

УДК 531/534: [57+61]

## БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА СБЛИЖЕНИЯ ФРАГМЕНТОВ ТВЕРДОГО НЕБА ПРИ ОРТОПЕДИЧЕСКОМ ЛЕЧЕНИИ

В.А. Лохов, О.Ю. Долганова, Ю.И. Няшин

Кафедра теоретической механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: valeriy.lokhov@yandex.ru

**Аннотация.** В работе предлагается рассматривать задачу о лечении врожденной расщелины твердого неба как задачу управления ростовыми деформациями и применять для её решения методы механики сплошной среды. Проведен биомеханический анализ напряженно-деформированного состояния фрагмента растущего твердого неба, где ростовые деформации моделируются с помощью модели Хсю (Journal of Biomechanics, 1968). На основе анализа дается количественное объяснение эффекта сближения фрагментов твердого неба при действии зубодесневой пластины и делается вывод о возможности применения теории управления напряжениями и деформациями посредством собственных деформаций к решению задачи о низведении фрагментов твердого неба.

**Ключевые слова:** расщелина твердого неба, управление, ортодонтическое лечение, ростовая деформация.

### ВВЕДЕНИЕ

Врожденная расщелина верхней челюсти («волчья пасть», *uranoschisis, labium leporium*) является наиболее часто встречающимся и серьезным заболеванием зубочелюстной системы. Оно нарушает анатомическое соотношение всех тканевых структур среднего отдела лица, изменяет физиологическое равновесие мышц приротовой полости, поражает жизненно важные функции, такие как сосание, глотание, дыхание, речь, а также производит выраженный косметический эффект. По данным Всемирной организации здравоохранения, в мире частота рождения детей с данной патологией составляет в среднем 0,5–1,5 на 1000 новорожденных. Ввиду ухудшения экологии наблюдается тенденция к увеличению количества детей с этим заболеванием [1].

Важную роль в устранении расщелины играет раннее ортопедическое лечение. Оно нацелено на сближение разобщенных фрагментов твердого неба без хирургического вмешательства. Чем успешнее будет проведено ортопедическое лечение, тем ближе будут низведены фрагменты и тем безопаснее будет проведение операции по их сшиванию. Поэтому использование биомеханического анализа позволит лучше понять процессы, происходящие при лечении, и предложить новые более эффективные ортопедические устройства.

Один из методов ортопедической коррекции разработан в Республиканском научно-практическом центре медико-социальной реабилитации детей и подростков с врожденной челюстно-лицевой патологией «Бонум» (г. Екатеринбург) и применяется с 1989 г.

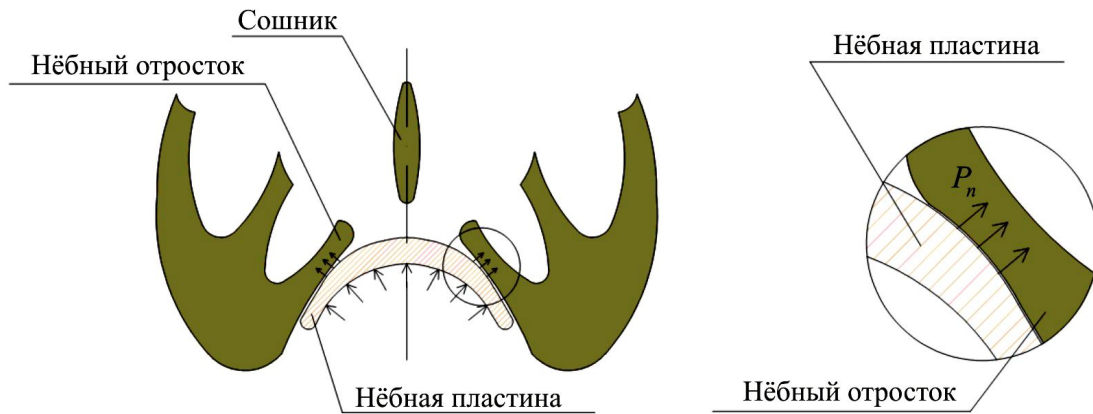


Рис. 1. Схема устройства нёбной пластины

Данный подход к лечению этой категории больных заключается в разработке метода ранней предоперационной реконструктивно-коррекционной терапии, для проведения которой используется индивидуально изготавливаемая ортопедическая аппаратура (ортопедическая пластина), создающая оптимальные условия для процессов роста и развития фрагментированных отделов верхней челюсти [11, 12].

Схема установки аппарата приведена на рис. 1.

Контактное давление  $P_n$ , возникающее между пластиной и фрагментом нёба, создается языком (на рисунке не показан), поскольку при кормлении он рефлекторно прижимается к нёбу. В результате формируется физиологический для данного пациента свод нёба, расщелина уменьшается, что приближает сроки проведения операции уранопластики [11].

С точки зрения механики, эффект сближения недоразвитых фрагментов твердого нёба кажется неясным: действие языка приводит, на первый взгляд, к изгибающему моменту во фрагментах, что, казалось бы, должно вызвать дальнейшее расхождение фрагментов. В данной статье приводится объяснение эффекта сближения, т.е. объяснение механизма управления ростом нёбных фрагментов на основании гипотезы о ростовых деформациях.

### БИОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА

Одной из первых работ, посвященных моделированию роста с позиций биомеханики, была работа [10]. После этого более детально вопросы роста изучены в исследованиях [2–4, 6, 9, 14]. В работах [3, 9] предложена модель растущего тела как трехфазной среды, содержащей твердый матрикс, внутриклеточную жидкость и межклеточную жидкость (интерстиций). Рост происходит за счет массообмена между твердой фазой и внутриклеточной жидкостью. К сожалению, в данное время использование такой модели затруднительно, так как многие параметры, описывающие процессы транспорта и массопередачи, не определены.

Деформации роста, вообще говоря, конечны, особенно если речь идет о процессах роста целых органов (например, рост сердца цыпленка [14]), и необходимо рассматривать деформации скорости для полной, упругой и ростовой деформаций соответственно:

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^e + \tilde{\xi}^g. \quad (1)$$

Однако для моделирования сближения фрагментов твердого нёба достаточно рассмотреть малые деформации, тогда тензор  $\tilde{\xi}^e$  может быть вычислен через закон Гука следующим образом:

$$\tilde{\xi}^e = \frac{d}{dt} \left( \tilde{C}^{-1} \cdot \tilde{\sigma} \right), \quad (2)$$

где  $\tilde{C}^{-1}$  – тензор упругой податливости.

По данным исследований, ростовые процессы существенно зависят от напряжений, действующих в ткани, и одним из простых вариантов модели для деформации скорости роста является модель Хсю [10]:

$$\tilde{\xi}^g = \tilde{A} + \tilde{B} \cdot \tilde{\sigma}, \quad (3)$$

где  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  – тензоры, определяющие рост живой ткани.

Построение тензоров  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  требует глубокого теоретического и экспериментального исследования. Если принять гипотезу об изотропии материала и роста, то в этом случае тензоры должны быть изотропными, и компоненты тензоров не должны зависеть от поворота или отражения координатных осей, что позволит упростить соотношение (3).

Известно [5], что среди тензоров второго ранга существует только один линейно-независимый изотропный тензор

$$A_{ij} = A \delta_{ij}, \quad (4)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Среди тензоров четвертого ранга можно выделить три линейно-независимых изотропных тензора [5]

$$B_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad B_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \pm \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (5)$$

поэтому запишем тензор  $\tilde{B}$  в следующем виде:

$$B_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) + \mu_1 \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \right). \quad (6)$$

Вычислим двойную свертку тензора (6) и тензора напряжений:

$$\left( \tilde{B} \cdot \tilde{\sigma} \right)_{ij} = B_{ijkl} \sigma_{kl} = \lambda \delta_{ij} \sigma_{kk} + \mu \left( \sigma_{ij} + \sigma_{ji} \right) + \mu_1 \left( \sigma_{ij} - \sigma_{ji} \right),$$

$$B_{ijkl} \sigma_{kl} = \lambda \delta_{ij} \sigma_{kk} + 2\mu \sigma_{ij}, \quad (7)$$

предполагая симметрию тензора напряжений и вводя обозначение  $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = I_1(\tilde{\sigma})$  – первый инвариант тензора напряжений.

В результате деформация скорости роста принимает вид

$$\xi_{ij}^g = A \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sigma_{kk} + 2\mu \sigma_{ij}. \quad (8)$$

В работе [11] сделана упрощающая гипотеза (коэффициент  $\lambda$  положен равным нулю) и соотношение (8) записано в виде

$$\tilde{\xi}^g = A \tilde{I} + B \tilde{\sigma}. \quad (9)$$

Эта гипотеза позволила определить константы  $A$  и  $B$  экспериментально.

### К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЕНИИ РОСТОВЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Соотношение (9) показывает, как действующие напряжения могут повлиять на рост: растягивающие напряжения стимулируют рост, а сжимающие – замедляют (при  $B > 0$ ).

Таким образом, задача о лечении врожденной расщелины твердого неба может быть рассмотрена как задача об управлении ростом, т.е. задача о создании в теле заданной ростовой деформации. Подход к решению таких задач разработан в работах [7, 8, 13] и основан на теореме о декомпозиции собственной деформации на составляющую, свободную от напряжений, и составляющую, свободную от деформаций [13]. Кроме этого, разработан алгоритм независимого управления собственными деформациями, т.е. алгоритм управления, при котором ростовая деформация не будет вызывать макроскопических напряжений.

Под собственной деформацией понимается неупругая деформация любой природы, т.е. деформация  $\tilde{\varepsilon}$  является суммой упругой  $\tilde{\varepsilon}^e$  и собственной  $\tilde{\varepsilon}^*$  деформаций:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^*. \quad (10)$$

Предполагается, что собственные деформации  $\tilde{\varepsilon}^*$  можно найти отдельно, используя соответствующие определяющие соотношения. Например, для температурной деформации такое соотношение имеет вид  $\tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\alpha} \Delta T$  ( $\tilde{\alpha}$  – тензор коэффициентов температурного расширения,  $\Delta T$  – изменение температуры, отсчитываемое от состояния, в котором  $\tilde{\sigma} = 0$ ,  $\tilde{\varepsilon} = 0$ ,  $\tilde{u} = 0$ ), для ростовой деформации необходимо использовать соотношение (9).

Применительно к данной задаче разработанный подход позволит найти давление  $P_n$ , действующее на фрагмент твердого неба (рис. 1) и вызывающее рост живой ткани в заданном направлении. Этого можно достичь, решив следующую задачу:

$$\Phi(P_n) = \int_V (\tilde{\varepsilon}^0 - \tilde{\varepsilon}^*(P_n)) \cdot \tilde{C} \cdot (\tilde{\varepsilon}^0 - \tilde{\varepsilon}^*(P_n)) dV \rightarrow \inf(P_n), \quad (11)$$

где  $\tilde{\varepsilon}^0$  – деформация, обеспечивающая заданное сближение фрагментов,  $\tilde{\varepsilon}^*(P_n)$  – ростовая деформация, вызванная давлением  $P_n$ .

Отметим, что после снятия ортопедической пластины в небных фрагментах останутся накопленные ростовые деформации. Важно, чтобы они не создавали остаточных напряжений и, как следствие, не вызывали других нежелательных процессов. Поэтому поиск решения задачи (11) ведется в классе собственных деформаций, свободных от напряжений, что позволит сохранить напряжения в растущих фрагментах.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве примера рассмотрим собственно эффект сближения фрагментов за счет накопления ростовой деформации при действии давления со стороны ортопедической пластины.

Полная дифференциальная постановка задачи растущего упругого тела, занимающего область  $V$  в  $R^3$  с границей  $S$ ,  $\bar{V} = V \cup S$ ,  $S = S_v \cup S_\sigma \cup S_p$  (угловая точка  $(0; 0)$  не входит в границы  $S_v$  и  $S_\sigma$ ), должна включать в себя:

- определяющие соотношения (1–3);
- уравнения равновесия

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} = 0, \quad \forall \vec{r} \in V, t \geq 0, \quad (12)$$

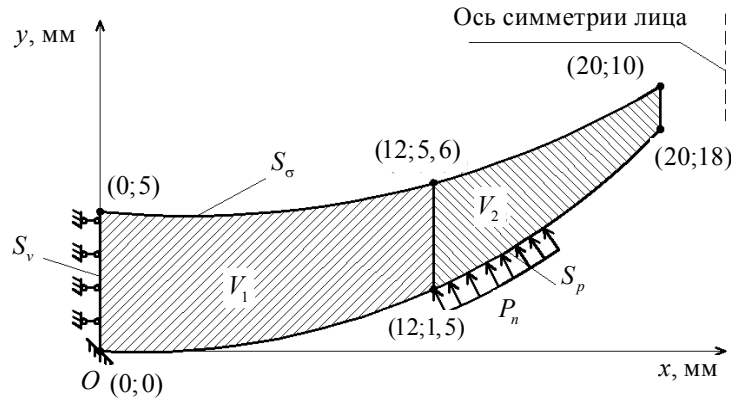


Рис. 2. Плоская модель небного отростка

кинематические соотношения

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\bar{v} + \bar{v}\bar{\nabla}), \quad \forall \bar{r} \in \bar{V}, t \geq 0, \quad (13)$$

граничные условия

$$v_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \forall \bar{r} \in S_v, t \geq 0, \quad (14)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (x = y = 0), t \geq 0, \quad (15)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{\sigma} = 0, \quad \forall \bar{r} \in S_\sigma, \quad \bar{n} \cdot \bar{\sigma} = \bar{P}_n, \quad \forall \bar{r} \in S_p, t \geq 0, \quad (16)$$

начальные условия

$$\bar{u} = 0, \quad t = 0, \forall \bar{r} \in \bar{V}. \quad (17)$$

Однако для объяснения эффекта сближения фрагментов достаточно рассмотреть более простую задачу о вычислении напряжений в момент приложения ортопедической нагрузки  $P_n$  ( $t = 0$ , в этот момент ростовые деформации равны нулю):

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} &= 0, \quad \forall \bar{r} \in V, \\ \bar{\sigma} &= \tilde{\tilde{C}} \cdot \varepsilon, \quad \forall \bar{r} \in \bar{V}, \\ \tilde{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\bar{u} + \bar{u}\bar{\nabla}), \quad \forall \bar{r} \in \bar{V}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{n} \cdot \bar{\sigma} &= 0, \quad \forall \bar{r} \in S_\sigma, \quad \bar{n} \cdot \bar{\sigma} = \bar{P}_n, \quad \forall \bar{r} \in S_p, \\ u_x &= 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \forall \bar{r} \in S_v, \quad \bar{u} = 0 \quad (x = y = 0). \end{aligned}$$

Затем можно вычислить деформации скорости  $\tilde{\xi}^g$  в формуле (9). Этот анализ позволит выявить зоны «ускоренного» и «замедленного» роста и объяснить эффект сближения фрагментов.

Геометрические параметры области находятся в физиологическом диапазоне, их величину можно оценить по координатам точек, которые приведены на рис. 2.

Свойства материала ткани ( $E = 10^4$  МПа,  $\mu = 0,3$ ) фрагмента взяты из работы [11]. Известно, что фрагмент твердого нёба состоит из двух частей: податливой хрящевой ткани (область  $V_2$ ), соединенной с более жесткой костной структурой (область  $V_1$ ) [12].

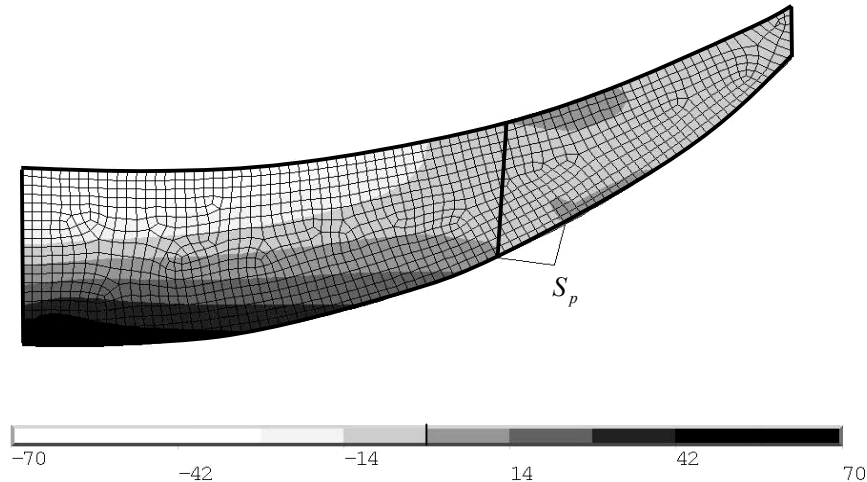


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_x$  (г/мм<sup>2</sup>) в расчетной области

Поэтому в определяющем соотношении для ростовой деформации в области  $V_1$ , которое применяется в виде формулы  $\tilde{\xi}^g = \tilde{A} + \tilde{B} \cdot \tilde{\sigma}$ ,  $\forall \vec{r} \in V_1$ , компонентами тензора  $\tilde{B}$  пренебрегаем. В области  $V_2$ , где напряжения вызывают заметную реакцию ткани, параметры ростовой деформации имеют следующие значения:  $A = 0,0025$  (1/мес),  $B = 0,002$  (мм<sup>2</sup>/(г·мес)) [11].

Наличие ортопедической пластины моделируем граничными условиями (16). Давление, создаваемое ортопедической пластиной, мало и может повлиять лишь на податливую структуру, поэтому в расчете нагрузку  $P_n$  прикладываем только к области  $V_2$ . Величина  $P_n = 10$  г/мм<sup>2</sup> выбрана исходя из условия невозникновения травм слизистой оболочки и костной ткани твердого неба. Длина границы  $S_p$  (длина области контакта) взята из работы [11].

### АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Скорость ростовой деформации, приводящей к сближению отростков, примет вид

$$\xi_{11} = A + B\sigma_{11}. \quad (19)$$

Для объяснения эффекта сближения рассмотрим скорости ростовых деформаций (19), возникающих в области, представленной на рис. 2, от действия ортопедической пластины. В конечно-элементном пакете ANSYS разобьем указанную область плоскими элементами, средняя длина ребра которых равна 0,25 мм. Найдем распределение напряжений  $\sigma_x$  в области  $V_2$  при нагружении ее границы  $S_p$  давлением  $P_n = 10$  г/мм<sup>2</sup>. Распределение напряжений  $\sigma_x$  приведено на рис. 3. Область приложения нагрузки (начало и конец границы  $S_p$ ) также показана на рисунке.

Обозначим вдоль нижней границы области  $V_2$  точки 1, 2...n с шагом 1 мм. Проведем из каждой указанной точки прямую к верхней границе области. На рис. 4 приведены эпюры скоростей ростовых деформаций  $\xi_x^g$  фрагмента вдоль указанных линий для области  $V_2$ .

Для оценки полученных результатов обозначим на фрагменте «зоны роста»: «зону 1», где  $\xi_x^g \leq 0,2A = 0,0005$  (1/мес), и «зону 2», где  $\xi_x^g > A = 0,0025$  (1/мес).

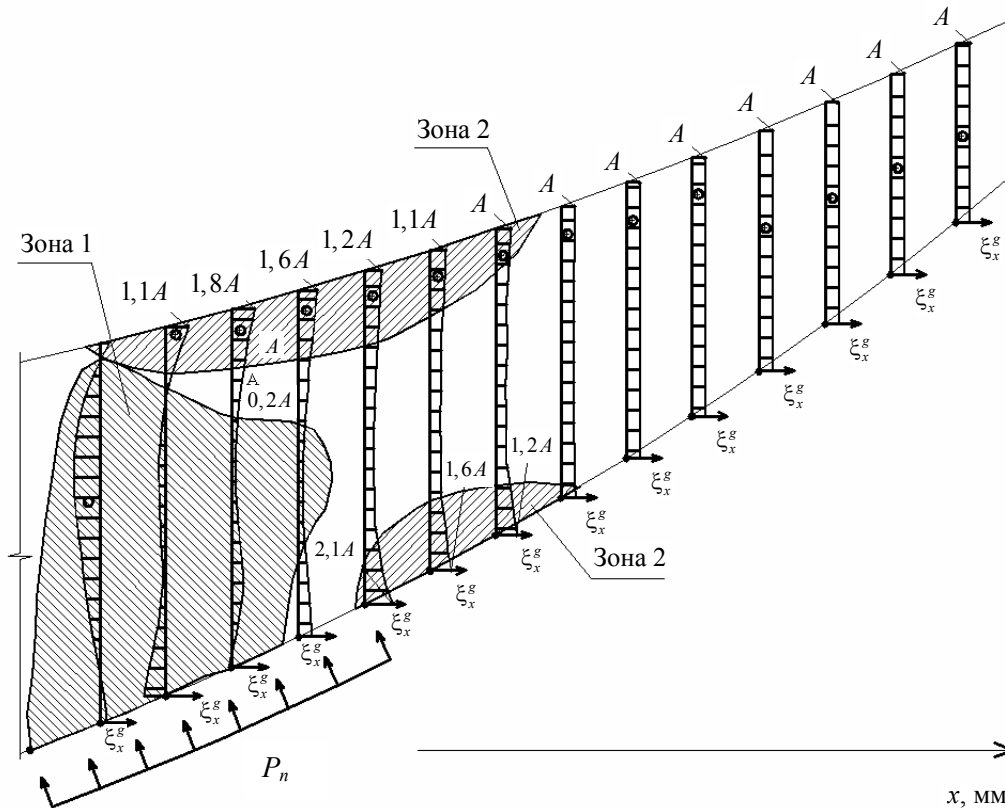


Рис. 4. Эпюры скоростей ростовых деформаций  $\xi_x^g$ , (1/мес) в области  $V_2$

Оценим полученные результаты. В области контакта под действием ортопедической пластины возникают сжимающие напряжения (см. рис. 3), которые подавляют рост «нижних» волокон материала – рост в направлении оси  $Ox$  в этой области замедляется («зона 1»). В областях, где возникают растягивающие напряжения, наблюдается ускоренный рост волокон – «зоны 2». В области контакта рост «верхних» волокон опережает рост «нижних». Вследствие этого возникает изгиб фрагмента в направлении роста, что объясняет феномен сближения фрагментов с позиций теории ростовых деформаций.

Отметим, что давление  $P_n$  и область контакта (граница  $S_p$ ) должны подбираться индивидуально для каждого пациента. Расчеты показывают, например, что при увеличении зоны действия нагрузки  $P_n$  фрагменты будут расходиться [11]. Ключевую роль в поиске оптимального давления должен играть биомеханический анализ пациента, основанный на гипсовых контрольно-диагностических моделях или магнитно-резонансной томографии. В результате анализа должны быть даны рекомендации по выбору нужной формы ортопедической пластины.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье показано, что благоприятное поле напряжений может вызывать рост живой ткани в заданном направлении. С точки зрения механики, задача об ортопедическом лечении видится как задача управления ростовыми деформациями. Теоретические основы решения таких задач разработаны авторами [7, 8, 13] и могут эффективно применяться для разработки оптимальной методики ортопедического лечения врожденной расщелины твердого нёба. Применение математического моделирования и компьютерной симуляции позволит предсказать исход ортопедического лечения и провести «виртуальное лечение». Это важно как для лечащего врача, так и для психологической поддержки родителей ребенка.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 11-01-00910).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов С.Н. Хирургическое лечение деформаций носа при врожденных двусторонних расщелинах верхней губы (обзор) // Российская ринология. – 2005. – № 3. – С. 43–47.
2. Григорян С.С., Регирер С.А. Биомеханика и некоторые общие вопросы биологии // Биомеханика: проблемы и исследования. – Рига: Зинатне, 1988. – С. 233–245.
3. Кизилова Н.Н., Логвенков С.А., Штейн А.А. Математическое моделирование транспортно-ростовых процессов в многофазных биологических сплошных средах // Изв. РАН. МЖГ. – 2012. – № 1. – С. 3–13.
4. Логвенков С.А., Штейн А.А. Управление биологическим ростом как задача механики // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 2. – С. 9–19.
5. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
6. Регирер С.А., Штейн А.А. Методы механики сплошной среды в применении к задачам роста и развития биологических тканей // Современные проблемы биомеханики. – Рига: Зинатне, 1985. – Т. 2. – С. 5–37.
7. Туктамышев В.С., Лохов В.А. Метод независимого управления механическими напряжениями в деформируемых системах // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 269–281.
8. Туктамышев В.С., Лохов В.А., Няшин Ю.И. Независимое управление напряжениями и деформациями в растущих живых тканях // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 2 (52). – С. 69–76.
9. Штейн А.А., Юдина Е.Н. Математическая модель растущей растительной ткани как трехфазной деформируемой среды // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т. 15, № 1 (51). – С. 42–51.
10. Hsu F.-H. The influences of mechanical loads on the form of a growing elastic body // Journal of Biomechanics. – 1968. – Vol. 1, No. 4. – P. 303–311.
11. Masich A.G., Nyashin Y.I. Mathematical modelling of orthopedic reconstruction of childrens congenital maxillary anomaly // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3, No. 1. – P. 101–109.
12. Masich A.G., Chernopazov S.A., Simanovskaya E.Yu., Nyashin Yu.I., Dolgoplova G.V. The role of mechanical factor in orthopedic treatment of congenital palate cleft in children // Russian Journal of Biomechanics. – 2000. – Vol. 4, No. 1. – P. 33–42.
13. Nyashin Y., Lohov V., Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // ZAMM (Z. Angew. Math. Mech.). – 2005. – Vol. 85, No. 8. – P. 557–570.
14. Taber L.A. Biomechanics of growth, remodeling, and morphogenesis // Appl. Mech. Rev. – 1995. – Vol. 48. – P. 487–545.

## BIOMECHANICAL MODELLING OF THE HARD PALATE FRAGMENTS APPROACHING AT ORTOPAEDIC TREATMENT

V.A. Lokhov, O.Yu. Dolganova, Y.I. Nyashin (Perm, Russia)

In the paper, the treatment of the congenital cleft of the hard palate is considered as a control problem for growth strain and the methods of continuum mechanics are suggested to solve the problem. The biomechanical analysis of stress-strain state in the growing palate fragment is performed where Hsu's model of growth strain is applied (Journal of Biomechanics, 1968). Based on the analysis, the quantitative explanation of the hard palate fragment approaching under the pressure of dentogingival plate is given, and it is concluded that the theory of stress and deformation control by eigenstrain can be successfully applied for solution of the problem of bringing down the fragments of the hard palate.

**Key words:** cleft of the hard palate, control, orthopaedic treatment, growth strain.

Получено 17 февраля 2012