна скоростная видеокамера. Наилучшие скоростные видеокамеры обеспечивают до 12000 кадров в секунду. Но обычно такая скорость не требуется; вполне достаточны и существенно менее скоростные видеокамеры, которые к тому же значительно дешевле. Скоростная видеокамера записывает изображение на ленту, которая далее используется в мониторе. Можно также добавить и звукозапись. При воспроизведении возможны остановки. Представляющие интерес фрагменты записи можно просмотреть в прямом и обратном направлениях. Управление работой камеры производится с клавиатуры; компьютер камеры можно соединить с другими компьютерами. Скоростная видеосъемка используется, например, при изучении механизма разрушения машин вследствие аварий. Для этих целей имеются также специальные скоростные кинокамеры.

Для измерения и анализа движений человека разработана *Selspot*-система, включающая камеру и компьютер. В этой системе прикрепленные к испытуемому диоды по очереди испускают инфракрасные импульсы, которые затем преобразуются в электрический ток светочувствительной матрицей в плоскости изображения камеры. Центральный модуль преобразует электрический сигнал к виду, совместимому с компьютером.

В [1] описывается использование двух видеокамер при одновременных двусторонних измерениях движения испытуемого. В этом методе две видеокамеры применены для регистрации двумерных движений меток, прикрепленных к испытуемому. По двум таким двумерным движениям можно найти полное трехмерное движение. Система включает наблюдение за многими метками, прикрепленными к испытуемому. Метки покрыты сильноотражающим материалом; от них отражается свет двух источников, связанных с камерами. Яркие лампы источников работают в мигающем режиме для регистрации изменения со временем мгновенных положений меток. Метки наблюдаются одновременно двумя камерами, расположенными по обе стороны испытуемого. Источник света, связанный с каждой камерой, испускает свет с определенной длиной волны. Длины волн, соответствующие каждой из камер, специально подобраны достаточно различающимися, чтобы при регистрации одной камерой источника света другой камеры не происходила порча данных.

На единственной фотографии движение может быть зарегистрировано двумя различными способами: либо фотографированием прикрепленных к испытуемому светоиспускающих меток в виде световых линий, либо фотографированием движущегося испытуемого в виде ряда последовательных положений. В последнем случае есть две возможности: либо фотосъемки со вспышкой с короткими экспозициями, либо использование в качестве затвора вращающегося диска с прорезью. Один из методов отображения ходьбы человека на единственной фотографии приведен в [2]. В этом методе в характерные моменты ходьбы включаются световые трубки Гейссlera (*Geissler*), прикрепленные к рукам и ногам испытуемого. Через трубки Гейссlera протекает пульсирующий ток, регулируемый управляющим разветвлением в цепи. На сделанной таким образом фотографии ходьба человека представлена в виде изображений стержневой конструкции.

В [3] изложен хронофотографический метод анализа трехмерного движения и описан соответствующий прибор. Прибор называется хроноциклографом. В этом методе движущийся испытуемый фотографируется через вращающийся затворный диск. На диске имеется восемь эквидистантных круглых отверстий, служащих апертурами затвора. К испытуемому прикреплены яркие миниатюрные лампы накаливания. При прохождении отверстием оптической оси камеры происходит экспозиция пленки.

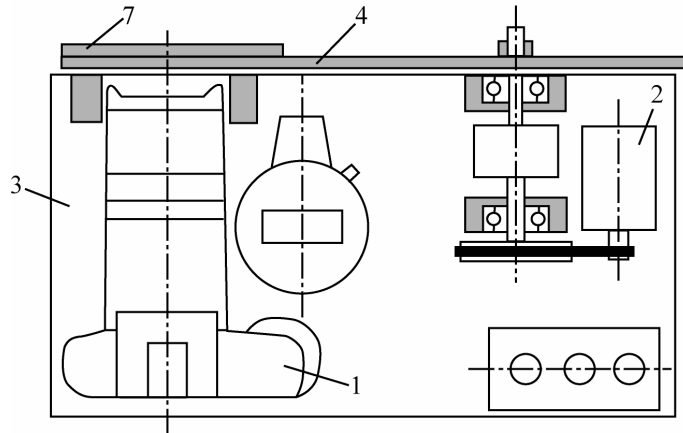


Рис. 1. Прибор, используемый при фотографировании. Вращающийся диск (4) с окнами и пластинки фильтров (7) перед камерой (1)

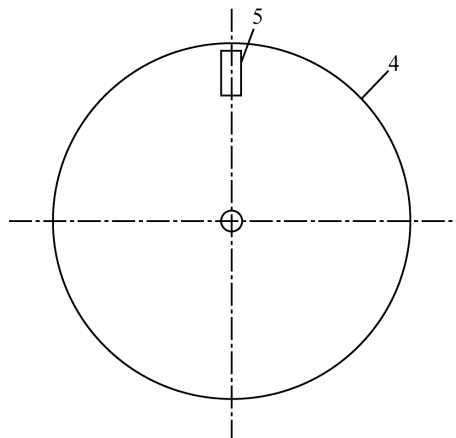


Рис. 2. Диск с прорезью, используемый в качестве затвора. Периодическое прерывание светового луча вращающимся диском обеспечивает ряд изображений движущегося испытуемого



Рис. 3. Прибор, сфотографированный без камеры и вращающегося диска. Камера прикрепляется с помощью болта, который виден на левой части платформы

Общее освещение отсутствует, поэтому на фотографии видны только огни миниатюрных ламп, а фон и сам испытуемый не видны. Траектории движущихся ламп имеют на фотографии вид прерывистых светлых линий.

Простой метод отображения движения на единственной фотографии изложен в [4]. Этот метод включает использование экспозиции и мини-прожекторов, прикрепленных к испытуемому. Для освещения используется свет с определенной длиной волны. Это обеспечивается специальным фильтром, расположенным перед камерой. Траектории излучающих мини-прожекторов видны на фотографии в виде светлых линий. Изображение испытуемого получается с помощью вспышки.

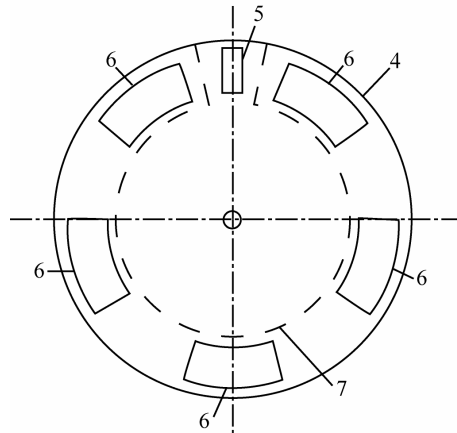


Рис. 4. Диск с одной прозрачной (5) и пятью закрытыми фильтрами (6) апертурами. Апертуры с фильтрами дают прерывистые светлые линии, а прозрачная – ряд изображений испытуемого

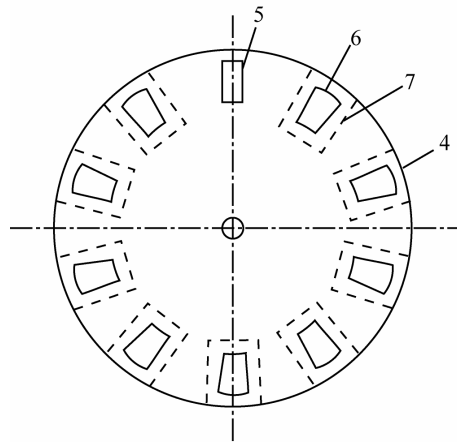


Рис. 5. Диск с одной прозрачной и девятью закрытыми фильтрами апертурами

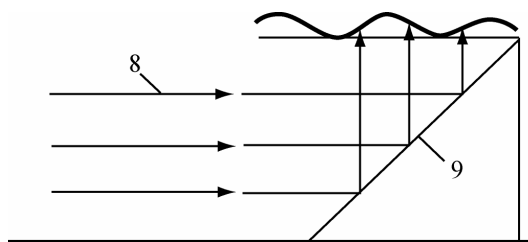


Рис. 6. Задник обеспечивает темный фон на фотографии. Случайное внешнее освещение (8) отражается вверх от задника (9) и поглощается

При использовании вращающегося диска с прорезью, показанного на рис. 2, испытуемый фотографируется через этот диск [5]. Так как диск вращается перед камерой (рис. 1), то пленка экспонируется столько раз, сколько прорезь (5), служащая апертурой затвора, пересекает оптическую ось камеры. Таким образом, на фотографии получается ряд изображений испытуемого, представляющий его движение. Вращающийся диск с прорезью – тот же самый, что используется в хронофотографии.

Использование в качестве меток ярких ламп накаливания при отсутствии общего освещения дает изображение в виде прерывистых светлых линий; освещение и фотографирование испытуемого на темном фоне дает ряд изображений его самого.

Фотография светлых линий и стробоскопическая фотография в виде ряда изображений испытуемого содержат различные виды информации о движении. На фотографиях светлых линий видны траектории прожекторов-меток, а на стробоскопических фотографиях различные фазы движения представлены в виде ряда

последовательных изображений испытуемого. Если объединить эти два метода фотографии, то можно извлечь больше информации, чем при раздельном использовании их. Светлые линии позволяют найти перемещение, скорость и ускорение каждой движущейся точки. Ряд изображений испытуемого определяет его движение из одного положения в другое. Объединяя эти сведения, можно идентифицировать различные фазы движения по светлым линиям.

2. Описание оборудования

Сочетание светлых линий и стробоскопического ряда изображений испытуемого реализовано в описываемом изобретении с помощью диска, показанного на рис. 4 и 5. Диск (4) изготовлен из прозрачного материала, покрытого слоем черной пластмассы. В точках (5, 6) в пластмассовом слое сделаны окна. Эти окна служат апертурами затвора. На другой стороне диска прикреплены пластинки фильтров (7). Пропускающая способность этих фильтров выбрана так, что свет, отраженный испытуемым, поглощается, а свет, испускаемый мини-прожекторами, проходит. Через апертуру (5) свет проходит свободно, а в апертуре (6) он должен пройти через фильтр.

Движущийся испытуемый фотографируется через вращающийся диск (4), показанный на рис. 1, 4 и 5. При вращении диска перед камерой пленка экспонируется столько раз, сколько прозрачная апертура (5) пересекает оптическую ось камеры. Получается ряд изображений, показывающий перемещение испытуемого из одного положения в другое. Свет, испускаемый прикрепленными к испытуемому мини-прожекторами, проходит через закрытые фильтрами апертуры (7) и на фотографии получают светлые линии, показывающие траектории мини-прожекторов. Движущийся испытуемый освещен, но фон должен быть темным. Для этого требуется специальный задник (рис. 6), поглощающий случайное внешнее освещение. Метод может быть использован как при естественном, так и при искусственном освещении.

Этот метод представляет фиксацию движений испытуемого в виде ряда его изображений, между которыми видны прерывистые светлые линии – траектории излучающих точек. Светлые линии связаны с рядом изображений так, что между двумя последовательными изображениями всегда имеется одинаковое число отрезков этих линий. Такая интегрированная система анализа движения человека является наиболее эффективной.

Время экспозиции одного изображения из последовательного ряда может быть найдено следующим образом:

- прорезь движется со скоростью $v = 2\pi rn$,
- прорезь проходит расстояние d за время $t = d/2\pi rn$, это время и есть время экспозиции одного изображения, где
- r , м – расстояние от прорези до центра,
- n , рад/с – угловая скорость диска,
- d , м – ширина прорези.

Фотосъемка движения будет успешной только при специальном освещении и требует тщательной предварительной подготовки. Угловую скорость диска нужно подобрать так, чтобы отдельные изображения из последовательного ряда были отчетливо разделены и можно было видеть общий ход движения и его различные фазы. Если на фотографии получается слишком много перекрывающихся изображений, то картина запутывается и ее трудно анализировать. Оптимальное количество изображений испытуемого на одной фотографии составляет два – четыре. В этом случае изображения в основном не перекрываются и вместе с прерывистыми светлыми линиями образуют ясную картину движения.



Рис. 7. Фотография, полученная с помощью диска с пятью фильтровыми апертурами. Испытуемый проходит тестовую точку

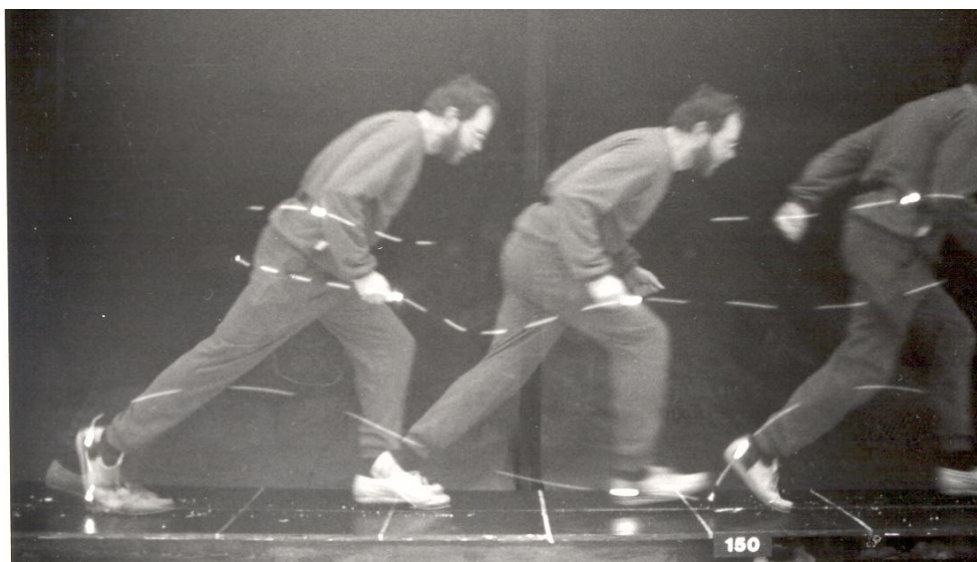


Рис. 8. Бегущий человек, ускоренное движение

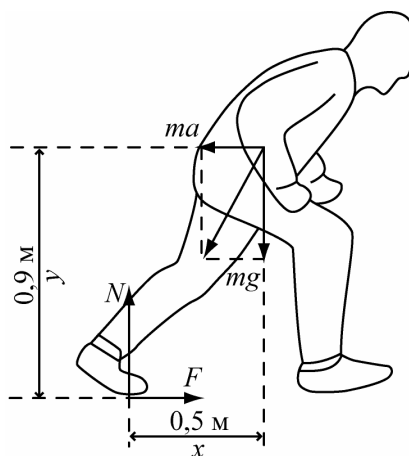


Рис. 9. Силы, действующие на человека при ускоренном движении

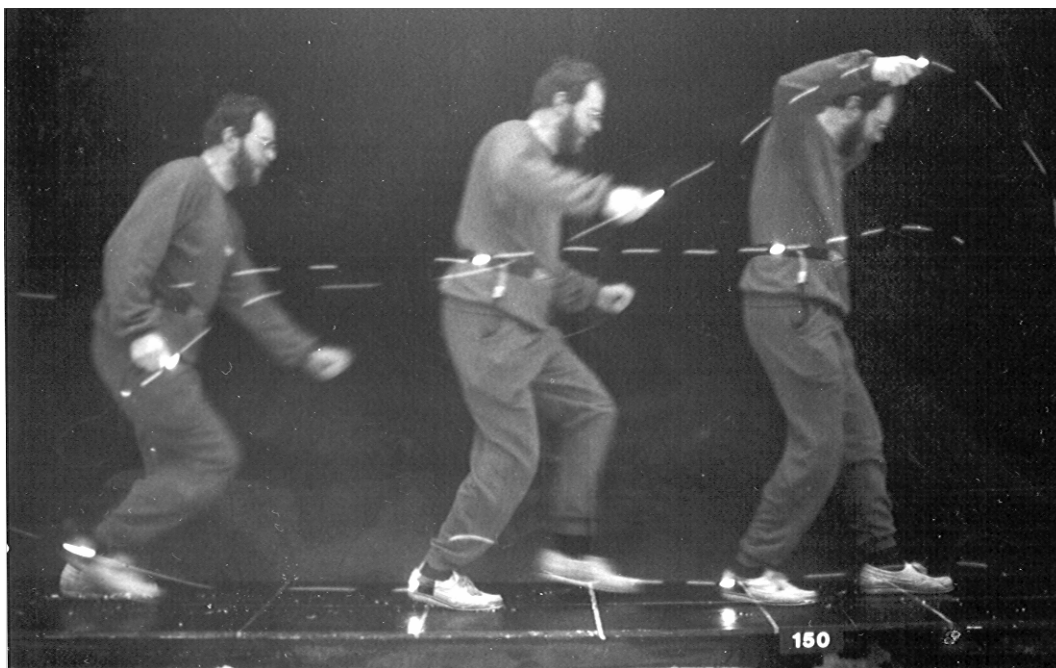


Рис. 10. Эксперимент на скольжение на обледеневшей дорожке

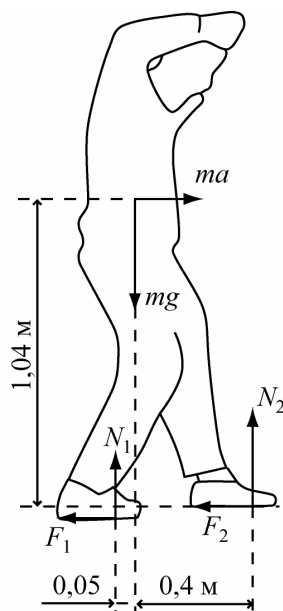


Рис. 11. Силы, действующие на испытуемого в эксперименте на скольжение

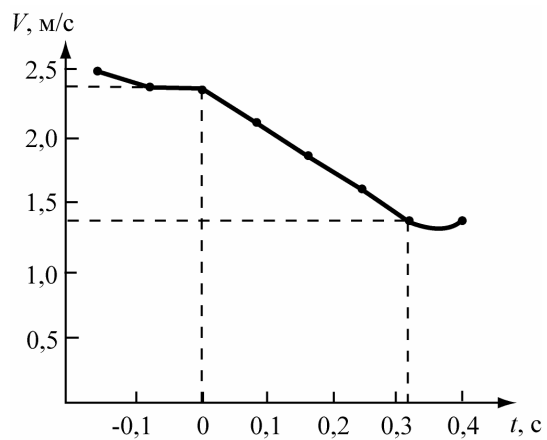


Рис. 12. Скорость центра масс в эксперименте на скольжение

Правильное освещение также важно для успеха фотосъемки. Фон должен быть весьма темным. Если фон светлый, то при первой же экспозиции засвечивается весь кадр и перекрывающиеся изображения не получаются. Темный фон лучше всего подходит для получения ряда изображений испытуемого. На качество фотографий влияет и одежда испытуемого. На темном фоне хорошо видна светлая одежда, а изображение темной теряется. Поэтому детали движения можно сделать видимыми, используя подходящую одежду. Не закрытая одеждой светлая кожа рук и ног видна хорошо, а несущественные части тела можно сделать невидимыми, если использовать темную одежду.

Для достижения темного фона использовался задник, показанный на рис. 6. Задник (9) изготовлен из черной пластмассы, от которой отражается вверх и поглощается случайное внешнее освещение (8). Интенсивность света была такова, что случайное внешнее освещение (8) соответствовало показаниям экспонометра 8–10. Свет, отраженный от задника (9), соответствовал показаниям 1–3, а свет, отраженный от испытуемого, – показаниям 5,5–7,5.

Фотографии на рис. 7–11 были выполнены в зимнее время на открытом воздухе. На земле лежал снег. Погода была облачная, солнечный свет был слабым. Вращающийся диск, использованный при фотосъемке, показан на рис. 4. Применение такого диска дает пять светлых штрихов между двумя изображениями испытуемого. Пластика фильтра (7) была красной. Пропускающая способность пластинки фильтра (7) была подобрана так, что естественный свет (соответствующий показанию экспонометра около (8)) был виден через эту пластинку, а свет, отраженный от затененных участков, не был виден. Среднее расстояние от окон (5) и (6) до центра диска составляло 20 см. Ширина прозрачного окна (5) – 2 см. Диск вращался с угловой скоростью 150 рад/мин. Использовалась камера *Canon T-70* с фокусным расстоянием линзы 50 мм и апертурой 1,2 мм. Скорость пленки – *ISO 400*. Расстояние от камеры до испытуемого – 5 м. В качестве светоиспускающих меток применялись яркие миниатюрные лампы накаливания, подсоединенные к батарейке. Одна лампа прикреплялась к руке, другая – к ноге и третья – в центре тела испытуемого.

Фотография на рис. 13 была выполнена с использованием искусственного освещения натриевой лампой. Так как желтый свет натриевой лампы сильнее поглощается пластинками фильтров, то интенсивность мини-прожекторов может быть меньше, чем при использовании естественного освещения. Примененный вращающийся диск показан на рис. 5. Использованы пластинки фильтров (7) из синего плексигласа. Среднее расстояние от окон (5) и (6) до центра диска составляло 18 см. Ширина прозрачного окна (5) – 1,5 см. Диск вращался с угловой скоростью 150 рад/мин. Применение такого диска дает десять светлых штрихов между двумя изображениями испытуемого. Две лампы прикреплялись к рукам, две – к ногам и одна – в центре тела испытуемого.

3. Применение оборудования

При фотосъемке диск вращался с угловой скоростью 150 рад/мин, что соответствует частоте $n = 2,5$ рад/с. Так как за один оборот диска на фотографии получается одно изображение, то временной интервал, соответствующий расстоянию между двумя последовательными изображениями, равен $1/n = 1/2 \text{ с}^{-1} = 0,4 \text{ с}$. Диск, использованный для получения фотографий на рис. 7, 8 и 10, показан на рис. 4. На этих фотографиях светлые линии между двумя последовательными изображениями состоят из пяти штрихов и временной интервал (измерения) Δt , соответствующий длине штриха

Δs , равен $\Delta t = 0,4 \text{ с} / 5 = 0,08 \text{ с}$. Расстояния измеряются по линейке, расположенной на дорожке. Линии на дорожке находятся на расстоянии 0,5 м друг от друга.

3.1. Исследование устойчивости при ходьбе и беге

При ходьбе (см. рис. 7) центр масс человека перемещается в трех измерениях. В вертикальном направлении центр масс совершает колебательное движение, перемещаясь попеременно вверх и вниз. При таком движении на человека действуют сила тяжести, силы со стороны мышц и силы инерции. Силы упругости ног, обуви и поверхности также оказывают определенное влияние на движение. В горизонтальном направлении ноги перемещаются из одного положения в другое, а движение рук играет роль балансирующего фактора. В трансверсальном направлении центр масс смещается от одной ноги к другой.

При ходьбе и беге часто происходит наклон тела, что позволяет обеспечить устойчивость движения. При изменении состояния движения возникают силы инерции, действующие на центр масс; соответствующими силами реакции являются силы трения, действующие на подошву обуви. Эта пара сил создает вращающий момент; реактивный момент, необходимый для обеспечения устойчивости, создается надлежащим наклоном тела. На рис. 8 показано, как человек начинает разгоняться при беге. Тело наклоняется вперед и сила мышц используется для увеличения скорости.

Ускорение человека можно вычислить следующим образом. Измеряя длины отрезков светлых линий для первого и третьего изображений испытуемого на рис. 8, находим скорость человека

$$v_1 = 0,15 \text{ м} / 0,08 \text{ с} = 1,9 \text{ м/с}, \quad v_3 = 0,25 \text{ м} / 0,08 \text{ с} = 3,1 \text{ м/с}.$$

Далее вычисляем разность скоростей и среднее ускорение:

$$\Delta v = v_3 - v_1 = 1,2 \text{ м/с}, \quad a = \Delta v / \Delta t = 1,5 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение человека при действии силы со стороны ног можно вычислить, рассматривая второе изображение на рис. 8. Силы, действующие на испытуемого, показаны на рис. 9. В качестве исходных данных находим следующие величины:

- расстояние по вертикали от центра масс до дорожки $y = 0,9 \text{ м}$,
- расстояние по горизонтали от центра масс до точки приложения силы трения $x = 0,5 \text{ м}$,
- ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Если испытуемый сохраняет устойчивость, то вращающие моменты равны:

$$may = mgx,$$

и отсюда находим ускорение

$$a = gx/y = 5,5 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 10 показано исследование скольжения подошв обуви по обледеневшей дорожке. Находится ускорение центра масс и вычисляется динамический коэффициент трения при движении испытуемого между положениями второго и третьего изображений. Скорость центра масс, показанная на рис. 12, была вычислена с помощью длин отрезков светлых линий, соединяющих второе и третье изображения на рис. 10. Ускорение центра масс в горизонтальном направлении находится следующим образом:

$$\Delta v = -1 \text{ м/с}^2,$$

$$\Delta t = 0,32 \text{ с},$$

$$a = \Delta v / \Delta t = -3,1 \text{ м/с}^2.$$

На рис. 11 показаны силы, действующие на испытуемого. Силы в вертикальном и горизонтальном направлениях равны, соответственно,



Рис. 13. Фотография, выполненная с помощью диска с одной прозрачной и девятью фильтровыми апертурами. Испытуемый прыгает на одной ноге

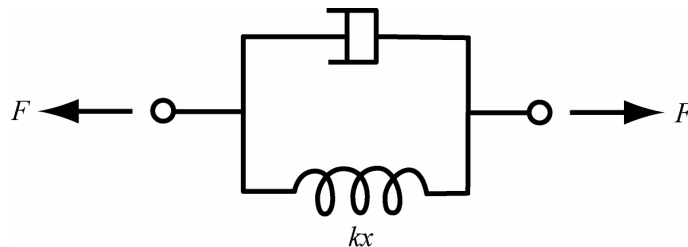


Рис. 14. Прыжок на одной ноге. Модель сил, действующих во время фазы отталкивания ногой. Суммарная сила со стороны ноги складывается из силы упругости сухожилия ноги kx и силы внутреннего трения в ноге $\lambda dx/dt$, обусловленной вязкостью тканей ноги. Сила F действует на суставы лодыжки и таза. (Приводится по [7, 8]).

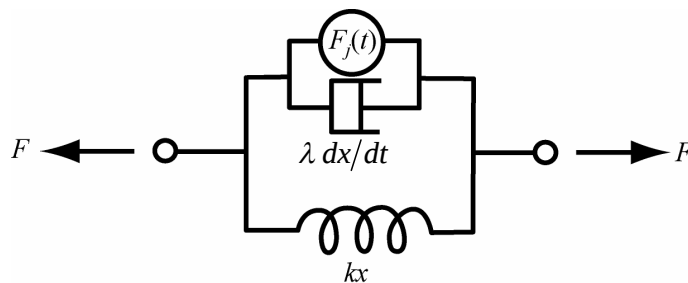


Рис. 15. Толкание ядра. Модель сил, действующих во время фазы отталкивания ногой. Суммарная сила F со стороны ноги складывается из ускоряющей силы $F_j(t)$, силы упругости сухожилий ноги kx и силы внутреннего трения в ноге $\lambda dx/dt$. Сила F действует на суставы лодыжки и таза. (Приводится по [7, 8]).

$$N_1 + N_2 = -mg ,$$

$$F_1 + F_2 = -ma ,$$

и динамический коэффициент трения

$$f_k = \left| \frac{F_1 + F_2}{N_1 + N_2} \right| = \left| \frac{a}{g} \right| = 0,32 .$$

Таким методом можно исследовать различные материалы подошвы обуви и выяснить, какие материалы наиболее опасно скользят при ходьбе по обледеневшей дорожке.

При получении фотографии на рис. 13 использовался диск, показанный на рис. 5. В этом случае светлые линии разделены на десять частей и временные интервалы (измерения) равны $\Delta t = 0,4 \text{ с} / 10 = 0,04 \text{ с}$. Линии на дорожке находятся на расстоянии 0,5 м друг от друга. Для получения светлых линий использовались шесть мини-прожекторов с тремя различными светофильтрами, чтобы можно было проще отличить одну линию от другой. На черно-белой фотографии синяя и желтая линии выглядят ярко, а красная – тускло. Два мини-прожектора были прикреплены к ногам, два – к рукам и два красных мини-прожектора – к центру масс и к верхней части тела испытуемого. На рисунке испытуемый прыгает на одной ноге. Центр масс испытуемого совершает колебательное движение. Когда человек находится в воздухе, можно увеличить длину прыжка, быстро взмахнув руками. В то же время толчковая нога перемещается вперед.

3.2. Адаптация механики отталкивания при прыжке на одной ноге к теории толкания ядра

3.2.1. Математическая модель фазы отталкивания при прыжке на одной ноге. В 1996–2000 гг. в Исследовательском институте олимпийских видов спорта (КИУ) были проведены измерения основных параметров движения тела человека при толкании ядра. На основе этих измерений в Технологическом университете Хельсинки было выполнено более глубокое исследование движения тела человека. Одновременно с этим, основываясь на данных рис. 13, автор данной публикации провел исследование фазы отталкивания при прыжке на одной ноге. Поскольку отталкивания одной ногой при толкании ядра и при прыжке на одной ноге имеют схожий характер, разумно начать исследование с изучения более простого случая – прыжка на одной ноге, а затем перейти к более сложному случаю – толканию ядра.

Механика фазы отталкивания при прыжке на одной ноге похожа на механику фазы отталкивания ногой при толкании ядра. Вращательное движение при толкании ядра соответствует подготовительному движению при прыжке на одной ноге; механика же самой фазы отталкивания одинакова. Был проведен эксперимент по прыжкам на одной ноге [6], в котором использовалась фотографическая техника анализа движения, изложенная в данной публикации. В итоге была получена фотография (рис. 13). На рис. 16 показан человек, совершающий прыжок, и показана траектория центра масс человека, изображенная в соответствии с рис. 13. На рис. 17 представлена зависимость координаты x центра масс от времени. В начальный период фазы контакта ноги с поверхностью эта зависимость похожа на зависимость, соответствующую колебательному движению с затуханием. В фазе отталкивания, непосредственно перед прыжком, человек, совершающий прыжок, использует силу мышц и приобретает ускорение, необходимое для достижения нужной для прыжка скорости. Сила упругости

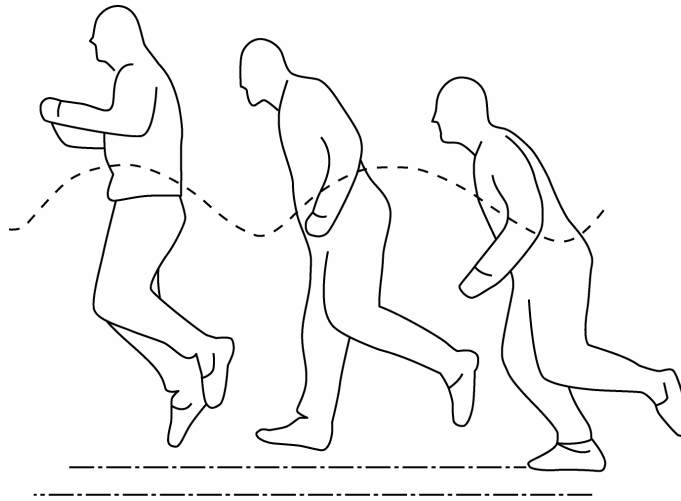


Рис. 16. Стробоскопическая картина прыжка на одной ноге (взята с рис. 13). Траектория центра масс человека показана пунктирной линией. Расстояния между штрихами соответствуют временному интервалу 0.04 с. Линии на дорожке находятся на расстоянии 0.5 м друг от друга

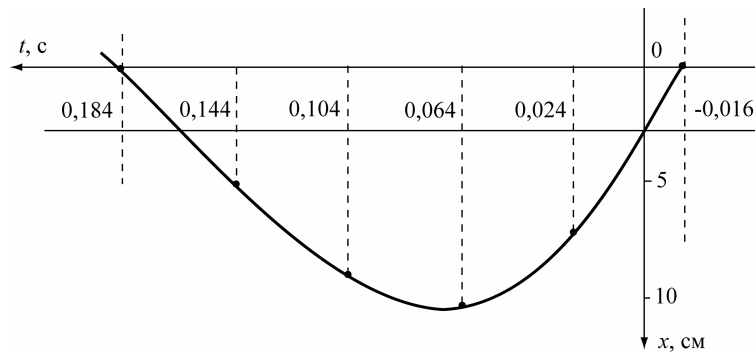


Рис. 17. Зависимость от времени координаты x центра масс человека в течение фазы отталкивания (соответствует штриховой линии на рис. 16). Ось времени направлена влево

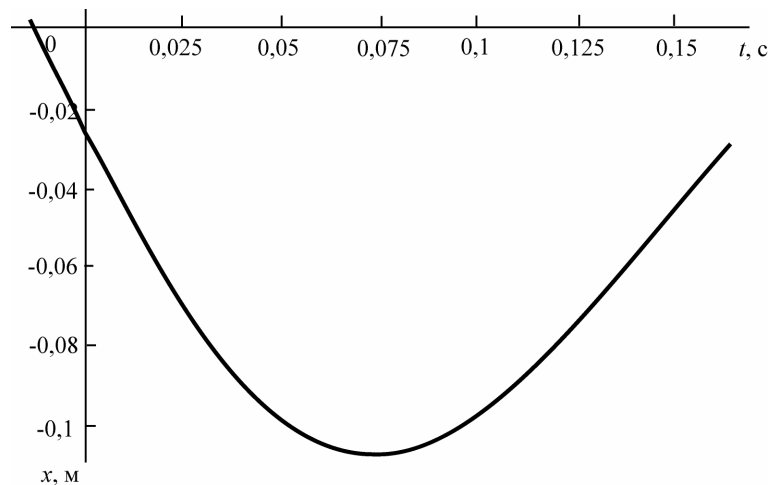


Рис. 18. Зависимость от времени координаты x центра масс человека (взята с рис. 17). Для лучшего восприятия рисунка зависимость умножена на -1. Ось времени направлена вправо. Сила со стороны ноги начинает увеличивать скорость человека в момент времени $t=0.164$ с

сухожилия ноги $F = -kx$, где x – смещение, k – постоянная. При движении эта сила изменяет направление движения с направления вниз на направление вверх. Внутреннее трение в ноге описывается силой F' , которая обусловлена вязкостью тканей ноги. Эту силу можно записать в виде $F' = -\lambda v$, где λ – постоянная, v – скорость (рис. 14, [7], [8]). Гравитационная сила направлена вниз и равна mg , где m – масса человека,

совершающего прыжок, g – ускорение свободного падения. Масса m не равна массе идущего человека, так как свободная нога не включается в ускоренное движение, а ускорения точек толчковой ноги различны и изменяются от нуля на нижнем конце стопы до ускорения, равного ускорению верхней части тела, на верхнем конце стопы. В данном случае используется грубая оценка величины m как $2/3$ массы идущего человека. Окончательно уравнение, описывающее фазу отталкивания при прыжке на одной ноге, можно записать в виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = mg. \quad (1)$$

Это уравнение можно переписать как

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - g = 0, \quad (2)$$

где $2\gamma = \lambda/m$, а $\omega_0^2 = k/m$ – собственная частота колебаний без затухания. Решение этого уравнения, описывающее прыжок на одной ноге, имеет вид

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega_0^2}, \quad (3)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}. \quad (4)$$

Дифференцируя (3) по времени, получаем скорость

$$V = \frac{dx}{dt} = Ae^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)]. \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по времени, получаем ускорение и, умножая его на массу, находим силу, действующую на центр масс

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = Ae^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\gamma\omega \cos(\omega t)], \quad (6)$$

$$F = mAe^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\gamma\omega \cos(\omega t)]. \quad (7)$$

Подставляя (3), (5) и (6) в (2), можно убедиться, что зависимость (3) удовлетворяет уравнению (2).

3.2.2. Аппроксимация данных, измеренных для прыжка на одной ноге, теоретической формулой. На рис. 17 точки соответствуют измеренной зависимости от времени координаты x центра масс человека в фазе отталкивания (траектория центра масс показана на рис. 16 пунктирной линией). Сплошная линия соответствует теоретической формуле (3)

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega_0^2},$$

где $A = 0,105$ м, $\gamma = 3,5$ с⁻¹, $\omega = 18,9$ с⁻¹, $\frac{g}{\omega_0^2} = 0,027$ м, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 18,9$ с⁻¹.

Меняя знак x , получим

$$x = -Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t) - \frac{g}{\omega_0^2},$$

$$V = -Ae^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)],$$

$$F = -mAe^{-\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\gamma\omega \cos(\omega t)],$$

где $m = 56,7$ кг.

3.2.3. Математическая модель фазы отталкивания ногой при толкании ядра. Движение центра масс человека при толкании ядра в фазе отталкивания ногой описывается дифференциальным уравнением, которое отличается от уравнения (1), описывающего прыжок на одной ноге. Отличие состоит в появлении дополнительного слагаемого, соответствующего ускоряющей силе со стороны ноги $F_j(t)$ (см. рис. 14 и 15). Сила упругости сухожилия ноги $F = -kx$, где x – смещение, k – постоянная. При движении эта сила изменяет направление движения с направления вниз на направление вверх. Внутреннее трение в ноге описывается силой F' , которая обусловлена вязкостью тканей ноги. Эту силу можно записать в виде $F' = -\lambda v$, где λ – постоянная, v – скорость (рис. 15, [7, 8]). Гравитационная сила направлена вниз и равна mg , где m – это $2/3$ массы человека, толкающего ядро, g – ускорение свободного падения. Тогда уравнение, описывающее фазу отталкивания ногой при толкании ядра, можно записать в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = mg - F_j(t). \quad (8)$$

Обозначая $2\gamma = \lambda/m$ и $\omega_0^2 = k/m$, перепишем уравнение как

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x - \frac{F_j(t)}{m} = 0. \quad (9)$$

Для нахождения силы $F_j(t)$ будем руководствоваться физической интуицией и попробуем записать зависимость координаты x центра масс человека, толкающего ядро, в виде

$$x = Ae^{\gamma t} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega_0^2}. \quad (10)$$

Дифференцируя (10) по времени, найдем скорость

$$V = \frac{dx}{dt} = Ae^{\gamma t} [\omega \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)]. \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по времени, найдем ускорение и, умножая его на массу человека, получим силу, действующую на центр масс человека, толкающего ядро.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = Ae^{\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\gamma \omega \cos(\omega t)], \quad (12)$$

$$F = mAe^{\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\gamma \omega \cos(\omega t)]. \quad (13)$$

Подставляя (10), (11) и (12) в (9), получим силу со стороны ноги

$$F_j(t) = -mAe^{\gamma t} [(3\gamma^2 - \omega^2 + \omega_0^2) \sin(\omega t) + 4\gamma \omega \cos(\omega t)]. \quad (14)$$

3.2.4. Аппроксимация данных, измеренных для толкания ядра, теоретической формулой. На рис. 21 показана (штриховая линия) измеренная зависимость от времени расстояния между ядром и землей в фазе отталкивания ногой при толкании ядра на 20,90 м [9]. Так как расстояние между ядром и центром масс человека, толкающего ядро, остается постоянным в фазе отталкивания ногой, то это есть в то же время зависимость от времени вертикальной координаты центра масс человека. Сплошная линия на рис. 21 соответствует теоретической формуле (10)

$$x = Ae^{\gamma t} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega_0^2},$$

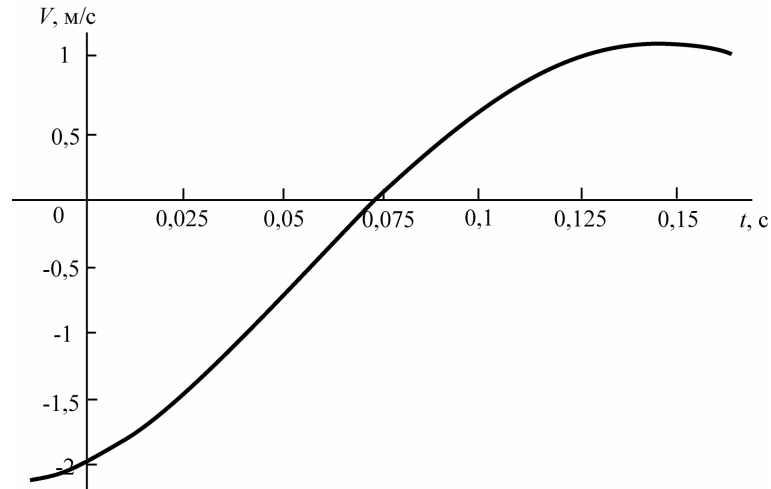


Рис. 19. Скорость V , найденная из (5) и умноженная на -1

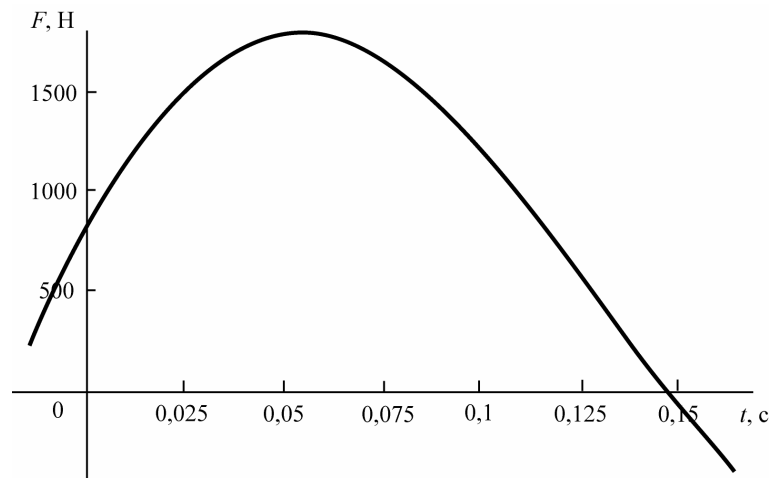


Рис. 20. Сила F , действующая на центр масс человека, совершающего прыжок; сила вычислена из (7) и умножена на -1. Эффективная масса m составляет $2/3$ от 85 кг (массы человека)

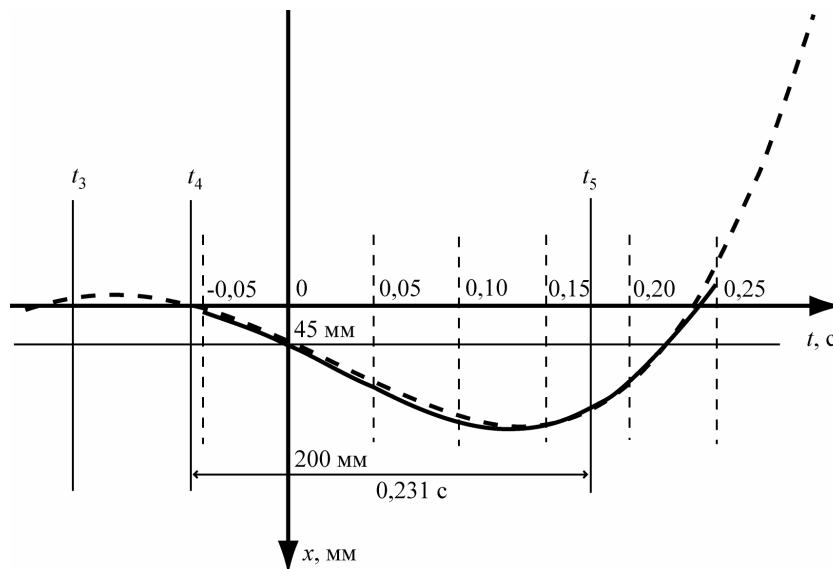


Рис. 21. Измеренная зависимость от времени координаты x центра масс человека, толкнувшего ядро на 20.90 м (пунктирная линия) и соответствующая теоретическая зависимость (сплошная линия). В момент времени t_4 правая нога касается земли после прыжка, а в момент времени t_5 — левая. Сила со стороны левой ноги начинает увеличивать скорость человека в момент $t=0.23$ с

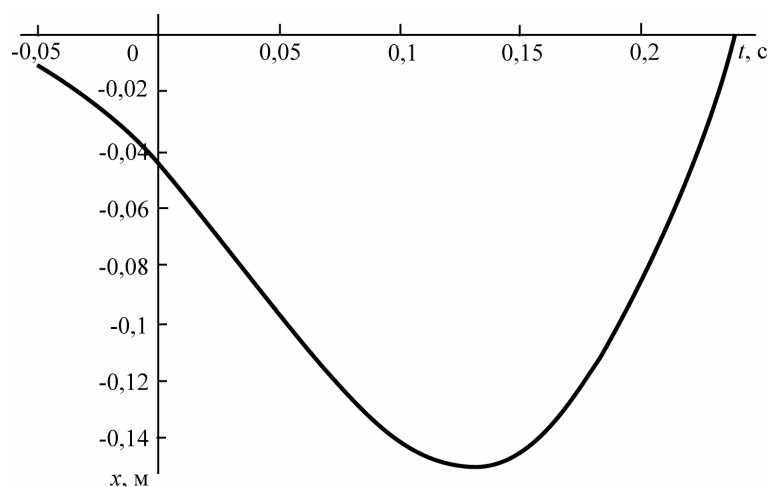


Рис. 22. Зависимость $x(t)$ с рис. 21. Для лучшего восприятия рисунка зависимость умножена на -1. Сила со стороны левой ноги начинает увеличивать скорость при $t=0.23$ с

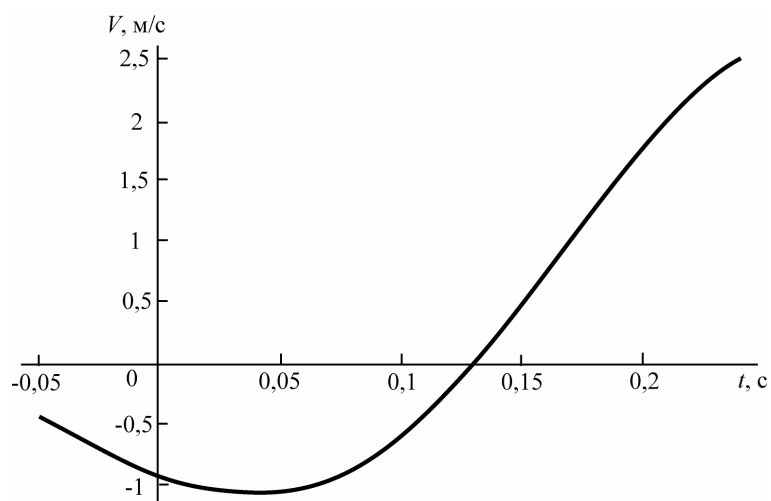


Рис. 23. Скорость V , вычисленная из (11) и умноженная на -1

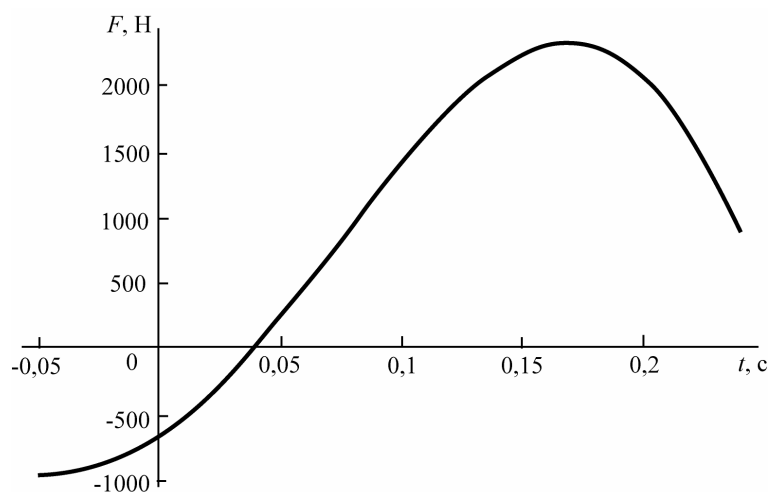


Рис. 24. Сила F , действующая на центр масс человека, толкающего ядро. Силы вычислена из (13) и умножена на -1. Эффективная масса m составляет $2/3$ от 131.6 кг (массы человека)

где $A = 0,065$ м, $\gamma = 4$ с⁻¹, $\omega = 14,2$ с⁻¹, $\frac{g}{\omega_0^2} = 0,045$ м, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 14,2$ с⁻¹.

Меняя знак x , найдем

$$x = -Ae^{\gamma t} \sin(\omega t) - \frac{g}{\omega_0^2},$$

$$V = -Ae^{\gamma t} [\omega \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)],$$

$$F = -mAe^{\gamma t} [(\gamma^2 - \omega^2) \sin(\omega t) + 2\gamma\omega \cos(\omega t)],$$

где $m = 87,7$ кг.

4. Выводы

При движении человека руки и ноги движутся взад и вперед. Из-за обилия информации трудно проследить за ходом движения. Этот типичный недостаток обычных методов изучения движения устранен в описываемом в данной статье изобретении. Предлагаемый метод дает ясное представление о движении человека и позволяет четко различить различные фазы движения.

Этот метод дает возможность получить как общую информацию о движении, так и проявить его характерные черты и, тем самым, хорошо отвечает требованиям к исследованию ходьбы человека. Различные фазы движения изучаются в виде, отражающем их физическую природу. Можно наблюдать различия в движениях различных людей или одного и того же человека, отклонения от нормы, ошибки, деформацию обуви при ходьбе, свойства дорожки. Изучение ходьбы человека предлагаемым методом является эффективным источником идей, что существенно в научном исследовании. В этом отношении данный метод дополняет используемые сейчас методы анализа движения.

Оборудование для предлагаемого метода просто и недорого. Аппаратура может быть модифицирована, развита и улучшена с учетом дальнейших требований. Разрешение может быть улучшено, если проводить фотосъемку с телефотографическим объективом и затем увеличивать изображение. Метод можно использовать как при естественном, так и при искусственном освещении. Современная техника, например сканер, упрощает ввод фотографий в компьютер, который далее может производить их разнообразную обработку.

Если скорость и ускорение вычисляются с помощью конечных разностей координаты и времени, то точность таких вычислений обычно недостаточна для научного анализа. Более эффективный способ состоит в аппроксимации экспериментальных данных некоторой теоретической зависимостью. В эксперименте на скольжение по обледеневшей дорожке динамический коэффициент трения предполагался постоянным. В этом случае скорость линейно убывает со временем. Поэтому на рис. 12 измеренные данные можно аппроксимировать линейной зависимостью, проводя по линейке прямую. В случае прыжка на одной ноге измеренные данные на рис. 17 аппроксимируются зависимостью (13), а в случае толкания ядра измеренные данные на рис. 21 аппроксимируются зависимостью (20). Если теоретическая кривая и измеренные данные показаны на одном рисунке, то качество аппроксимации легко оценить. Двигаясь вдоль кривых, мы можем установить, в какой момент времени на систему начинает действовать новая сила, так как ее появление приводит к расхождению измеренных данных и теоретической аппроксимации. Обычно при исследовании движения временные зависимости аппроксимируются сплайнами. Так как процедура аппроксимации сплайнами не

использует информацию о природе движения, а только сглаживает случайные ошибки, то она не столь эффективна, как описанный выше метод. В случае толкания ядра дальность толчка может быть вычислена с достаточной точностью, если скорость вылета ядра известна по меньшей мере с четырьмя десятичными знаками. Однако такая точность не требуется, так как толкание ядра можно разделить на несколько фаз – отталкивание ног, вращение тела, толчок рукой – и увеличение скорости в каждой фазе можно рассмотреть отдельно. Тогда требуется значительно меньшая точность – даже двух десятичных знаков может быть достаточно.

Список литературы

1. Stanhope S. System and Method for Performing Simultaneous Bilateral Measurements on a Subject in Motion, United States Patent, Patent Number 5,235,416, Date of Patent Aug.10.1993.
2. Braune W., Fischer O. Der Gang des Menschen. Abhandlungen der mathem.-phys. Klasse der Konigl. Sachsichen. Gesellschaft der Wissenschaften. 1895.
3. Baumann W. New chronophotographic methods for three-dimensional movement analysis, in Biomechanics IV, edited by Nelson R.C., Morehouse C.A. Baltimore: University Park Press, 1974.
4. Baum E., Motografie I. Bundesanstalt fur Arbeitsschutz und Unfallforschung. Dortmund, 1980.
5. Rahikainen A., Hakkinen K. A new method of photographing movements and its use in safety research of human gait // Työ ja ihmisen. 1987. V. 1. № 2. P. 104-114.
6. Rahikainen A. Method and Apparatus for Photographing a Movement, United States Patent, Patent Number 4,927,261, Date of Patent May 22.1990.
7. McMahon Th.A. Muscles, Reflexes and Locomotion. Princeton New Jersey: Princeton University Press, 1984.
8. Rahikainen A., Luhtanen P. A new method to estimate the efficiency of leg-pushing phase in shot put. Helsinki University of Technology, Laboratory of Mechanics, Research Report No 59, 2001.
9. Vanttinen T., Blomqvist M., Luhtanen P., Auvinen M., Palokangas J., Tuominiemi J., Yrjölä M., Ranta M., Von Hertzen R., Holmlund U. Rotational shot put technique V, Research Institute for Olympic Sports, Research Report, Jyväskylä, Finland, 1998.

A. Rahikainen (Helsinki, Finland)

THE USE OF ROTATING DISK IN THE PHOTOGRAPHY OF MOVEMENTS

A new system is provided for performing photographic motion analysis on a moving subject. The principle of this method is to photograph the moving subject through a rotating disk, which is comprised of one transparent and a plurality of filter openings serving as shutter apertures. In this way a series of exposures is made at equal time intervals and a photograph is obtained showing the course of the movement. The photograph contains a series of images of the subject, between which the paths of the spotlights attached to the moving subject are seen as broken light-lines. The photograph comprises an illustrative overall representation of the motion. Different phases and paths of movements included in the motion are obtained in a form in which its physical characteristics can be observed. By this invention the typical disadvantage of conventional methods, the unsatisfactory overall representation of complicated advancing movements, has been avoided. Thus this method is a useful complement to now existing methods. The technique of the device is simple and inexpensive.

The writing is divided into two sections. The first section treats the construction and operation of the apparatus and the second section – the measuring use of the apparatus. The second section is also divided into two parts. The first part represents some simple examples of balance keeping during human body movements. The other part is comprised of more

complicated movements of jump with one leg and shot put. The study of the leg-pushing movement in jump with one leg is based on the data obtained by this apparatus. The solution of the simpler leg-pushing movement in jump with one leg is then adapted into a more complicated leg-pushing movement in shot put.

Key words: stroboscopic photography, motion analysis, gait, walking, running, jumping, shot put.

Получено 4 января 2003 года