

УДК 531/534: [57+61]

## **АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОРНЕ РАСТЕНИЯ**

**Е.Н. Юдина**

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Россия, 117899, Москва, Мичуринский пр., 1, e-mail: enyudina@gmail.com

**Аннотация.** На основе континуальной математической модели проведено асимптотическое исследование одномерной стационарной задачи о радиальном транспорте воды и растворенного в ней химического компонента в корне. Модель основана на представлении растительной ткани в виде твердого каркаса, заполненного двухфазной жидкостью (внеклеточной и внутриклеточной). Обе фазы содержат растворенное вещество. Рассматривается случай отсутствия барьера для перемещения внеклеточной жидкой фазы. Продемонстрирована высокая степень совпадения численного и асимптотического решений, что подтверждает пригодность используемого численного метода для рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** асимптотические методы, математические модели, транспортные процессы, многофазные среды.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Модель транспорта воды и растворенных в ней веществ через неспециализированную растительную ткань необходима для обоснованного анализа различных гипотез об организации транспорта в корне и листе. Такой транспорт включает в себя непосредственный транспорт из клетки в клетку через соединительные каналы в клеточной стенке (симпластный транспорт) и движение воды по внеклеточному пространству (апопластный транспорт).

Большинство авторов используют при решении частных задач упрощенные компартментальные модели, не имеющие отчетливого физического смысла и плохо поддающиеся обобщениям [5]. В [6] развит континуальный подход применительно к радиальному транспорту в корне. Проведено численное исследование этой континуальной модели, в результате которого было замечено, что модель содержит несколько малых параметров, в результате чего в решении появляются пограничные слои. В связи с этим в предлагаемой работе проведен асимптотический анализ модели, который позволил оценить отличие численного решения от асимптотического и провести контроль численного метода.

### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Аналогично работам [1, 3, 4, 7] будем рассматривать растительную ткань как пористую сплошную среду. Пористая среда состоит из двух жидких фаз, первая из которых находится во внутриклеточном пространстве, вторая – во внеклеточном, фильтрующихся через недеформируемый твердый каркас. Пусть внутриклеточная жидкость перемещается со скоростью  $U$ , а внеклеточная со скоростью  $V$ .

Давление внутриклеточной жидкости обозначим  $P_1$ , внеклеточной жидкости –  $P_2$ . Долю внутриклеточной жидкости в среде будем характеризовать объемной концентрацией  $\alpha_1$ , а внеклеточной жидкости – объемной концентрацией  $\alpha_2$ , которые будем полагать постоянными. Для размазанных плотностей внутриклеточной и внеклеточной жидких фаз получаем выражения:  $\rho_1 = \rho_1^* \alpha_1$ ,  $\rho_2 = \rho_2^* \alpha_2$ , где через  $\rho_1^*$ ,  $\rho_2^*$  обозначены истинные плотности этих фаз, которые считаем постоянными и равными одна другой. Предполагается, что в каждой фазе растворен обобщенный низкомолекулярный компонент с массовыми концентрациями  $C_1$  и  $C_2$  соответственно, способный перемещаться в среде как активными механизмами переноса через мембраны, так и путем конвекции и диффузии. Во внутриклеточной среде присутствие этого компонента ведет к возникновению осмотической силы, связанной с перемещением жидкости через распределенные клеточные мембраны.

Как показано в работе [7], важное значение играет наличие локализованного барьера (поясков Каспари) для перемещения жидкости и солей во внеклеточном пространстве. Наличие этого барьера приводит к появлению дополнительных пограничных слоев, и задача существенно усложняется. Поскольку нашей целью является проверка правильности численного метода, то будем решать задачу в отсутствие барьера. При написании уравнений и граничных условий следуем работе [7].

Рассмотрим одномерное течение на отрезке  $[0, l_x]$ , т.е. пористая среда занимает область  $0 \leq x \leq l_x$ , где  $x = 0$  – координата раздела среды с окружающей средой и  $x = l_x$  – координата раздела среды с центральной областью, содержащей сосуда ксилемы.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho \frac{dU}{dx} &= L_p ((P_2 - P_1) - \sigma_0 \tilde{R} (C_2 - C_1)), \\ \alpha_2 \rho \frac{dV}{dx} &= -L_p ((P_2 - P_1) - \sigma_0 \tilde{R} (C_2 - C_1)), \\ \alpha_1 \frac{dP_1}{dx} &= -kU + \gamma \frac{dC_1}{dx}, \\ \alpha_2 \frac{dP_2}{dx} &= -mV, \\ \alpha_1 \rho \frac{d(\xi C_1 U)}{dx} &= \lambda (C_2 - C_1) + J_A + D_1 \alpha_1 \rho \frac{d^2 C_1}{dx^2}, \\ \alpha_2 \rho \frac{d(C_2 V)}{dx} &= -\lambda (C_2 - C_1) - J_A + D_2 \alpha_2 \rho \frac{d^2 C_2}{dx^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{R} = \rho RT / \mu_s$  ( $\rho$  – плотность жидкости;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – абсолютная температура;  $\mu_s$  – молярная масса растворенного вещества);  $\sigma_0$  – коэффициент отражения мембраны;  $L_p$  – объемный коэффициент гидравлической проницаемости мембраны;  $\lambda$  – коэффициент проницаемости мембраны для растворенных веществ;  $J_A$  – активный поток компонента;  $D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты диффузии растворенного вещества во внутриклеточной и внеклеточной средах;  $k/\alpha_1$  и  $m/\alpha_2$  – коэффициенты гидравлических сопротивлений (обратные к коэффициентам гидравлических проводимостей);  $\xi$  и  $\gamma/\alpha_1$  – коэффициенты, характеризующие взаимодействие клеточной стенки с растворенным веществом.

Рассмотрим следующие граничные условия [7]. Будем считать, что концентрация внешнего раствора на входе ( $x = 0$ ), а также давления во внешней среде на входе и на выходе ( $x = l_x$ ) заданы. Полагая, что внеклеточная жидкость имеет непосредственный контакт с внешней средой и сосудами ксилемы, а поступление жидкости и растворенных веществ во внутриклеточную среду осуществляется путем массообмена только с внеклеточной жидкостью, ставим следующие условия на внешней и внутренней границах:

$$P_2(0) = P_{20}, \quad U(0) = 0, \quad \left. \frac{dC_1}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad C_2(0) = C_{20},$$

$$P_2(l_x) = P_{2x}, \quad U(l_x) = 0, \quad \left. \frac{dC_1}{dx} \right|_{x=l_x} = 0, \quad \left. \frac{dC_2}{dx} \right|_{x=l_x} = 0.$$

Последнее условие означает чисто конвективный унос растворенного вещества в сосуды ксилемы.

Перейдем к безразмерным переменным. В качестве характерных значений концентрации, давления, скорости и координаты выберем следующие величины:

$$c_* = C_{2e} + \frac{J_A}{\lambda}, \quad p_* = c_* \tilde{R}, \quad v_* = \frac{\gamma(c_* - C_{2e})}{kl_x}, \quad l_* = l_x.$$

Введем безразмерные величины:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 \rho v_*}{L_p l_* c_* \tilde{R}}, \quad A_2 = \frac{\alpha_2 \rho v_*}{L_p l_* c_* \tilde{R}}, \quad \lambda_1 = \lambda \frac{l_*}{\rho \alpha_1 v_*}, \quad \lambda_2 = \lambda \frac{l_*}{\rho \alpha_2 v_*},$$

$$J_1 = J_A \frac{l_*}{\rho \alpha_1 v_* c_*}, \quad J_2 = J_A \frac{l_*}{\rho \alpha_2 v_* c_*}, \quad \tilde{D}_1 = \frac{D_1}{v_* l_*}, \quad \tilde{D}_2 = \frac{D_2}{v_* l_*},$$

$$\tilde{k} = \frac{k v_* l_*}{\alpha_1 p_*}, \quad \tilde{m} = \frac{m v_* l_*}{\alpha_2 p_*}, \quad \zeta = \frac{\gamma}{\alpha_1 c_* \tilde{R}}.$$

В безразмерном виде система уравнений и граничных условий примет следующий вид:

$$A_1 \frac{du}{dx} = P_2 - P_1 - \sigma_0(C_2 - C_1),$$

$$A_2 \frac{dv}{dx} = -P_2 + P_1 + \sigma_0(C_2 - C_1),$$

$$\frac{dP_1}{dx} = -ku + \zeta \frac{dC_1}{dx},$$

$$\frac{dP_2}{dx} = -mv,$$

$$\frac{d(\xi C_1 u)}{dx} = \lambda_1(C_2 - C_1) + J_1 + D_1 \frac{d^2 C_1}{dx^2},$$

$$\frac{d(C_2 v)}{dx} = -\lambda_2(C_2 - C_1) - J_2 + D_2 \frac{d^2 C_2}{dx^2},$$

$$x = 0 : P_2 = 0, \quad u = 0, \quad \frac{dC_1}{dx} = 0, \quad C_2 = C_{20},$$

$$x = 1 : P_2 = P_{21}, \quad u = 0, \quad \frac{dC_1}{dx} = 0, \quad \frac{dC_2}{dx} = 0.$$

Аналогичная система была решена численно в работе [7]. Для этого была построена консервативно-неявная схема, которая решалась методом итераций. На каждой итерации использовался метод прогонки. Кроме того, в работе [7] были сделаны оценки, которые позволяют принять следующие выражения для коэффициентов:

$$A_1 = \varepsilon^4, \quad A_2 = \varepsilon^4, \quad \frac{D_1}{J_1} = \varepsilon^3, \quad \frac{1}{D_2} = \varepsilon^4, \quad \xi = \varepsilon^3, \quad \sigma_0 = 1,$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр.

Получаем систему уравнений, для которой будем искать асимптотическое решение

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 u' &= P_2 - P_1 - (C_2 - C_1), \\ \varepsilon^4 v' &= -P_2 + P_1 + (C_2 - C_1), \\ P_1' &= -ku + \zeta C_1', \\ v &= -\frac{1}{m} P_2', \\ \varepsilon^3 (C_1 u)' &= \lambda_1 (C_2 - C_1) + J_1 + \varepsilon^3 C_1'', \\ \varepsilon^4 (C_2 v)' &= -\lambda_2 (C_2 - C_1) - J_2 + C_2'' \end{aligned} \tag{1}$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \quad P_2(0) = 0, \quad C_2(0) = C_{20}, \quad C_1'(0) = 0, \\ u(1) &= 0, \quad P_2(1) = P_{21}, \quad C_2'(1) = 0, \quad C_1'(1) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку коэффициент  $\zeta$  близок к 1, то множитель  $1 - \zeta \sim O(\varepsilon)$ .

### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Приведем систему уравнений (1) к системе двух уравнений, исключая из нее переменные  $P_1, u, v, C_2$ . Получим следующие уравнения для внеклеточного давления  $P_2$  и внутриклеточной концентрации  $C_1$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon^3}{m} (C_1 P_2')' - \varepsilon^3 M_1 C_1' = \\ &= \lambda_1 \left( -\frac{\varepsilon^4}{m} P_2'' + \left(1 + \frac{k}{m}\right) P_2 - \zeta C_1 - kM_1 x + M_2 \right) + J_1 + \varepsilon^3 C_1'', \\ &-\frac{\varepsilon^4}{m} \left( P_2' \left( -\frac{\varepsilon^4}{m} P_2'' + \left(1 + \frac{k}{m}\right) P_2 + (1 - \zeta) C_1 - kM_1 x + M_2 \right) \right)' = \\ &= -\lambda_2 \left( -\frac{\varepsilon^4}{m} P_2'' + \left(1 + \frac{k}{m}\right) P_2 - \zeta C_1 - kM_1 x + M_2 \right) - J_2 + \\ &+ \left( -\frac{\varepsilon^4}{m} P_2^{(IV)} + \left(1 + \frac{k}{m}\right) P_2'' + (1 - \zeta) C_1'' \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Ввиду того что при получении системы дважды выполнялось интегрирование, уравнения включают две произвольных константы  $M_1$  и  $M_2$ . Система уравнений (3) представляет замкнутую систему относительно переменных  $C_1$  и  $P_2$ . Остальные неизвестные могут быть легко получены из исходной системы (1) при известных  $C_1$  и  $P_2$ .

Граничные условия (2) в переменных  $C_1$  и  $P_2$  имеют следующий вид:

$$P_2'(0) = mM_1(\varepsilon), P_2(0) = 0, P_2''(0) = \frac{m}{\varepsilon^4}(-C_{20} + M_2(\varepsilon) + (1 - \zeta)C_1(0)), C_1'(0) = 0, \quad (4)$$

$$P_2'(1) = mM_1(\varepsilon), P_2(1) = P_{21}, \varepsilon^4 P_2'''(1) - m^2 M_1(\varepsilon) = 0, C_1'(1) = 0.$$

В связи с наличием в задаче малых параметров будем рассматривать асимптотическое поведение решения.

Внешнее решение будем искать в следующем виде:

$$P_2(x) = P_2^0(x) + \varepsilon^2 P_2^1(x), \quad (5)$$

$$C_1(x) = C_1^0(x).$$

При написании соотношений (5) принято допущение о структуре решения вблизи точек  $x = 0$  и  $x = 1$ , правомерность которого будет обоснована ниже.

Подставим решение (5) в систему (3). Воспользуемся тем фактом, что в исследуемой задаче в силу обезразмеривания выполнено соотношение  $\lambda_1 J_2 = \lambda_2 J_1$ , что значительно упрощает выкладки. Окончательно получаем:

$$P_2 = \frac{m}{k + m} \left( (\zeta E_{01} + k M_1) x + \zeta E_{02} - M_2 - \frac{J_1}{\lambda_1} \right) + \varepsilon^2 (E_{11} x + E_{12}), \quad (6)$$

$$C_1 = E_{01} x + E_{02},$$

где  $E_{01}, E_{02}, E_{11}, E_{12}$  – подлежащие определению константы.

Теперь построим решение вблизи границ  $x = 0$  и  $x = 1$ . Проведём анализ граничных условий, чтобы определить, как ведут себя производные.

Рассмотрим сначала граничные условия при  $x = 1$ . Имеем

$$P_2'(1) = mM_1(\varepsilon) = O(1), \quad P_2'''(1) = \frac{m^2 M_1}{\varepsilon^4}. \quad (7)$$

Найдем толщину пограничного слоя вблизи  $x = 1$ . Исходя из первого соотношения в (7) ищем решение в виде

$$P_2 = P_{21} - \delta \tilde{P}_2 \left( \frac{1-x}{\delta} \right), \text{ где } \delta = \delta(\varepsilon) \ll 1.$$

Из второго соотношения в условии (7) получаем, что  $\delta = \varepsilon^2$ .

Как видно из оценки, во втором уравнении системы (3) не остаётся членов, содержащих  $C_1$ , что позволяет найти  $P_2$  из этого уравнения, а затем, используя это решение, найти  $C_1$  из первого уравнения системы (3).

Сделаем замену переменных  $\delta = \varepsilon^2$ ,  $\tilde{x} = \frac{1-x}{\varepsilon^2}$  и  $\tilde{P}_2(\tilde{x}) = \frac{P_{21} - P_2(x)}{\varepsilon^2}$ . Из второго уравнения системы (3) получаем:

$$\frac{1}{m} \tilde{P}_2^{(IV)} - \left( 1 + \frac{k}{m} \right) \tilde{P}_2'' = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\widetilde{P}_2 = \alpha_0 e^{-\tilde{x}\sqrt{m+k}} + \alpha_1 e^{\tilde{x}\sqrt{m+k}} + \alpha_2 \tilde{x} + \alpha_3,$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – константы, подлежащие определению. Коэффициент  $\alpha_1 = 0$  находим из условия сращивания с внешним решением [2] для  $P_2$  из (6). С учётом граничного условия  $P_2(1) = P_{21}$  имеем следующее решение в пограничном слое вблизи  $x = 1$ :

$$P_2 = P_{21} - \alpha_2(1-x) - \varepsilon^2 \alpha_0 \left( e^{-\sqrt{m+k}(1-x)/\varepsilon^2} - 1 \right). \quad (8)$$

Из граничных условий (7) имеем:

$$M_1 = \frac{1}{m}(\alpha_2 - \alpha_0 \sqrt{m+k}), \quad M_1 = \frac{\alpha_0}{m^2}(m+k)^{3/2}. \quad (9)$$

Аналогично в пограничном слое вблизи  $x = 0$  решение ищем в виде

$$P_2 = \delta \widetilde{P}_2 \left( \frac{x}{\delta} \right),$$

где  $\delta = \varepsilon^2$ .

С учетом граничного условия  $P_2(0) = 0$  получаем

$$P_2 = \beta_2 x + \varepsilon^2 \beta_0 \left( e^{-\sqrt{m+k} \cdot x / \varepsilon^2} - 1 \right), \quad (10)$$

где  $\beta_0, \beta_2$  – константы, подлежащие определению.

Из остальных граничных условий (7) при  $x = 0$  следует:

$$M_1 = \frac{1}{m}(\beta_2 - \beta_0 \sqrt{m+k}), \quad M_2 = C_{20} + \varepsilon^2 \beta_0 \frac{m+k}{m} - (1-\zeta)C_1(0). \quad (11)$$

Из сращивания (10) с внешним решением для  $P_2$  из (6) на границе  $x = 0$  получаем:

$$\beta_2 = \frac{m}{m+k}(\zeta E_{01} + kM_1),$$

$$0 = \zeta E_{02} - M_2 - \frac{J_1}{\lambda_1},$$

$$-\beta_0 = E_{12}.$$

Из сращивания (8) с внешним решением для  $P_2$  из (6) на границе  $x = 1$  имеем:

$$\alpha_2 = \frac{m}{m+k}(\zeta E_{01} + kM_1),$$

$$P_{21} - \alpha_2 = \frac{m}{m+k} \left( \zeta E_{02} - M_2 - \frac{J_1}{\lambda_1} \right),$$

$$\alpha_0 = E_{11} + E_{12}.$$

Используя полученные выше соотношения, а также соотношения (9) и (11), находим

$$\alpha_0 = -P_{21} \frac{m}{k\sqrt{m+k}}, \quad \alpha_2 = P_{21}, \quad \beta_0 = -P_{21} \frac{m}{k\sqrt{m+k}}, \quad \beta_2 = P_{21},$$

$$E_{01} = 0, \quad E_{02} = \frac{J_1}{\lambda_1 \zeta} + \frac{C_{20}}{\zeta} - \frac{1-\zeta}{\zeta} C_1(0) - \varepsilon^2 \frac{P_{21} \sqrt{m+k}}{\zeta k},$$

$$E_{11} = -2 \frac{P_{21} m}{k\sqrt{k+m}}, \quad E_{12} = \frac{P_{21} m}{k\sqrt{k+m}},$$

$$M_1 = P_{21} \frac{m+k}{mk}, \quad M_2 = C_{20} - (1-\zeta) C_1(0) - \varepsilon^2 \frac{\sqrt{m+k}}{k} P_{21}.$$

Выпишем равномерно пригодное решение [2] для  $P_2$ :

$$P_2(x) = P_{21} x - \varepsilon^2 \frac{P_{21} m}{k\sqrt{m+k}} \left( 2x + e^{-\sqrt{m+k} \cdot x / \varepsilon^2} - e^{\sqrt{m+k} (x-1) / \varepsilon^2} - 1 \right). \quad (12)$$

Теперь, используя решение (12) для  $P_2$ , найдём решение для  $C_1$ . Для этого подставим полученное решение в первое уравнение системы (3):

$$\begin{aligned} & \frac{P_{21}}{k} \varepsilon^3 \left[ e^{-\sqrt{m+k} \cdot x / \varepsilon^2} + e^{-\sqrt{m+k} (1-x) / \varepsilon^2} - \varepsilon^2 \frac{2}{\sqrt{m+k}} - 1 \right] C_1' + \\ & + \varepsilon P_{21} \frac{\sqrt{m+k}}{k} \left( -e^{-\sqrt{m+k} \cdot x / \varepsilon^2} + e^{-\sqrt{m+k} (1-x) / \varepsilon^2} \right) C_1 = \\ & = \varepsilon^3 C_1'' - \lambda_1 \zeta C_1 - \varepsilon^2 \lambda_1 P_{21} \frac{\sqrt{m+k}}{k} 2x + \lambda_1 C_{20} + J_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим следующее решение уравнения (13):

$$C_1 = \frac{C_{20}}{\zeta} + \frac{J_1}{\lambda_1 \zeta} + o(1). \quad (14)$$

Следующее приближение не ищем, так как решение (14) удовлетворяет граничным условиям для  $C_1$ . Таким образом допущение (5) о структуре внешнего решения оправдано.

Отсюда найдем  $M_2$ :

$$M_2 = C_{20} - \frac{1-\zeta}{\zeta} \left( C_{20} + \frac{J_1}{\lambda_1} \right) - \varepsilon^2 P_{21} \frac{\sqrt{m+k}}{k}.$$

Получаем решение для  $u$ ,  $v$ ,  $P_1$ ,  $C_2$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{P_{21}}{m} + \frac{P_{21}}{k} \left( e^{-\sqrt{m+k} \cdot x / \varepsilon^2} + e^{\sqrt{m+k} (x-1) / \varepsilon^2} \right) - \frac{P_{21} (m+k)}{mk} - 2\varepsilon^2 \frac{P_{21}}{k\sqrt{m+k}}, \\ v &= -\frac{P_{21}}{m} - \frac{P_{21}}{k} \left( e^{-\sqrt{m+k} \cdot x / \varepsilon^2} + e^{\sqrt{m+k} (x-1) / \varepsilon^2} \right) + 2\varepsilon^2 \frac{P_{21}}{k\sqrt{m+k}}, \\ P_1 &= P_{21} x - C_{20} \left( 1 - \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{J_1}{\lambda_1 \zeta} + \varepsilon^2 \frac{P_{21}}{\sqrt{m+k}} \left( e^{-\sqrt{m+k} \cdot x / \varepsilon^2} - e^{\sqrt{m+k} (x-1) / \varepsilon^2} + 2x + \frac{m}{k} \right), \\ C_2 &= C_{20} - 2\varepsilon^2 \frac{P_{21} \sqrt{m+k}}{k} x. \end{aligned} \quad (15)$$

Анализ асимптотического решения (12), (14), (15) показывает, что структура функций в пограничных слоях определяется безразмерными коэффициентами гидравлических сопротивлений  $m$  и  $k$ . Все параметры модели входят в асимптотическое решение: таким образом, модель не переопределена.

### СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЙ

Результаты сравнения представлены для следующих значений параметров, соответствующих оценкам, данным в статье [7]:

$$\lambda_1 = 2; \quad \lambda_2 = 0,052; \quad J_1 = 1; \quad J_2 = 0,026; \quad k = 0,44; \quad m = 1; \quad \zeta = 1; \quad \varepsilon = 0,1.$$

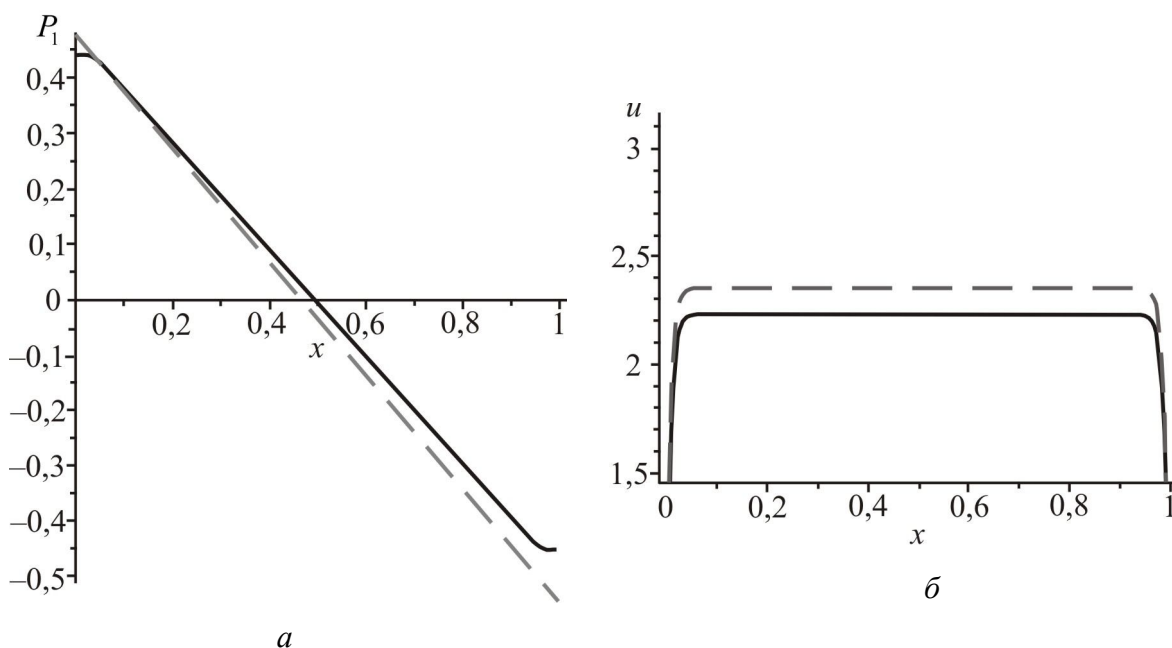


Рис. Сравнение распределений внутриклеточного давления (а) и внутриклеточной скорости (б) (сплошная линия – численное решение, пунктирная – асимптотическое)

На рисунке приведены результаты численного расчета и асимптотического анализа для внутриклеточного давления  $P_1$  и внутриклеточной скорости  $u$ . Из графиков видно, что решения отличаются между собой не более, чем на  $\varepsilon$ . Результаты для внеклеточного давления  $P_2$ , внеклеточной скорости  $v$ , внутриклеточной и внеклеточной концентраций  $C_1$  и  $C_2$  не приводятся, так как численное и асимптотическое решения совпадают с графической точностью.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено асимптотическое решение одномерной стационарной задачи о радиальном транспорте воды и растворенного в ней химического компонента в корне в предположении отсутствия барьера для перемещения внеклеточной жидкой фазы. Продемонстрирована высокая степень совпадения численного и асимптотического решений, что свидетельствует о корректности асимптотического подхода и подтверждает пригодность используемого численного метода для рассматриваемой задачи.



## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00774. Автор выражает благодарность А.В. Аксенову за внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логвенков С.А., Штейн А.А. Компартментальная модель поглощения воды корнями растения с учетом процессов на клеточном уровне // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т. 12, № 4 (42). – С. 18–32.
2. Найфе А.Х. Методы возмущений. – М.: Наука, 1986. – 454 с.
3. Штейн А.А., Юдина Е.Н. Математическая модель растущей растительной ткани как трехфазной деформируемой среды // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 1 (51). – С. 42–51.
4. Юдина Е.Н. Численное и аналитическое исследование радиального массопереноса в корне растения // Труды конференции-конкурса молодых ученых, 14–16 октября 2009 г. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. – С. 350–356.
5. Murphy R. Some compartmental models of the root: steady-state behavior // J. Theor. Biol. – 2000. – Vol. 207. – P. 557–576.
6. Stein A.A., Logvenkov S.A., Chalyuk A.T. Mathematical modeling of the plant root as a water-pumping cellular system // Mathematical Modelling & Computing in Biology and Medicine / ed. V. Capasso. – Bologna: Soc. Ed. Esculapio, 2003. – P. 206–212.
7. Stein A.A., Logvenkov S.A., Yudina E.N. Continual modeling of water uptake by plant roots // 6<sup>th</sup> Plant Biomechanics Conference, November 16–21, 2009. – Cayenne, 2009. – P. 140–147.

## ASYMPTOTIC ANALYSIS OF TRANSPORT PROCESSES IN THE PLANT ROOT

E.N. Yudina (Moscow, Russia)

The one-dimensional stationary problem of the radial transport of water and a chemical component dissolved in it across the root is solved using asymptotical analysis based on a continuum mathematical model. The model represents the plant tissue as a solid framework filled with a two-phase liquid (extracellular and intracellular). Both phases contain a solute. The case of the absence of a barrier impermeable to the extracellular fluid phase (Casparian bands) is considered. Comparison of the numerical and asymptotic solutions demonstrates a high degree of coincidence, which confirms the applicability of the numerical method used to this problem.

**Key words:** asymptotical methods, mathematical models, transport processes, multiphase media.

*Получено 19 апреля 2012*