

УДК 531/534:57+612.7

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В СУСТАВНОМ ЗАЗОРЕ ЧЕЛОВЕКА ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГОГО ХРЯЦА И ЗАВИСИМОГО ОТ ВРЕМЕНИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

К. Вежхольский

Кафедра технологии фундаментов, Морская академия г. Гдыня,
Base Technique Department, Maritime Academy of Gdynia, Morcka str., 83, PL-81-225, Gdynia, Poland, e-mail:
wierch@wsm.gdynia.pl

Аннотация. Представлен анализ распределения давления синовиальной жидкости с микроструктурой для неньютоновской жидкости, описываемой моделью Даусона, при несимметричном течении в деформируемом зазоре тазобедренного сустава человека. Сделаны следующие предположения: течение синовиальной жидкости стационарное, несимметричное, изотермическое, при постоянной плотности. Учитываются следующие факторы: зависящее от времени магнитное поле, вращательное движение головки кости, сдавливание синовиальной жидкости в зазоре сустава человека, переменная вязкость неньютоновской синовиальной жидкости, изменение и деформация толщины зазора сустава. Используются упрощенные уравнения механики жидкости и теории упругости для давления. В статье анализируются распределение скорости синовиальной жидкости и деформация хряща. Новыми элементами в статье являются численные и аналитические выражения для распределения давления, учитываются сопряженные поля напряжений и деформаций, возникающие в суставном хряще и в синовиальной жидкости, полученные с помощью теории упругости и механики жидкости. Полученные в работе аналитические решения для значений распределения давления позволяют легко делать численные вычисления, которые могут быть полезны при медицинской диагностике.

Ключевые слова: тазобедренный сустав, неньютоновская синовиальная жидкость, нестационарное магнитное поле, деформируемый хрящ.

1. Введение

Во многих статьях, представленных в списке литературы, обсуждаются не только гидродинамические параметры (т.е. компоненты скорости синовиальной жидкости, давление в зазоре сустава), но также механические параметры (а именно, силы трения, коэффициент трения, несущая способность). В этих работах, как правило, используются аналитические и численные методы. Краткий обзор разработанных методов и результатов решений обобщен в таблице.

В работах [24, 26, 30-34] предлагаются методы решения при наличии силы трения в различных суставах человека при различной геометрии суставных поверхностей костей. При этом рассматриваются переменная толщина зазора сустава, а также несимметричное течение синовиальной жидкости в магнитном поле.

Таблица

Краткий обзор работ в области параметров тазобедренного сустава

Статья	Течение синовиальной жидкости		Гидродинамическое трение, исследованное методом		Магнитное поле	Рабочие параметры, полученные аналитическим (а) и численным методом (б)
	симметричное	несимметричное	сдавливания	вращения		
[2]	да	нет	да	да	нет	давление (а), силы трения (а), коэффициент трения
[11]	да	нет	да	нет	нет	силы трения
[16]	не определено	не определено	не определено	не определено	да	наличие смазки
[19]	да	нет	нет	да	нет	давление, несущая способность (а), (б)
[21]	да	нет	нет	да	нет	сила трения, несущая способность, коэффициент трения (а), (б)
[22]	да	нет	нет	да	нет	распределение давления, несущая способность (а), (б)
[23]	да	нет	нет	да	нет	полные решения (а), (б)
[24]	да	нет	нет	да	нет	сила трения (а)
[25]	да	нет	нет	да	да	сила трения (а)
[26]	да	нет	нет	да	да	сила трения (а)
[27]	да	да	да	да	да	распределение давления (а)
[28]	да	да	нет	да	да	распределение давления (а)
[29]	да	нет	да	нет	нет	распределение давления (а)
[30]	да	нет	да	нет	нет	сила трения (а)
[31]	нет	да	да	нет	нет	распределение давления (а), скорость синовиальной жидкости (а)
[33]	нет	да	да	нет	нет	распределение давления (а)

При производстве вычислений сил трения в суставах человека учитываются компоненты скорости в окружном и продольном направлении [34]. Проблема вычисления несущей способности сустава человека при переменной деформируемой толщине зазора сустава и для несимметричного течения синовиальной жидкости в магнитном поле не обсуждалась в предыдущих работах автора [25-28, 31, 33-34].

Новыми элементами, представленными в данной статье, являются вычисления распределения давления в тазобедренном суставе человека для деформируемой поверхности хряща и кости в криволинейных ортогональных координатах. Между поверхностями имеется несимметричное течение в присутствии нестационарного магнитного поля.

2. Формулировка проблемы

В данной статье учитываются следующие факторы:

- вращательное движение головки бедренной кости и движение сдавливания головки кости,
- несимметричное движение синовиальной жидкости с постоянной плотностью,
- стационарное и изотермическое течение жидкости,
- переменная динамическая вязкость синовиальной жидкости,
- переменная толщина зазора сустава человека,
- переменное по времени индуцированное магнитное поле.

Поверхности головки кости и суставной чашечки покрыты тонким слоем хряща. Толщина хрящевой ткани на поверхности головки кости изменяется от 0,9 до 2,1 мм. Толщина слоя хрящевой ткани на поверхности чашечки варьируется от 0,5 до 2,1 мм. Изменения толщины зазора сустава могут быть связаны с геометрией головки кости, а именно, с некоторыми нерегулярностями, вызванными локальными деформациями хряща, шероховатостью и неровностью поверхностей хрящевой ткани. Упруго-гидродинамические эффекты могут рассматриваться в нормальных суставах человека из-за больших усилий, имеющих место в некоторых видах спорта, или в случае патологических суставов, когда из-за гидродинамического давления могут возникать деформации хрящевых поверхностей.

Биоупругие и гидродинамические эффекты имеют место из-за гибких и конформных пленок смазки с переменной толщиной и с переменной вязкостью. Ткань хряща приспособляется к условиям реальной смазки и, тем самым, создает интеллектуальную систему смазки. Шероховатость и неровности поверхности хрящевой ткани в чашечке и в головке кости представлены на рис. 1. Кроме того, мы учитываем патологические нерегулярности поверхности кости из-за шероховатости и различных изменений поверхности, характерных для многих заболеваний [17]. Среднеарифметическая шероховатость поверхности головки кости имеет значения от 0,82 до 2,52 мк, а для чашечки диапазон значений составляет от 1,99 до 3,88 мк [15]. При заболеваниях соответствующие значения могут составлять от 10 до 35 мк.

Сферические поверхности кости в тазобедренном суставе создают криволинейный сферический зазор сустава. На рис. 2 показана сила нагружения C_z в тазобедренном суставе человека, возникающая между поверхностями в магнитном поле при наличии гидродинамической смазки из-за вращения головки кости в окружном или меридиональном направлении. Значения магнитного поля индукции периодически меняются со временем. Вращательное движение головки кости радиуса R с угловой скоростью ω вызвано движением конечностей человека.

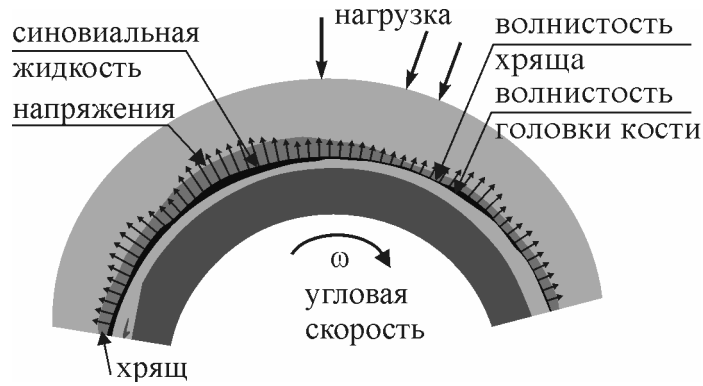


Рис. 1. Неровности поверхности кости и суставных чашечек, покрытых хрящом, в тазобедренном суставе человека

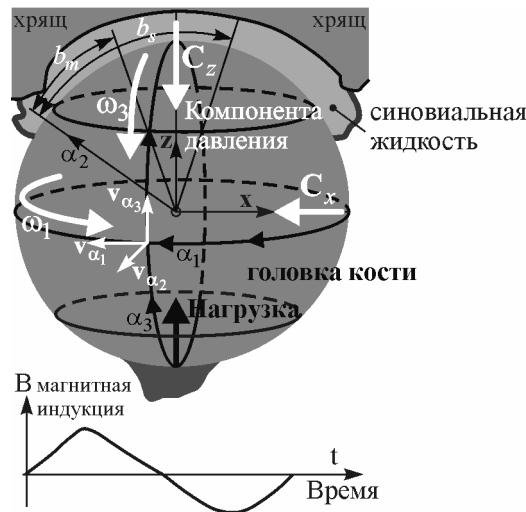


Рис. 2. Сила C_z , возникающая в тазобедренном суставе человека в сферических координатах при гидродинамической смазке с вращением как сила, противоположная действию силы нагружения (зазор в увеличенном масштабе)

На рис. 3 показана сила нагружения C_z в тазобедренном суставе человека при наличии гидродинамической смазки с движением сдавливания головки кости в указанном направлении. Произвольные вращательные поверхности кости создают криволинейный зазор сустава там, где есть синовиальная жидкость. На рис. 3 показаны две поверхности кости при сдавливании синовиальной смазки в суставах человека в магнитном поле индукции. Две криволинейные поверхности кости, отделенные зазором сустава малой толщины, поднимаются с однородной скоростью U . Эта скорость вызывается движением конечностей человека.

Соотношения между динамической вязкостью синовиальной жидкости и скоростью сдвига представлены на рис. 4. На рис. 4а показаны вязкости жидкости в голеностопном и коленном суставах, изученные с помощью реогониометра Вайсенберга при вращательном движении. На рис. 4б,с представлены численные и экспериментальные значения для синовиальной жидкости из работ [3, 4, 5]. При малых скоростях сдвига коэффициенты эффективной вязкости постоянны и жидкость имеет свойства ньютоновской жидкости. При больших скоростях сдвига коэффициенты убывают при увеличении скорости сдвига. Теоретические аспекты определяющих соотношений для синовиальной жидкости обсуждаются в работе [5].

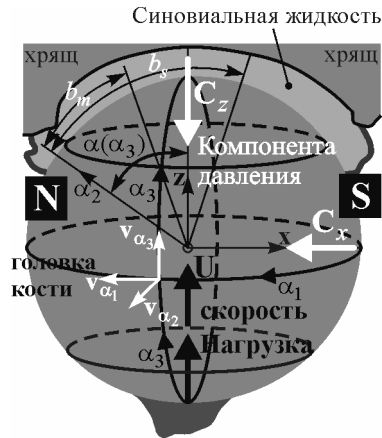


Рис. 3. Сила C_z , возникающая в тазобедренном суставе человека в сферических координатах при гидродинамической смазке с выдавливанием как сила, противоположная действию силы нагружения (зазор в увеличенном масштабе)

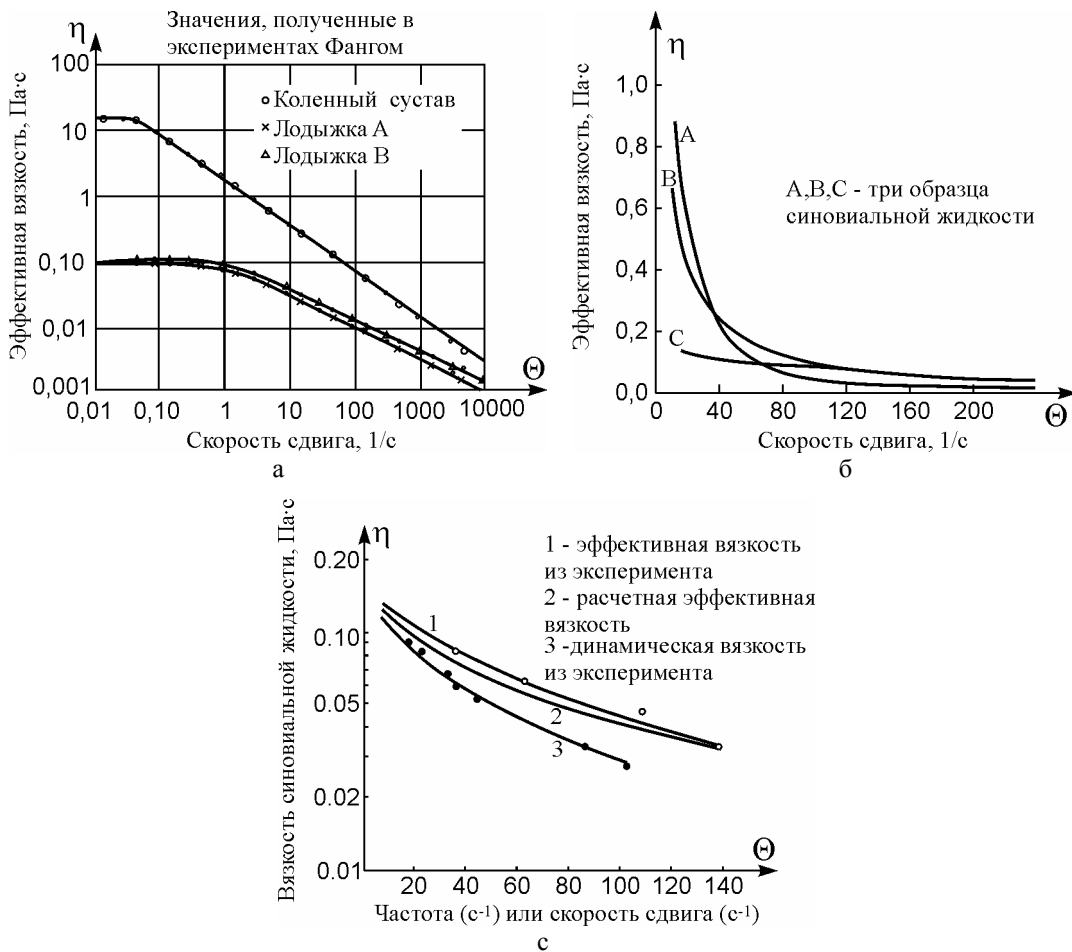


Рис. 4. Зависимость динамической вязкости синовиальной жидкости от скорости сдвига

3. Уравнения Максвелла для нестационарного электромагнитного поля

Уравнения Максвелла для нестационарного электромагнитного поля имеют вид [13]:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathit{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathit{div} \mathbf{D} = \rho_e, \quad \mathit{div}(\mathbf{rot} \mathbf{H}) = \mathit{div}\left(\sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ – объемный электрический заряд в синовиальной жидкости в Ас/м^3 , \mathbf{D} – вектор электрической индукции Ас/м^2 , \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля в $\text{мкГс}^{-3} \text{А}$, σ – коэффициент электропроводности синовиальной жидкости в $\text{с}^3 \text{А}^2 \text{м}^{-3} \text{кг}$, H_i – компоненты вектора напряженности магнитного поля в А/м , $B_i = \mu H_i$ – компоненты вектора магнитной индукции \mathbf{B} в Т , $N_i = \chi H_i$ – компоненты вектора намагниченности \mathbf{N} в А/м , χ – коэффициент магнитной проницаемости синовиальной жидкости в $\text{мкГс}^{-2} \text{А}^{-2}$, ε – коэффициент электрической проницаемости синовиальной жидкости в $\text{с}^4 \text{А}^2 \text{м}^{-3} \text{кг}$, χ – безразмерный коэффициент интенсивности намагничивания.

При однородных и изотропных свойствах синовиальной жидкости без объемных электрических зарядов при $\rho_e=0$ уравнения (1) имеют следующий вид:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathit{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathit{div} \mathbf{E} = 0, \quad \left(\sigma + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathit{div} \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Учитывая тождество

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{R}) = \mathbf{grad}(\mathit{div} \mathbf{R}) - \nabla^2 \mathbf{R}, \quad (3)$$

уравнения (2) приводятся к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Если синовиальная жидкость есть хороший изолятор (при условии $\sigma = 0$), то из (4) получим:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Для электропроводящей синовиальной жидкости (при условии $\sigma \gg \varepsilon \approx 0$) из (4) следует:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

4. Основные уравнения для течения синовиальной несжимаемой микрополярной жидкости в деформируемом зазоре сустава

Течение синовиальной несжимаемой микрополярной жидкости в деформируемом зазоре сустава описывается уравнениями неразрывности, сохранения количества движения, момента количества движения синовиальной жидкости и уравнением для перемещения упругого хряща в следующем виде [6, 8]:

$$\mathit{div} \mathbf{v} = 0, \quad (7)$$

$$\rho \, dv/dt = - \operatorname{grad} p + (\eta + \eta_r) \Delta v + \eta_r \operatorname{rot} \Omega, \quad (8)$$

$$\rho \, m_r d\Omega/dt = -2\eta_r \Omega + \eta_r \operatorname{rot} v - \eta_r \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \Omega) + (\eta_\alpha + \eta_\beta + \eta_\gamma) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \Omega), \quad (9)$$

$$G \Delta u + (G + \Lambda) \operatorname{grad} (\operatorname{div} u) = \rho^* \partial^2 u / \partial t^2, \quad (10)$$

где приняты следующие обозначения: Ω – вектор микровращения в 1/с, η – динамическая вязкость в Пас, η_r – динамическая вязкость микровращения в Пас, $\eta_\alpha, \eta_\beta, \eta_\gamma$ – коэффициенты угловой вязкости в Нс, m_r – момент инерции жесткой частицы в м², v – вектор скорости синовиальной жидкости в м/с, p – давление в Па, ρ – плотность синовиальной жидкости в кг/м³, Δ – оператор Лапласа в м², u – вектор перемещения хряща в м, t – время в с, ρ^* – плотность хряща в кг/м³. Мы также обозначаем: $G = 0,5E(1+\nu)^{-1}$ – модуль сдвига хряща в Па, $\Lambda = Ev(1+\nu)^{-1}(1+2\nu)^{-1}$ – коэффициент упругости Ламе в Па, E – модуль Юнга хряща или кости в Па, ν – коэффициент Пуассона хряща или кости.

Мы учитываем следующие порядки величин чисел Рейнольдса для микровращения:

$$\operatorname{Re}_m \equiv \frac{V_0 \varepsilon_0 \rho}{\eta_0 + \eta_r} = O(1), \quad \operatorname{Re}_r \equiv \frac{V_0 \varepsilon_0 \rho}{\eta_r} = O(1), \quad \operatorname{Re} \equiv \frac{V_0 \varepsilon_0 \rho}{\eta_0} = O(1), \quad (11)$$

и пренебрежимо малые модифицированные числа:

$$\operatorname{Re}_{\alpha\beta} \equiv \frac{V_0 \varepsilon_0^3 \rho}{\eta_\alpha + \eta_\beta} \ll 1, \quad \operatorname{Re}_\gamma \equiv \frac{V_0 \varepsilon_0 m_r \rho}{\eta_\gamma} \ll 1, \quad (12)$$

где $\Psi \equiv \varepsilon_0/R \approx 10^{-3}$, $\Psi^* \equiv \varepsilon_s/R \approx 10^{-3}$. Здесь R – радиус кривизны поверхности кости в м, ε_0 – характеристическое значение толщины зазора в м, ε_s – характеристическое значение толщины хрящевого слоя в м, V_0 – линейная или окружная скорость поверхности кости в м/с. Основные уравнения (7)–(10) после пренебрежения членами порядка Ψ и Ψ^* имеют следующий вид [8]:

$$0 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} + (\eta_o + \eta_r) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_2^2} + \eta_r \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2}, \quad (13)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \alpha_2}, \quad (14)$$

$$-\rho v_1^2 \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} + (\eta_o + \eta_r) \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha_2^2} - \eta_r \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2}, \quad (15)$$

$$h_3 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + h_1 h_3 \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_1 v_3) = 0, \quad (16)$$

$$\eta_\gamma \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial \alpha_2^2} - \eta_r \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} = 0, \quad (17)$$

$$\eta_\gamma \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \alpha_2^2} + \eta_r \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \alpha_2^2} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(2G + \Lambda \delta_{2i}) \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_2} \right] = \delta_{2i} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (3K\alpha_T T^*) \right], \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (20)$$

где h_1, h_3 – коэффициенты Ламе и $0 \leq \alpha_1 \equiv \varphi \leq 2\pi c_1$, $0 < c_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \alpha_3 \equiv \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $0 \leq \alpha_2 \equiv r \leq \varepsilon$. Мы обозначаем: $K \equiv \Lambda + (2/3)G$ – объемный модуль упругости в Па, α_T – коэффициент линейного температурного расширения хряща или кости в K^{-1} , T^* – температура в хряще в К, δ_{ij} – символы Кронекера (1 для $i = j$ и 0 для $i \neq j$). Мы применяем криволинейную ортогональную систему координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в окружном направлении, по толщине зазора и по длине, соответственно. Символы u_1, u_2, u_3 означают неизвестные компоненты вектора перемещения тела хряща в окружном направлении, по толщине зазора и в меридиональном направлении, соответственно. При аксиально несимметричном течении синовиальной жидкости три неизвестные компоненты v_1, v_2, v_3 вектора скорости синовиальной жидкости зависят от переменных α_1, α_2 и α_3 , неизвестная функция давления p зависит от α_1, α_3 . Кроме того, мы имеем три неизвестные функции $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ вектора микровращения. Толщина зазора ε зависит от компонент u_i . Поэтому она может быть функцией от α_1 и α_3 . Напряжения и перемещения, имеющие место в упругом слое хряща и кости и в синовиальной жидкости, создают связанные поля, представленные в системе уравнений (13)–(20), которая была получена с помощью теории упругости и механики жидкости.

5. Основные уравнения и обзор решений для неньютоновской модели Даусона несжимаемой синовиальной жидкости в магнитном поле и деформируемом хряще

Проблема смазки в тазобедренном суставе человека может быть представлена с помощью системы уравнений сохранения количества движения и неразрывности для стационарного движения синовиальной жидкости в тонком зазоре и нестационарного магнитного поля с массовыми силами \mathbf{M} . Кроме того, мы учитываем уравнения равновесия для тонкого слоя в хряще человека. Система уравнений имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (21)$$

$$\rho \, d\mathbf{v}/dt = \operatorname{Div} \mathbf{S} + \mathbf{M}, \quad (22)$$

$$\mathbf{S} = -p \mathbf{I} + \eta_p \mathbf{A}_1, \quad (23)$$

$$G \Delta \mathbf{u} + (G + \Lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho^* \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2, \quad (24)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (25)$$

Символ \mathbf{A}_1 означает тензор деформации $\|\Theta_{ij}\|$, компоненты которого имеют следующий вид [14]:

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_i}{h_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{v_i}{h_i} \right) + \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{v_j}{h_j} \right) \right] + \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{v_k}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_k}. \quad (26)$$

Вязкость синовиальной жидкости с неньютоновскими свойствами была изучена экспериментально Д. Даусоном и В. Моу [10, 12]. Используя численные значения, полученные К. Вежхольским и С. Пытко [19, 20], была построена аппроксимационная формула для динамической вязкости в виде:

$$\eta_p \equiv \eta_\infty + \frac{\eta_o - \eta_\infty}{1 + A \cdot \Theta} \approx \eta_o - (\eta_o - \eta_\infty) \Theta A + \dots + O(A^2), \quad (27)$$

где η_∞ означает значение динамической вязкости синовиальной жидкости при больших скоростях скорости сдвига, η_o означает характеристическое значение динамической вязкости синовиальной жидкости в Пас для малых значений скорости сдвига. Символы A и B означают эмпирические коэффициенты, которые были получены из

экспериментов Д. Доусона, они также зависят от индукционного магнитного поля. Коэффициенты получены численным способом и имеют значения $A=1,88307$ с и $B=0,00458$ с² для нормального сустава человека и $A=0,03349$ с и $B=0,00131$ с² для патологического сустава человека, если магнитное поле не возникает. Характеристическое значение скорости сдвига и функция, имеющаяся в аппроксимационной формуле (26), имеют следующий вид:

$$\Theta_0 \cong O\left(\frac{V_0}{\varepsilon}\right), \quad \Theta \equiv \frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2}, \quad (28)$$

где ε означает толщину зазора. Мы пренебрегаем членами порядка $\text{Re}\Psi, \Psi$ и Ψ^* . После упрощений система уравнений сохранения количества движения, неразрывности и уравнения Максвелла для синовиальной жидкости в тонком зазоре и уравнения теории упругости для кости и хряща принимают следующий вид [10–14]:

$$0 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\eta_p \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{N_1}{h_1} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} + \frac{N_3}{h_3} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_3}, \quad (29)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial \alpha_2}, \quad (30)$$

$$-\rho v_1^2 \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\eta_p \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{N_1}{h_1} \frac{\partial B_3}{\partial \alpha_1} + \frac{N_3}{h_3} \frac{\partial B_3}{\partial \alpha_3}, \quad (31)$$

$$h_3 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + h_1 h_3 \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_1 v_3) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{h_3}{h_1} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{h_1}{h_3} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} \right) \right] = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} \quad \text{для } i = 1, 3, \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[G \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right] = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(2G + \Lambda) \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (3K \alpha_T T^*), \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[G \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right] = 0, \quad (36)$$

где $0 \leq \alpha_1 \equiv \varphi \leq 2\pi c_1$, $0 < c_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \alpha_3 \equiv \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $0 \leq \alpha_2 \equiv r \leq \varepsilon$. Для аксиально-несимметричного течения синовиальной жидкости три неизвестные компоненты v_1, v_2, v_3 вектора скорости синовиальной жидкости зависят от переменных α_1, α_2 и α_3 , неизвестная функция давление p зависит от α_1, α_3 , динамическая вязкость η_p синовиальной жидкости зависит от α_1, α_2 и α_3 . Толщина зазора ε зависит от компонент u_i вектора перемещения в хряще, поэтому она может зависеть от α_1 и α_3 . Без потери общности для компонент скорости и давления можно ввести следующие выражения:

$$v_i = v_i^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + A v_i^{(1)} + \dots + A^k v_i^{(k)} + \dots, \quad i = 1, 2, 3, \\ p = p^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) + A p^{(1)} + \dots + A^k p^{(k)} + \dots \quad (37)$$

Символ p означает полное давление, символ $p^{(0)}$ означает давление для динамической вязкости синовиальной жидкости, не зависящей от скорости сдвига, а коэффициенты h_1, h_3 обозначают коэффициенты Ламе. Для тазобедренного сустава, рассматриваемого в сферических координатах, мы имеем $h_1 \equiv R \sin(\alpha_3/R)$. Символы $p^{(j)}, v^{(j)}$ при $j = 1, 2, 3$ означают уменьшение или увеличение давления и скорости синовиальной жидкости, вызванные неньютоновскими свойствами синовиальной

жидкости, у которой вязкость зависит от скорости сдвига. Для гидродинамической смазки при наличии сдвливания, накладывая классические граничные условия [29, 30, 31] на компоненту скорости синовиальной жидкости в направлении толщины зазора, мы получаем модифицированные уравнения Рейнольдса для функции гидродинамического давления $p(\alpha_1, \alpha_3)$ в следующей форме [13, 14]:

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\varepsilon^3(u_2)}{\eta_0} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \alpha_1} - M_1(t)h_1 \right) \right] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[\frac{h_1 \varepsilon^3(u_2)}{h_3 \eta_0} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \alpha_3} - M_3(t)h_3 \right) \right] = -12U h_1, \quad (38)$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\varepsilon^3(u_2)}{\eta_0} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{h_1 \varepsilon^3(u_2)}{h_3 \eta_0} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \alpha_3} \right) = 0, \quad (39)$$

где: $0 < \alpha_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha_3 \leq R\pi c_3$, $0 \leq \alpha_2 \equiv r \leq \varepsilon$, $c_3 \in [0, 1/27]$,

$$M_i \equiv (\mathbf{N} \nabla) B_i + 0,5 \mathbf{rot}(\mathbf{N} \times \mathbf{B})_i. \quad p = p^{(0)} + A p^{(1)} + O(A^2). \quad (40)$$

В уравнениях (38) и (39) имеются неизвестные функции $p^{(1)}$ и $A p^{(1)}$. Эти функции описывают изменения давления, вызванные уменьшением динамической вязкости синовиальной жидкости из-за увеличения скорости сдвига. Далее мы накладываем классическое граничное условие [23–26] на компоненты скорости синовиальной жидкости, в особенности важно это для компоненты v_2 в направлении толщины зазора при рассмотрении гидродинамической смазки, вызванной вращением кости. Из-за малых скоростей мы пренебрегаем здесь центробежными силами. Тогда мы получаем модифицированные уравнения Рейнольдса для функции гидродинамического давления $p(\alpha_1, \alpha_3)$ в форме [32]:

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\varepsilon^3(u_2)}{\eta_0} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \alpha_1} - M_1(t)h_1 \right) \right] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[\frac{h_1 \varepsilon^3(u_2)}{h_3 \eta_0} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \alpha_3} - M_3(t)h_3 \right) \right] = 6\omega h_1 \frac{\partial \varepsilon(u_2)}{\partial \alpha_1}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\varepsilon^3(u_2)}{\eta_0} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{h_1 \varepsilon^3(u_2)}{h_3 \eta_0} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \alpha_3} \right) = \\ & = -\frac{1}{2} \omega \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\varepsilon^2(u_2) \kappa_1}{\eta_\infty} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \alpha_1} - M_1(t)h_1 \right) \right] - \frac{1}{4} \omega \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left[\frac{h_1^2 \varepsilon^2(u_2) \kappa_1}{\eta_\infty h_3} \left(\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \alpha_3} - M_3(t)h_3 \right) \right], \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$p = p^{(0)} + A p^{(1)} + O(A_2),$$

$$0 \leq \alpha_1 \equiv \varphi \leq 2\pi c_1,$$

$$0 < c_1 < 1,$$

$$b_m \equiv \pi R/8 \leq \alpha_3 \equiv \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s \varepsilon = \varepsilon[u_2(p)],$$

$$-0,02 \leq \kappa \equiv 4[(\eta_\infty)^2 - \eta_0 \eta_\infty](\eta_\infty) - 2 \leq -0,04.$$

6. Перемещения в тонкостенном хряще

Модифицированные уравнения Рейнольдса (38, 39, 41, 42) очень сильно связаны с перемещениями в кости и хряще u_i , которые описываются уравнениями (14), (35), (36). Чтобы получить этих уравнений перемещения u_i , мы должны сначала точно описать граничные условия. В этом случае мы используем соотношения Дюгамеля–

Неймана между компонентами τ_{ij} тензора напряжений \mathbf{S}^* в упругом хряще и компонентами ε_{ij} тензора деформации. Мы имеем следующие соотношения [11, 13]:

$$\tau_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + (\Lambda\varepsilon_{kk} - 3\alpha_T KT^*) \delta_{ij}, \quad (43)$$

при $i, j = 1, 2, 3$, где: δ_{ij} – компоненты тензора Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Далее мы рассмотрим соотношения деформация–перемещения в виде [13]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_i}{h_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) \right] + \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{u_k}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_k}, \quad (44)$$

где u_i – компоненты вектора перемещения \mathbf{u} в хряще.

Мы подставляем соотношение напряжения–деформации (43) и соотношение деформация–перемещения (44) в нижеследующие уравнение движения и уравнение теплопроводности для хряща

$$\text{Div } \mathbf{S}^* = 0, \quad (45)$$

$$\text{div} (\kappa^* \text{grad } T^*) = 0, \quad (46)$$

где κ^* – теплопроводность тела хряща, T^* – температура тела хряща.

Толщина упругого слоя имеет порядок ε_s , что в примерно в тысячу раз меньше радиуса кривизны тела хряща или других величин, имеющих в области трения. Если температура T^* в упругом хряще и вектор перемещений \mathbf{u} в хряще не зависят от времени t и если мы пренебрегаем величинами порядка ε_s , то из уравнений (45), (46) мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, а именно уравнения (34)–(36) и упрощенное уравнение теплопроводности [14]:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\kappa^* \frac{\partial T^*}{\partial \alpha_2} \right) = 0, \quad (47)$$

при $i = 1, 2, 3$; $0 \leq \alpha_1 \equiv \varphi \leq 2\pi c_1$, $0 < c_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \alpha_3 \equiv \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$.

Толщина упругого хряща изменяется в пределах от s_2 до s_1 , то есть $s_2 \leq \alpha_2 \leq s_3$. На внутренней поверхности хряща $\alpha_2 = s_2$, где упругий слой хряща контактирует с синовиальной жидкостью, нормальные напряжения равны гидростатическому давлению p с противоположным знаком, а тангенциальные напряжения равны нулю. Гидростатическое давление p действует вертикально на внешнюю поверхность упругого слоя хряща и поэтому давление не влияет на тангенциальные напряжения на поверхности. Упругий слой хряща лежит на жесткой сфере кости в положении $\alpha_2 = s_3$ и поэтому контактная поверхность этих тел не деформируется давлением. Граничные условия в упругом хряще имеют следующий вид:

$$\tau_{ij}(\alpha_1, \alpha_2 = s_2, \alpha_3) = -p(\alpha_1, \alpha_3) \delta_{i2} \delta_{ij}, \quad (48)$$

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2 = s_3, \alpha_3) = 0, \quad (49)$$

где $i = 1, 2, 3$.

Мы подставляем соотношения напряжения–деформации (43) и соотношения деформации–перемещения (44) в граничные условия (48, 49). В этих уравнениях мы пренебрегаем членами порядка $\varepsilon_s/R \cong 10^{-3}$ в сравнении с членами порядка 1, где R означает величину радиуса головки кости. Тогда мы получаем следующее уравнение [32]:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2 = R + \varepsilon, \alpha_3) = \frac{3\alpha_T \kappa^* \Delta T(\alpha_2 = R + \varepsilon) - p}{2G + \Lambda}, \quad (50)$$

где $u_2 = u_2(p, T)$ есть компонента вектора перемещения в хряще в направлении толщины зазора и ΔT есть функция разности температуры в слое хряща в направлении толщины зазора, полученная из уравнения теплопроводности, κ^* – есть теплопроводность тела хряща. Символ p означает полное давление. Уравнение (41) определяет неизвестное давление $p^{(0)}$ как первое приближение к полному давлению. Уравнение (42) определяет неизвестную функцию давления $p^{(1)}$, то есть $Ap^{(1)}$, которая описывает коррекцию значений полного давления. Дважды интегрируя уравнение (35) относительно переменной α_2 при граничных условиях (49), (50), мы получим перемещения в упругом слое u_i , где величина u_2 означает перемещение хряща в направлении толщины зазора.

Перемещение упругого слоя в направлении толщины зазора имеет следующий вид [32]:

$$u_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = - \int_{\alpha_2}^{s_3} \alpha_T \cdot \frac{3K}{2G + \Lambda} \Delta T^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\alpha_{2s} + \int_{\alpha_2}^{s_3} \frac{p(\alpha_1, \alpha_3)}{2G + \Lambda} d\alpha_{2s}, \quad (51)$$

$0 \leq \alpha_1 \equiv \varphi \leq 2\pi c_1$, $0 < c_1 < 1$, $b_m \equiv \pi R/8 \leq \alpha_3 \equiv \vartheta \leq \pi R/2 \equiv b_s$, $s_2 \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2s} \leq s_3$, α_{2s} есть переменная интегрирования, $\Delta T^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ описывает изменение температуры в упругом слое хряща.

7. Общая форма зависимостей напряжения–деформации в синовиальной вязкоупругой жидкости

1. Теоретическая зависимость. Вязкоупругие свойства биологических жидкостей описываются с помощью определяющих соотношений Ривлина–Эриксона [1]

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \eta\mathbf{A}_1 + \alpha(\mathbf{A}_1)^2 + \beta\mathbf{A}_2 + \gamma\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2. \quad (52)$$

Предполагаем приближенное соотношение:

$$\mathbf{S} \cong -p\mathbf{I} + \mathbf{A}_1[\eta_0 + \alpha\mathbf{A}_1^* + \beta\frac{\mathbf{A}_2^*}{\mathbf{A}_1^*} + \gamma\mathbf{A}_2^*], \quad (53)$$

где эффективная динамическая вязкость имеет следующий вид:

$$\eta_p \equiv \eta_0 + \alpha\mathbf{A}_1^* + \beta\frac{\mathbf{A}_2^*}{\mathbf{A}_1^*} + \gamma\mathbf{A}_2^*, \quad (54)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T, \quad (55)$$

$$\mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{grad} a + (\mathbf{grad} a)^T + 2\mathbf{L}^T\mathbf{L}, \quad (56)$$

$$\mathbf{A}_2 \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (57)$$

Здесь введены обозначения:

\mathbf{S} – тензор напряжений в Па,

\mathbf{A}_1 – тензор скоростей деформаций в с^{-1} ,

\mathbf{A}_2 – тензор скоростей деформаций второго порядка в с^{-2} ,

\mathbf{L} – тензор градиента скорости жидкости в с^{-1} ,

\mathbf{L}^T – транспонированный тензор градиента скорости жидкости в с^{-1} ,

p – давление, вызванное перфузией в Па,

t – время в с,

\mathbf{a} – вектор ускорения в $\text{м}/\text{с}^2$,

\mathbf{v} – вектор скорости в $\text{м}/\text{с}$,

α – первый коэффициент, описывающий исследуемую жидкость в Па с²,
 β – второй коэффициент, описывающий исследуемую жидкость в Па с²,
 $\gamma \equiv \alpha\beta/\eta_0$ – третий коэффициент, описывающий исследуемую жидкость в Па с³,
 \mathbf{I} – единичный тензор,

η_0 – динамическая вязкость в Пас² при очень медленном движении биологической жидкости,

η_∞ – динамическая вязкость в Пас² при быстром движении биологической жидкости,

η_p – эффективная вязкость биологической жидкости в Пас².

2. Экспериментальная модель. Множество экспериментов, проведенных на биологических жидкостях, показывает, что динамическая вязкость уменьшается с увеличением скорости сдвига. Поэтому соотношение скорость сдвига-вязкость может быть записано в следующей форме:

$$\eta_p(A, B) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)[1 + AA_1^* + BA_1^*A_1^* + BA_2^*]^{-1}, \quad (58)$$

где коэффициент A , полученный экспериментальным путем, имеет значение от 1,200 до 2,000 с, а коэффициент B наиболее часто имеет значение от 0,00300 до 0,00600 с².

Эффективная вязкость (58) как функция двух переменных A и B может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности точки $A = 0, B = 0$:

$$\eta_p(A, B) = \eta_p(A = 0, B = 0) + \frac{\partial \eta_p}{\partial A}(A = 0, B = 0)A + \frac{\partial \eta_p}{\partial B}(A = 0, B = 0)B + O(A^2) + O(B^2) \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_p(A = 0, B = 0) &= \eta_0, \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial A}(A = 0, B = 0) &= (\eta_0 - \eta_\infty) \frac{(-A_1^*)}{(1 + AA_1^* + BA_1^*A_1^* + BA_2^*)^2} \Big|_{A=0, B=0}, \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial A}(A = 0, B = 0)A &= -(\eta_0 - \eta_\infty)AA_1^*, \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial B}(A = 0, B = 0) &= (\eta_0 - \eta_\infty) \frac{(-A_1^*A_1^* - A_2^*)}{(1 + AA_1^* + BA_1^*A_1^* + BA_2^*)^2} \Big|_{A=0, B=0}, \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial B}(A = 0, B = 0)B &= -(\eta_0 - \eta_\infty)B(A_1^*A_1^* + A_2^*) \end{aligned} \quad (60)$$

Если подставить производные из (60) в (59), то получим:

$$\begin{aligned} \eta_p(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \eta_0 - (\eta_0 - \eta_\infty)A_1^*A_1^* - (\eta_0 - \eta_\infty)A_1^*A_1^*B \\ &\quad - \frac{1}{2}(\eta_0 - \eta_\infty)A_2^*B - \frac{1}{2}(\eta_0 - \eta_\infty)A_1^*B + O(A^2) + O(B^2). \end{aligned} \quad (61)$$

Приравнявая левые и правые части соотношений (61) и (54), получим:

$$\alpha A_1^* = -(\eta_0 - \eta_\infty)(A + BA_1^*)A_1^*, \quad (62)$$

$$\beta A_2^*/A_1^* = -? (\eta_0 - \eta_\infty)A_2^*B, \quad (63)$$

$$\gamma A_2^* \equiv A_2^* \alpha \beta \eta_0^{-1} = -? (\eta_0 - \eta_\infty)A_2^*B. \quad (64)$$

Обе части уравнения (62) мы делим на A_1^* , а обе части уравнения (63) делим на A_2^*/A_1^* , после чего соотношение (63) поставляем в (62). В результате получим:

$$\alpha - 2\beta = -(\eta_0 - \eta_\infty)A. \quad (65)$$

Деля обе части уравнения (64) на коэффициент A_2^* , получим:

$$\alpha\beta = -? (\eta_0 - \eta_\infty)\eta_0 B. \quad (66)$$

Решая систему алгебраических уравнений (65), (66), мы получаем значения α и β для биологической жидкости как функцию $A, B, \eta_0, \eta_\infty$ в виде:

$$\alpha = -\frac{1}{2}A(\eta_0 - \eta_\infty) - \frac{1}{2}\sqrt{[A(\eta_0 - \eta_\infty)]^2 - 4B\eta_0(\eta_0 - \eta_\infty)}, \quad (67)$$

$$\beta = \frac{1}{4}A(\eta_0 - \eta_\infty) - \frac{1}{4}\sqrt{[A(\eta_0 - \eta_\infty)]^2 - 4B\eta_0(\eta_0 - \eta_\infty)}. \quad (68)$$

Если $0 \ll B/A \ll 1$, то из решений (67),(68) получаем следующие приближенные значения:

$$\begin{aligned} \alpha &\cong -(\eta_0 - \eta_\infty)A + \eta_0 B/A + 0(B^2/A^2), \\ \beta &\cong ? \eta_0 B/A + 0(B^2/A^2), \\ \gamma &\cong -? (\eta_0 - \eta_\infty)B + 0(B^2/A^2). \end{aligned} \quad (69)$$

Например, если мы предположим: $\eta_0 = 10,00$ Пас, $\eta_\infty = 0,10$ Пас, $A = 0,03349$ с, $B = 0,00100$ с², то из решений (69) следует, что: $\alpha = -0,0329$ Пас², $\beta = 0,14929$ Пас², $\gamma = -0,00495$ Пас³.

Если, следуя Астарита и Маруччи [1], принять, что $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$, то из уравнений

$$\alpha - 2\beta = -(\eta_0 - \eta_\infty)A, \quad \alpha\beta = -? (\eta_0 - \eta_\infty)\eta_0 B \quad (70)$$

получим:

$$\alpha = -\frac{1}{2}A(\eta_0 - \eta_\infty) + \frac{1}{2}\sqrt{[A(\eta_0 - \eta_\infty)]^2 + 4B\eta_0(\eta_0 - \eta_\infty)}, \quad (71)$$

$$\beta = -\frac{1}{4}A(\eta_0 - \eta_\infty) - \frac{1}{4}\sqrt{[A(\eta_0 - \eta_\infty)]^2 + 4B\eta_0(\eta_0 - \eta_\infty)}. \quad (72)$$

Если $0 \ll B/A \ll 1$, то из решений (71), (72) следуют следующие приближенные значения:

$$\begin{aligned} \alpha &\cong +\eta_0 B/A + 0(B^2/A^2), \\ \beta &\cong -(\eta_0 - \eta_\infty)A - ? \eta_0 B/A + 0(B^2/A^2), \\ \gamma &\cong -? (\eta_0 - \eta_\infty)B + 0(B^2/A^2). \end{aligned} \quad (73)$$

Например, если мы предположим, что $\eta_0 = 10,00$ Пас, $\eta_\infty = 0,10$ Пас, $A = 0,03349$ с, $B = 0,00100$ с², то из решений (73) мы получим следующие величины: $\alpha = 0,2985$ Пас², $\beta = -0,312$ Пас², $\gamma = -0,00495$ Пас³. Здесь неравенство $\alpha < -2\beta$ из [1] удовлетворяется. Этот факт подтверждает наличие нормальных напряжений в вязкоупругой неньютоновской синовиальной жидкости [1].

8. Деформированная толщина зазора в тазобедренном суставе человека

Для тонкого слоя, лежащего на сферической поверхности кости, мы имеем следующие коэффициенты Ламе:

$$h_1 = R \sin(\alpha_3/R), \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1, \quad (74)$$

где R – радиус сферы. Далее введем обозначения: $\alpha_1 \equiv \varphi$ – окружное направление, $\alpha_2 = r$ – направление толщины зазора, $\alpha_3 \equiv \vartheta$ – меридиональное направление. Зависимости между прямоугольными (x, y, z) и сферическими $(\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = r, \alpha_3 = \vartheta)$ координатами имеют классический вид:

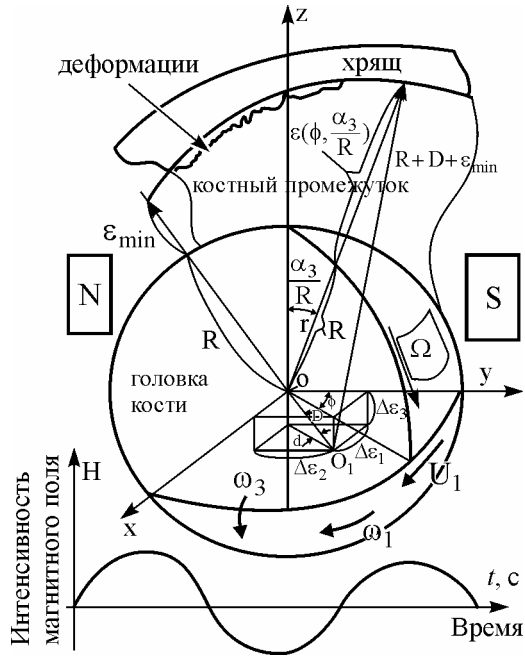


Рис. 5. Центры сферического тела хряща и сферической головки кости при смазке, вызванной вращением при переменном времени, в зависимости от интенсивности магнитного поля H и деформации хряща

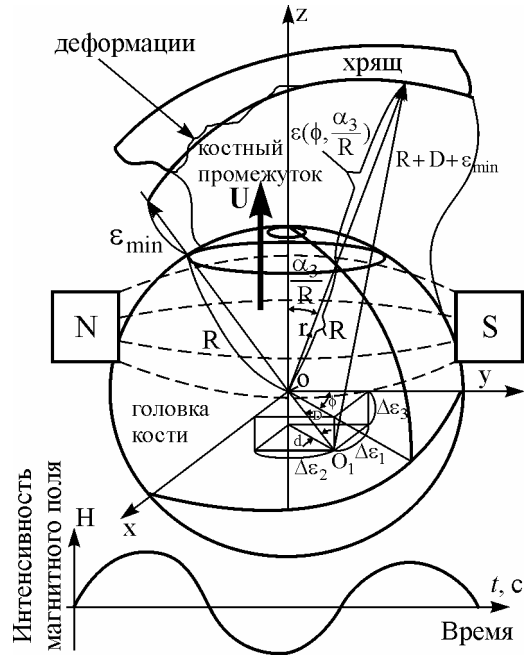


Рис. 6. Центры сферического тела хряща и сферической головки кости при смазке, вызванной сдавливанием

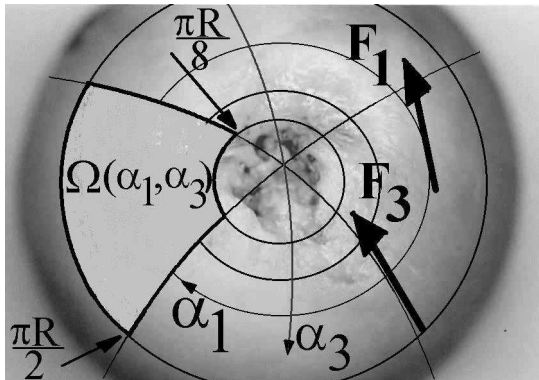


Рис. 7. Область распределения давления, покоящаяся на поверхности головки кости, при смазке, вызванной вращением

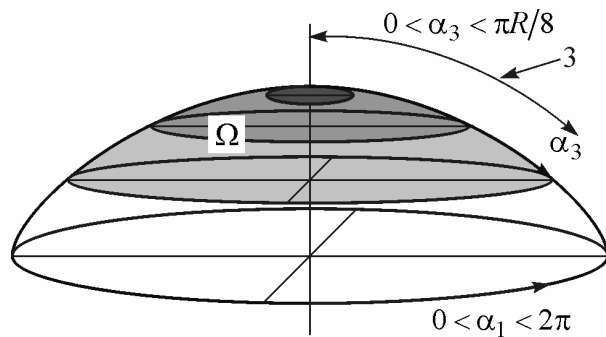


Рис. 8. Область распределения давления, покоящаяся на поверхности головки кости, при смазке, вызванной сдавливанием

$$x=r \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \cos\varphi, \quad y=r \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \sin\varphi, \quad z=r \cos\left(\frac{\vartheta}{R}\right), \quad 0 < r < R. \quad (75)$$

Графическая иллюстрация центра сферической головки кости $O(0, 0, 0)$ и центра сферического хряща в точке $O_1(x-\Delta\varepsilon_1, y-\Delta\varepsilon_2, z+\Delta\varepsilon_3)$ для гидродинамической смазки, вызванной вращением, представлена на рис. 5; для гидродинамической смазки, вызванной сдавливанием, – на рис. 6. Область гидродинамической смазки, обусловленной вращением, показана на рис. 7, вследствие сдавливания – на рис. 8.

Уравнение сферической поверхности хряща в центральной точке $O_1(x-\Delta\varepsilon_1, y-\Delta\varepsilon_2, z+\Delta\varepsilon_3)$ может быть переписано в следующей форме:

$$(x-\Delta\varepsilon_1)^2 + (y-\Delta\varepsilon_2)^2 + (z+\Delta\varepsilon_3)^2 = (R+D+\varepsilon_{\min})^2, \quad D = [(\Delta\varepsilon_1)^2 + (\Delta\varepsilon_2)^2 + (\Delta\varepsilon_3)^2]^{0.5} \quad (76)$$

После подстановки соотношений (75) в (76) получим:

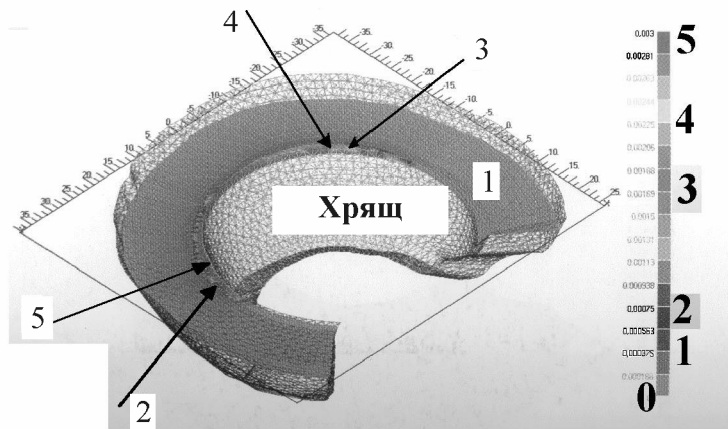


Рис. 9. Экспериментальные данные о деформации поверхности суставной чашечки в тазобедренном суставе человека (приводится по [15])

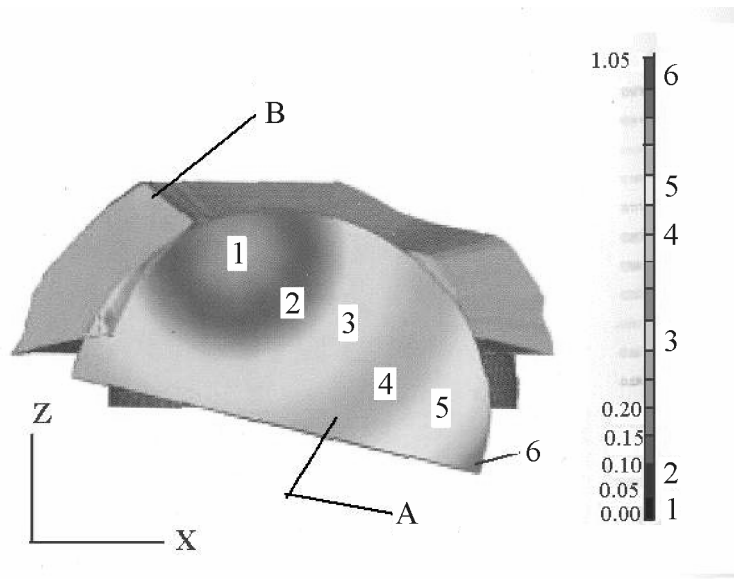


Рис. 10. Экспериментальные данные о поверхности головки кости в тазобедренном суставе человека (приводится по [15])

$$(r \cos\varphi \sin\alpha_3/R - \Delta\varepsilon_1)^2 + (r \sin\varphi \sin\alpha_3/R - \Delta\varepsilon_2)^2 + (r \cos\alpha_3/R + \Delta\varepsilon_3)^2 = (R + D + \varepsilon_{\min})^2. \quad (77)$$

Выражение для толщины зазора имеет следующий вид:

$$\varepsilon(\varphi, \alpha_3/R) \equiv u_2 + r - R. \quad (78)$$

Здесь величина r может быть найдена из (77) и подставлена в (78). Поэтому формула для толщины зазора окончательно имеет следующий вид:

$$\varepsilon(\varphi, \alpha_3/R) = u_2 + \Delta\varepsilon_1 \cos\varphi \sin(\alpha_3/R) + \Delta\varepsilon_2 \sin\varphi \sin(\alpha_3/R) - \Delta\varepsilon_3 \cos(\alpha_3/R) - R + \{[\Delta\varepsilon_1 \cos\varphi \sin(\alpha_3/R) + \Delta\varepsilon_2 \sin\varphi \sin(\alpha_3/R) - \Delta\varepsilon_3 \cos(\alpha_3/R)]^2 + (R + \varepsilon_{\min})(R + 2D + \varepsilon_{\min})\}^{0.5}. \quad (79)$$

Экспериментальные значения деформации кости и поверхности суставной чашечки в тазобедренном суставе человека, полученные в работе [15], сравнены со значениями, полученными в данной работе с помощью упрощенных уравнений теории упругости (34)–(36) при граничных условиях (50). Различия между этими результатами составляют около 10 процентов. Экспериментальные значения деформации поверхности чашечки в тазобедренном суставе человека по данным работы [15] составляют от 8 до 30 мк в нагруженной зоне (рис. 9). Экспериментальные значения

деформации поверхности головки кости в тазобедренном суставе человека локализованы в основном в нагруженной зоне и имеют значения от 5 до 10 мк (рис. 10).

Эти деформации получены с помощью метода компьютерной томографии, с использованием аппаратуры, описанной в [15]. Вышеуказанные значения деформаций введены в уравнения количества движения и в модифицированные уравнения Рейнольдса и использованы в дальнейших численных расчетах.

Минимальное значение толщины зазора в сферическом тазобедренном суставе мы находим из формулы [8]:

$$\frac{\varepsilon_{\min}}{R} \equiv \sqrt[5]{2\pi} S_1^{0,4} \left(\frac{\omega R^2 \eta}{C} \right)^{0,6}, S_1 \equiv \frac{C}{ER^2}, \frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right), \quad (80)$$

где E_1, E_2, ν_1, ν_2 – упругие модули и коэффициенты Пуассона для головки кости и хряща, соответственно, C – нагрузка, а величины η, ω, R были определены ранее. Зависимость (27) для $\Theta \approx \omega R / \varepsilon_{\min}$ может быть написана в следующей форме:

$$\frac{\omega R^2 \eta}{C} \equiv \frac{S_2}{S_1} \left(\frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\eta_0 + \frac{\eta_0}{1 + S_3 \frac{R}{\varepsilon_{\min}}}} \right), S_2 \equiv \frac{\omega R \eta_0}{ER}, S_3 \equiv A\omega. \quad (81)$$

Комбинируя уравнения (80) и (81), мы получаем систему двух уравнений для определения двух неизвестных величин, а именно динамической вязкости η синовиальной жидкости и минимального значения ε_{\min} толщины зазора, где учтены упругие деформации хряща. Если предположить следующие данные: $R=2,6 \times 10^{-2}$ м, $E=2 \times 10^5$ Па, $\omega R=3 \times 10^{-1}$ м/с, $\eta_\infty=0,10$ Пас, $2\pi R/C=3 \times 10^{-4}$ м/Н, $\eta_0/\eta_\infty \approx 1000$, $A=1,88$ с, $C=544,26$ Н, то из уравнений (99), (100) мы получаем: $\varepsilon_{\min}=0,0000208$ м=20,88 мк и $\eta=0,1036$ Пас. Если взять для вычислений следующие величины: $A=1,88$ с, $\eta_0=100,00$ Пас, $\eta_\infty=0,10$ Пас, $R=0,020$ м, $C=544$ Н, $0,50 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 10,00 \text{ с}^{-1}$, $2 \times 10^5 \text{ Па} \leq E \leq 2 \times 10^7 \text{ Па}$, то мы получаем минимальное значение толщины зазора в диапазоне: $0,29 \text{ мк} \leq \varepsilon_{\min} \leq 19,90 \text{ мк}$.

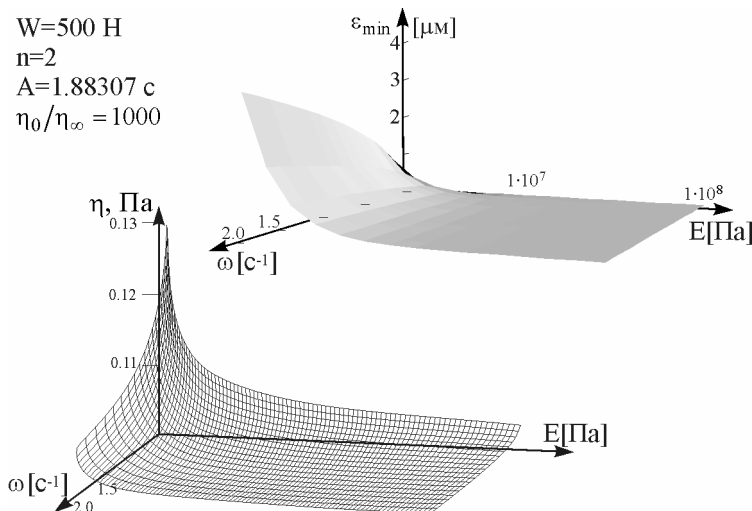


Рис. 11. Зависимость минимальной толщины зазора сустава и динамической вязкости синовиальной жидкости от упругого модуля хряща и скорости сдвига жидкости

С помощью вышеуказанных вычислений мы можем показать зависимости между минимальным значением толщины зазора ε_{\min} , упругим модулем хряща E и скоростью сдвига синовиальной жидкости (рис. 11). Если упругий модуль хряща убывает, то увеличивается деформация хряща и увеличивается минимальное значение толщины зазора. Динамическая вязкость синовиальной жидкости зависит от упругого модуля хряща (рис. 11).

Чтобы объяснить этот факт, мы можем заметить, что если упругий модуль хряща уменьшается, то прочность хряща также уменьшается, а минимальная величина зазора сустава увеличивается, и потому уменьшается скорость синовиальной жидкости, также уменьшается скорость сдвига течения и увеличивается вязкость синовиальной жидкости.

9. Численные вычисления распределения давления и несущей способности в деформированном сферическом тазобедренном суставе человека

9.1. Распределение давления и несущая способность

Общую несущую способность на криволинейной головке кости можно получить с помощью поверхностного интеграла по следующей формуле:

$$C_{\text{общ}} \equiv \iint_{\Omega(\alpha_1, \alpha_3)} p(\alpha_1, \alpha_3) d\Omega(\alpha_1, \alpha_3). \quad (82)$$

Элемент площади в двойном интеграле имеет следующий вид:

$$d\Omega = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \vartheta} \right|_{r=R} d\varphi d\vartheta. \quad (83)$$

Символ \mathbf{r}_0 означает радиус-вектор для поверхности головки кости и $0 < \alpha_1 \equiv \varphi < 2\pi c_1$, $0 < c_1 < 1$, $\pi R/8 < \alpha_3 \equiv \vartheta < \pi R/2$ для вращения и $0 < \alpha_3 \equiv \vartheta < \pi R/18$ для выдавливания. Радиус-вектор \mathbf{r}_0 можно получить по формуле:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} x + \mathbf{j} y + \mathbf{k} z, \quad (84)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные векторы и для сферических координат мы имеем:

$$x = R \cos \varphi \sin \vartheta / R, \quad y = R \sin \varphi \sin \vartheta / R, \quad z = R \cos \vartheta / R. \quad (85)$$

Если мы вставим формулу (85) в (84), а затем (84) в (83), то получим:

$$d\Omega = R^2 \sin(\vartheta/R) d\varphi d(\vartheta/R). \quad (86)$$

9.2. Распределение давления при наличии гидростатической смазки при вращении

Если магнитным полем можно пренебречь, то модифицированное уравнение Рейнольдса (41) для гидродинамической смазки при вращении сферической головки кости имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\varepsilon^3(u_2)}{\eta_0} \frac{\partial p^{(o)}}{\partial \varphi} \right) + R^2 \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{\varepsilon^3(u_2)}{\eta_0} \frac{\partial p^{(o)}}{\partial \vartheta} \sin\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \right] = 6\omega R^2 \frac{\partial \varepsilon(u_2)}{\partial \varphi} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{R}\right), \quad (87)$$

где $0,30\pi < \alpha_1 \equiv \varphi < 1,30\pi$, $\pi R/8 < \alpha_3 \equiv \vartheta < \pi R/2$.

Численные вычисления были проведены с использованием метода конечных разностей при помощи вычислительной программы Маткад 2000. При вычислениях мы

принимали следующие значения параметров для зазора сустава: $\Delta\varepsilon_1=2$ мк, $\Delta\varepsilon_2=2$ мк, $\Delta\varepsilon_3=+2$ мк, радиус головки кости $R=0,026575$ м и атмосферное давление на границе области $\Omega(\alpha_1, \alpha_3)$, покоящейся на головке кости (рис. 6). Для нормального тазобедренного сустава мы берем в вычислениях наименьшую толщину зазора $\varepsilon_{\min}=2,0$ мк. Учитывая угловую скорость головки кости $\omega=1$ с⁻¹ и среднее значение динамической вязкости синовиальной жидкости $\eta_0=0,03$ Пас, мы получим из уравнения (87), что гидродинамическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $1,11 \times 10^6$ Н/м² и несущую способность $C_{\text{общ}}=673$ Н. Учитывая угловую скорость головки кости $\omega=0,1$ с⁻¹ и среднее значение динамической вязкости синовиальной жидкости $\eta_0=0,40$ Пас, мы получаем из уравнения (87), что гидродинамическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $1,44 \times 10^6$ Н/м² и несущую способность $C_{\text{общ}}=897$ Н (рис. 12). Поверхность смазки имеет площадь $\pi R^2 \cos \pi/8 \approx 20,50$ см².

Для патологического тазобедренного сустава мы берем в вычислениях наименьшую толщину зазора $\varepsilon_{\min}=1,0$ мк. При угловой скорости головки кости $\omega=1$ с⁻¹ и средней величине динамической вязкости синовиальной жидкости $\eta_0=0,005$ Пас мы получим из уравнения (87), что гидростатическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $0,76 \times 10^6$ Н/м², и несущая способность равна $C_{\text{общ}}=341$ Н. Принимая значения $\omega=0,1$ с⁻¹ и $\eta_0=0,07$ Пас, мы получаем из уравнения (87), что гидростатическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $1,034 \times 10^6$ Н/м², и несущую способность $C_{\text{общ}}=477,5$ Н. Полученные распределения давления на головке кости для нормального и патологического зазора тазобедренного сустава человека показаны на рис. 12, 13.

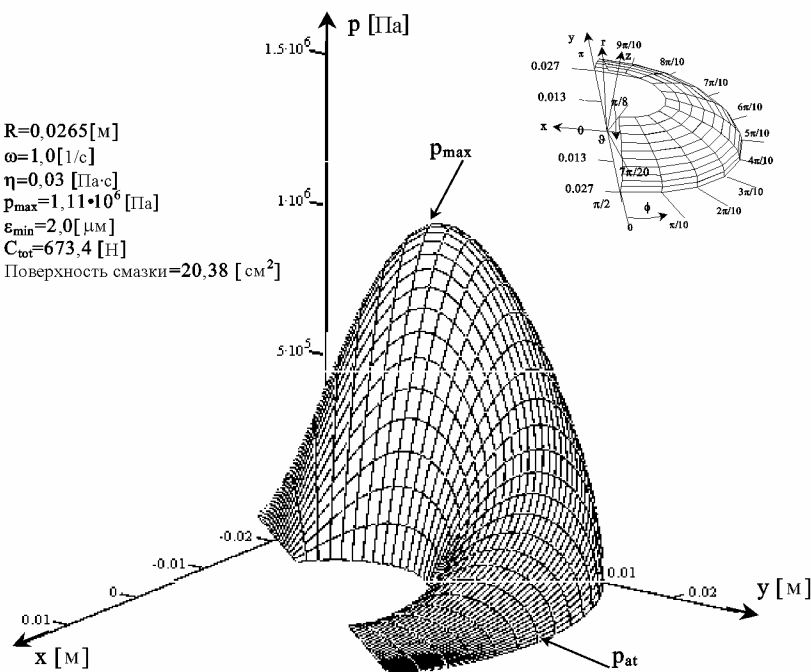


Рис. 12. Два случая распределения давления в нормальном сферическом тазобедренном суставе человека при гидродинамической смазке, вызванной вращением

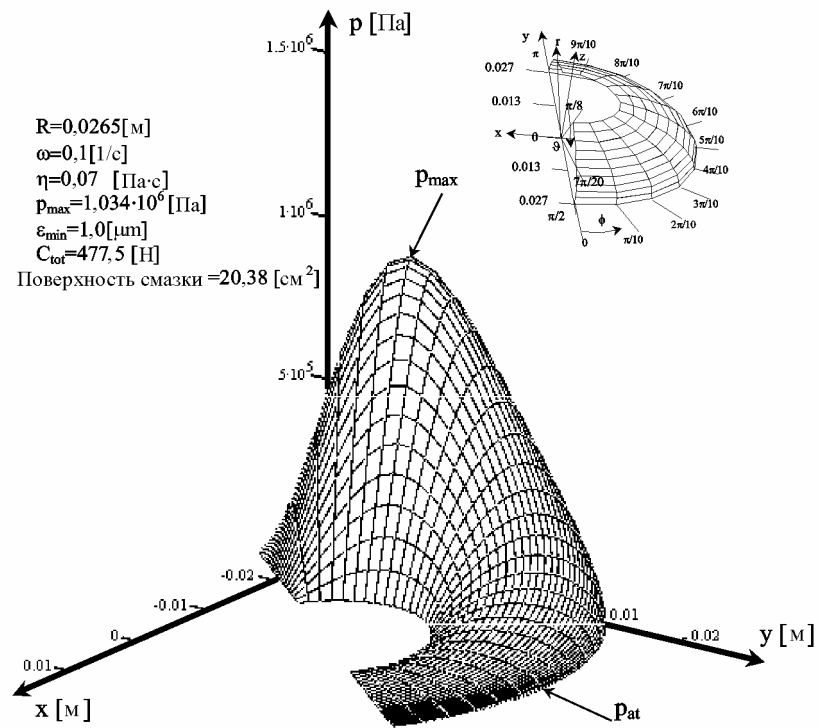
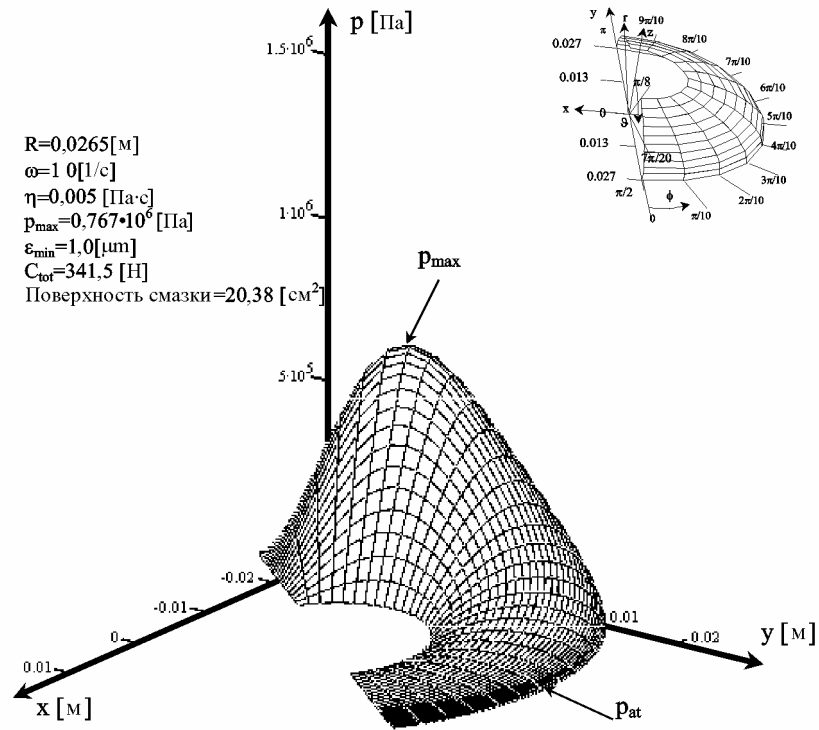


Рис. 13. Два случая распределения давления в патологическом сферическом тазобедренном суставе человека при гидродинамической смазке, вызванной вращением

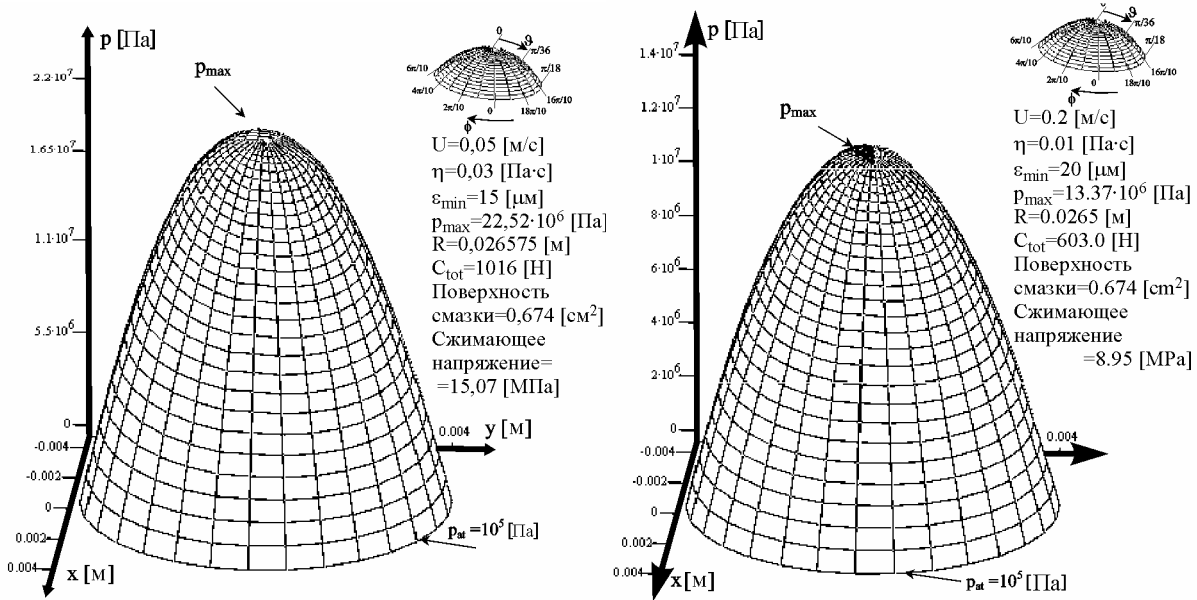


Рис. 14. Два случая распределения давления в нормальном сферическом тазобедренном суставе человека при гидродинамической смазке, вызванной сдавливанием

Для несущих способностей 897 Н, 673 Н, имеющих место в нормальном суставе, мы получаем следующие сжимающие напряжения: $\sigma=897 \text{ Н}/20,4 \text{ см}^2=0,43 \text{ Н}/\text{мм}^2=0,43 \text{ МН}/\text{м}^2$ и $\sigma=673 \text{ Н}/20,4 \text{ см}^2=0,33 \text{ Н}/\text{мм}^2=0,33 \text{ МН}/\text{м}^2$. В патологическом суставе сжимающие напряжения равны: $\sigma=341 \text{ Н}/20,4 \text{ см}^2=0,16 \text{ Н}/\text{мм}^2=0,16 \text{ МН}/\text{м}^2$ и $\sigma=477,5 \text{ Н}/20,4 \text{ см}^2=0,23 \text{ Н}/\text{мм}^2=0,23 \text{ МН}/\text{м}^2$. Эти напряжения меньше, чем прочность при сжатии 21 МН/м² для кости человека [2, 6, 7, 8, 9].

9.3. Гидродинамическая смазка при сдавливании

Если магнитным полем можно пренебречь, то уравнение Рейнольдса (38) для гидродинамической смазки, вызванной выдавливанием между сферическими головками сустава, имеет вид:

$$\frac{1}{R \sin \frac{\vartheta}{R}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\varepsilon^3}{\eta_0} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(R \sin \left(\frac{\vartheta}{R} \right) \frac{\varepsilon^3}{\eta_0} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right) = -12UR \sin \frac{\vartheta}{R}, \quad (88)$$

$$0 < \alpha_1 \equiv \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \alpha_3 \equiv \vartheta \leq R\pi/18, \quad 0 < \alpha_2 \equiv r \leq \varepsilon.$$

В вычислениях взяты следующие параметры для зазора сустава человека: $\Delta\varepsilon_1=-5$ мк, $\Delta\varepsilon_2=-5$ мк, $\Delta\varepsilon_3=+5$ мк, радиус головки кости $R=0,026575$ м и атмосферное давление на границе области $\Omega(\alpha_1, \alpha_3): \{0 < \alpha_1 \equiv \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \alpha_3 \equiv \vartheta \leq R\pi/18\}$, покоящейся на головке кости (рис. 7). Принимая однородную скорость головки кости $U=0,05$ м/с, наименьшую толщину зазора $\varepsilon_{\min}=15$ мк и среднее значение динамической вязкости синовиальной жидкости $\eta_0=0,03$ Пас, мы получаем из уравнения (88), что гидродинамическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $22,52 \times 10^6 \text{ Н}/\text{м}^2$, несущую способность $C_{\text{общ}}=1016$ Н. Беря однородную скорость головки кости $U=0,20$ мс⁻¹, наименьшую толщину зазора $\varepsilon_{\min}=20$ мк и среднее значение динамической вязкости синовиальной жидкости $\eta_0=0,01$ Пас, мы получаем из уравнения (88), что гидродинамическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $13,37 \times 10^6 \text{ Н}/\text{м}^2$.

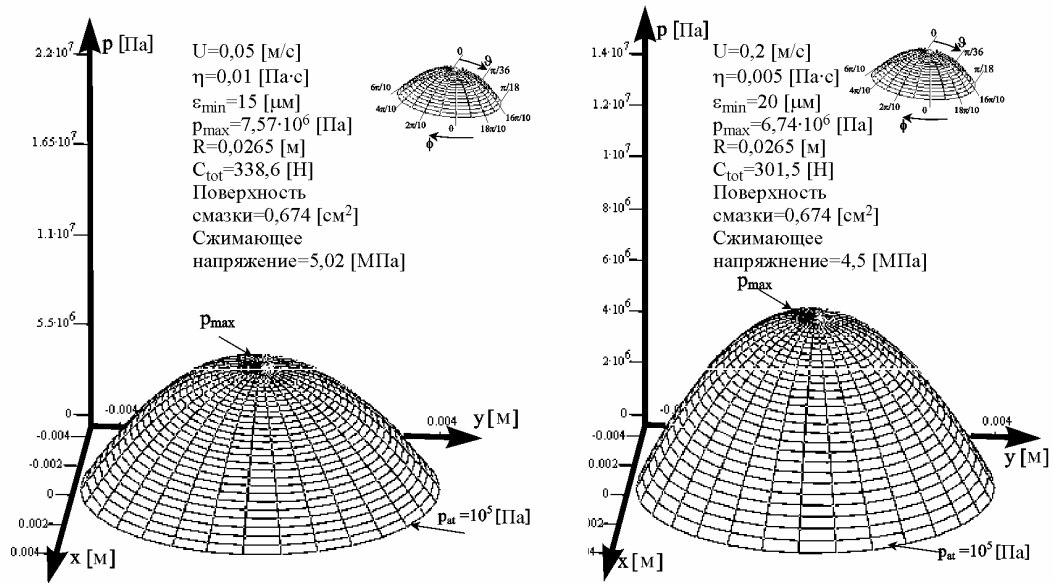


Рис. 15. Два случая распределения давления в патологическом сферическом тазобедренном суставе человека при гидродинамической смазке, вызванной сдавливанием

Площадь поверхности смазки имеет значение $2\pi R^2[1-\cos(\pi/18)] \approx 0,67$ см² и несущую способность $C_{\text{общ}}=603$ Н (рис. 14).

Для патологического тазобедренного сустава мы принимаем в вычислениях однородную скорость головки кости $U=0,05$ мс⁻¹, наименьшую толщину зазора $\varepsilon_{\min}=15$ мк и среднее значение динамической вязкости синовиальной жидкости $\eta_0=0,01$ Пас. Тогда мы получаем из уравнения (88), что гидродинамическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $7,57 \times 10^6$ Н/м², и несущую способность $C_{\text{общ}}=338,6$ Н. Принимая однородную скорость головки кости $U=0,20$ с⁻¹, наименьшую толщину зазора $\varepsilon_{\min}=20$ мк и среднее значение динамической вязкости синовиальной жидкости $\eta_0=0,005$ Рас, мы получим из уравнения (88), что динамическое давление $p^{(0)}$ имеет максимальное значение, равное $6,74 \times 10^6$ Н/м². Площадь контактной поверхности имеет значение $\approx 0,674$ см² и несущая способность $C_{\text{общ}}=301,5$ Н (рис. 15).

Для несущих способностей 1016 Н и 603 Н, имеющих место в нормальном суставе, мы получаем следующие сжимающие напряжения: $\sigma=1016$ Н/0,674 см²=15,07 Н/мм²=15,07 МН/м² и $\sigma=603$ Н/0,674 см²=8,95 Н/мм²=8,95 МН/м². В патологическом суставе сжимающие напряжения имеют следующие значения: $\sigma=338,6$ Н/0,674 см²=5,02 Н/мм²=5,02 МПа и $\sigma=301,5$ Н/0,674 см²=4,5 Н/мм²=4,5 МПа. Эти напряжения меньше, чем предельные напряжения при сжатии, равные 21 МН/м² у здорового человека в возрасте 20-30 лет. Предельные напряжения при сжатии у 70 -летнего человека имеют значения около 12 МН/м². Большие напряжения приведут к разрушению сустава [2, 7-9].

Представленный метод позволяет получить решение в форме ряда Тейлора по степеням малого параметра A . Этот параметр был получен экспериментально для синовиальной жидкости. В частном случае для симметричного течения можно найти с помощью представленной теории аналитические решения в простой форме. Процентные поправки скорости $v_i^{(1)}$ и давления $p^{(1)}$, вызванные неньютоновскими свойствами синовиальной жидкости, оцениваются численно по следующему отношению:

$$\frac{\Delta p^{(1)} + O(A^2)}{p^{(0)}} \cdot 100\% . \quad (89)$$

Для больших скоростей сдвига: $100 \text{ с}^{-1} \leq \Theta \leq 1000 \text{ с}^{-1}$ вязкость синовиальной жидкости мала и имеет значения $10^{-2} \text{ Пас} \leq \eta \leq 10^{-1} \text{ Пас}$ (рис. 4а). В этом случае из уравнения (89) мы получаем малые изменения давления от 2% до 4%. Для малых скоростей сдвига: $10^{-1} \text{ с}^{-1} \leq \Theta \leq 10 \text{ с}^{-1}$ вязкость велика $10 \text{ Пас} \leq \eta \leq 100 \text{ Пас}$. В этом случае из уравнения (89) мы получаем изменения давления от 7% до 15%. Нестационарное индукционное магнитное поле 0,1 мТ с частотой около 60 Гц изменяет давление на 1–4%.

Благодарность

Автор благодарен за финансовую поддержку (грант KBN 8–Т 11Е–021–17, Польша).

Список литературы

1. *Astarita G., Marrucci G.* Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics. London, New York: McGraw-Hil Co, 1974.
2. *Dowson D.* Bio-Tribology of Natural and Replacement Synovial Joints // Van Mow C., Ratcliffe A., Woo S.L.-Y. New York, Berlin, Londyn, Paris, Tokyo, Hong Kong: Springer-Verlag. Vol. 2. Chap. 29. 1990. P. 305-345.
3. *Fung Y.C.* Biomechanics, Motion, Flow, Stress and Growth. New York, Hong Kong: Springer Verlag, 1990.
4. *Fung Y.C.* Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissue. New York: Springer Verlag, 1993.
5. *Lai W.M., Kuei S.C., and Mow V.C.* Computation of Stress Relaxation Function and Apparent Viscosity from Dynamic Data of Synovial Fluids // Biorheology. 1977. Vol. 14. P. 1-45.
6. *Lukaszewicz G.* Micropolar Fluids Theory and Applications. Berlin: Birkhauser, 1999.
7. *Maurel W., Wu Y., Thalmann D.* Biomechanical Models for Soft Tissue Simulation. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1998.
8. *Mow V.C., Atesian G.A.* Basic Orthopedic Biomechanics / Edited by Van C. Mow and C. Wilson. Philadelphia: Hayes Lippincott, Raven Publishers, 1997.
9. *Mow V.C., Holmes M.H., Lai W.M.* Fluid transport and mechanical properties of articular cartilage // Journal of Biomechanics. 1984. Vol. 17. P.337-394.
10. *Mow V.C., Ratcliffe A., Woo S.* Biomechanics of Diarthrodial Joints. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1990.
11. *Mow V.C., Soslowsky L.J.* Friction, lubrication and wear of diarthrodial joints // V.C. Mow, W.C. Hayes, eds. New York: Basic Orthopedic Biomechanics, Raven Press, P. 254-291, 1991.
12. *Mow V.C., Guilak F.* Cell Mechanics and Cellular Engineering. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1990.
13. *Nowacki W.* Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych. Warszawa: PWN, 1983 (in Polish).
14. *Prosnak W.* Mechanika płynów. Warszawa: PWN, 1970 (in Polish).
15. *Ryniewicz A.* The Analysis of Lubrication Mechanism of a Human Hip Joint. Dissertation Monographies, Academy of Mining and Metallurgy. Cracow: University Press, 2002.
16. *Sieron A.* Zastosowania pól magnetycznych w medycynie. Bielsko Biała: Alfa Medica Press, 2000 (in Polish).
17. *Silver F.H.* Biological Materials: Structure, Mechanical Properties and Modelling of Soft Tissue. New York: University Press, 1987.
18. *Walicka A.* Inertia effects in the flow of a micropolar fluid in a slot between rotating surfaces of revolution // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2001. Vol. 6. Nr. 3. P. 731-768.
19. *Wierzcholski K., Pytko S.* Analytical calculations for experimental dependences between shear rate and synovial fluid viscosity. Proc.of Internat. Tribology Conference. Yokohama. 1995. Vol. 3. P. 1975-1980.
20. *Wierzcholski K., Nowowiejski R., Pytko S.* Investigations of dynamic viscosity of synovial fluid. Badania lepkości dynamicznej mazi stawowej. Mechanics in Medicine. Proceedings of Scientific Seminar, Rzeszow. 1994. Vol. 2. P. 73-80 (in Polish).

21. *Wierzcholski K., Nowowiejski R.* The reckoning of friction force and friction coefficient for a hip joint biobearing. Wyznaczanie sil tarcia i wspolczynnika tarcia w biolozysku stawu biodrowego. Mechanics in Medicine. Proceedings of Scientific Seminar, Rzeszow. 1996. Vol. 3. P. 197-205 (in Polish).
22. *Wierzcholski K., Nowowiejski R., Mischczak A.* Numerical analysis of synovial fluid flow in biobearing gap. System Modelling Control 8, Zakopane. 1995. Vol. 2, P. 382-387.
23. *Wierzcholski K.* The method of solutions for hydrodynamic lubrication by synovial fluid flow in human joint gap // Control and Cybernetics. 2002. Vol. 31. No. 1. P. 91-116.
24. *Wierzcholski K., Czajkowski A.* Analysis of the friction force for synovia symmetrical flow in the human joint with the changeable gap // Tribologia. 1998. Vol. 162. No. 6. P. 1022-1034.
25. *Wierzcholski K., Czajkowski A.* Squeezing out of synovia in biobearing gap // Tribologia. 1998. Vol. 160. No. 4. P. 509-516.
26. *Wierzcholski K.* Friction forces for unsymmetrical flow of synovial fluid in human joint gap with magnetic field // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2001. Vol. 3. Suppl.1. P. 269-278.
27. *Wierzcholski K.* Synovial fluid squeeze film flow in curvilinear biobearing human gap // Computers in Medicine. Polish Society of Medical Informatics. 1999. Vol. II. P. 151-156.
28. *Wierzcholski K.* A tribology of curvilinear surfaces in human joints // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 1999. Vol. 1. Nr. 2. P. 3-11.
29. *Wierzcholski K.* Taylor series approximation of fluid squeeze flow solutions // Computers in Medicine. 1999. Vol. II. Polish Society of Medical Informatics. P. 157-163.
30. *Wierzcholski K.* Friction forces in human hip joint gap under treatment of magnetic field. Siła tarcia w szczelinie stawu człowieka leczonego polem magnetycznym // Tribologia, 2001. Vol. 4. P. 875-884.
31. *Wierzcholski K.* Human joint lubrication in magnetic field. Smarowanie stawów człowieka z udziałem pola magnetycznego. IX Kongres Eksploatacji Urządzeń Technicznych, Krynica, Conference Proceedings, P. 215-221, 2001 (in Polish).
32. *Wierzcholski K.* Tribologie fur menschliche Gelenke im geanderten magnetischen Feld. XI Internationale Tagung: Forschung, Praxis, Didaktik im modernen Maschinenbau, Stralsund, Conference Proceedings, P. 9-18, 2001.
33. *Wierzcholski K.* Analytical values of friction forces in human joint in magnetic field for synovial fluid flow with variable viscosity // Annales Academiae Medicae Silesiensis. Katowice, Supl. 32, P. 176-183, 2001.
34. *Wierzcholski K.* Friction forces in human joint for unsymmetrical synovial fluid flow with variable viscosity, magnetic field in curvilinear co-ordinates // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2001. Vol. 3. Suppl. 2. P. 619-626.

K. Wierzcholski (Gdynia, Poland)

PRESSURE DISTRIBUTION IN HUMAN JOINT GAP FOR ELASTIC CARTILAGE AND TIME DEPENDENT MAGNETIC FIELD

Abstract. Analysis of pressure distributions for the synovial fluid with microstructure and non-Newtonian Dowson model for unsymmetrical flow in the deformed hip joint gap is presented in this paper. Following assumptions are taken into account: stationary, isothermal and incompressible synovial unsymmetrical fluid flow in time dependent magnetic field, rotational motion of the bone head, squeeze of the synovial fluid in the human joint gap, changeable synovial non-Newtonian fluid viscosity, changeable and deformed gap height in human joint, and constant synovial fluid density. The simplified basic equations of fluid mechanics and theory of elasticity for pressure, synovial fluid velocity distribution and cartilage deformations are analysed in present paper. New elements of this paper are numerical and analytical formulae for pressure distributions taking into account conjugation fields of the stresses and deformations occurring in the elastic cartilage and in the synovial fluid obtained by virtue of theory of elasticity and fluid mechanics. Obtained in present paper analytical solutions for values of pressure distributions allow easy to make numerical calculations, which may be useful for medical diagnosis.

Key words: hip joint, non-Newtonian synovial fluid, unsteady magnetic field, deformed cartilage.

Получено 20 декабря 2002 года