

УДК 531/534: [57+61]

## ВОЗМУЩЕНИЕ ПОТОКА ПРИ ИНВАЗИВНОМ ИЗМЕРЕНИИ ДАВЛЕНИЯ КРОВИ

Л.А. Булавин<sup>1</sup>, Г.В. Кнышов<sup>2</sup>, Ю.Ф. Забашта<sup>1</sup>, Б.В. Бацак<sup>2</sup>, С.В. Северилов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Кафедра молекулярной физики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, Украина, 03680, Киев, проспект Глушкова, 2/1, e-mail: severylov@mail.ru

<sup>2</sup> Национальный институт сердечно-сосудистой хирургии имени Н.М. Амосова, Украина, 03110, Киев, ул. Н. Амосова, 6

**Аннотация.** В результате сокращения сердца в артериях распространяется пульсовая волна. Измерение давления этой волны является важным диагностическим параметром, характеризующим деятельность организма. Для измерения используется инвазивный метод. Особенностью данного метода является то обстоятельство, что в сосудистое русло вводится катетер, который представляет собой полую полимерную трубку, заполненную раствором гепарина. Введение катетера приводит к появлению отраженной волны, что существенно меняет характер потока крови. Следовательно, давление измеряется с погрешностью. В статье приведена оценка данной погрешности. Для расчета используется модель, в которой сосуд рассматривается как канал в упругой среде. Данная среда моделирует собой биоткани. Кровь рассматривается как несжимаемая жидкость. Решаются уравнения гидродинамики для области канала с катетером. Катетер моделируется в виде полого цилиндра, заполненного идеальной несжимаемой жидкостью. Решение получено в гидравлическом приближении. Согласно этому приближению давление и осевые компоненты скорости считаются постоянными по сечению канала. Для сечения, где располагается торец катетера, записывается условие непрерывности для осевой компоненты скорости и давления. Поскольку торец катетера абсолютно жесткий, в его центре компоненты скорости равны нулю. В этой точке давление равно удвоенному давлению в падающей волне. Получена формула для среднего давления, действующего по торцу катетера. Показано, что среднее давление существенно отличается от давления в падающей волне. Соответствующая относительная погрешность измерения пульсового давления по порядку величины составляет несколько десятков процентов.

**Ключевые слова:** артериальное давление, пульсовое давление, инвазивные методы измерения, катетер, длинные гравитационные волны.

### ВВЕДЕНИЕ

При оперативных вмешательствах и ведении тяжелых больных необходим постоянный контроль артериального давления. Этот контроль осуществляется за счет введения в сосудистое русло катетера (рис. 1), который представляет собой полую

---

© Булавин Л.А., Кнышов Г.В., Забашта Ю.Ф., Бацак Б.В., Северилов С.В., 2013

Булавин Леонид Анатольевич, академик Национальной академии наук Украины, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой молекулярной физики, Киев

Кнышов Геннадий Васильевич, академик Национальной академии наук Украины, д.мед.н., директор Национального института сердечно-сосудистой хирургии имени Н.М. Амосова, Киев

Забашта Юрий Феодосеевич, профессор, д.ф.-м.н., преподаватель кафедры молекулярной физики, Киев

Бацак Богдан Вадимович, заведующий отделением лучевой диагностики, Киев

Северилов Степан Вячеславович, аспирант кафедры молекулярной физики, Киев

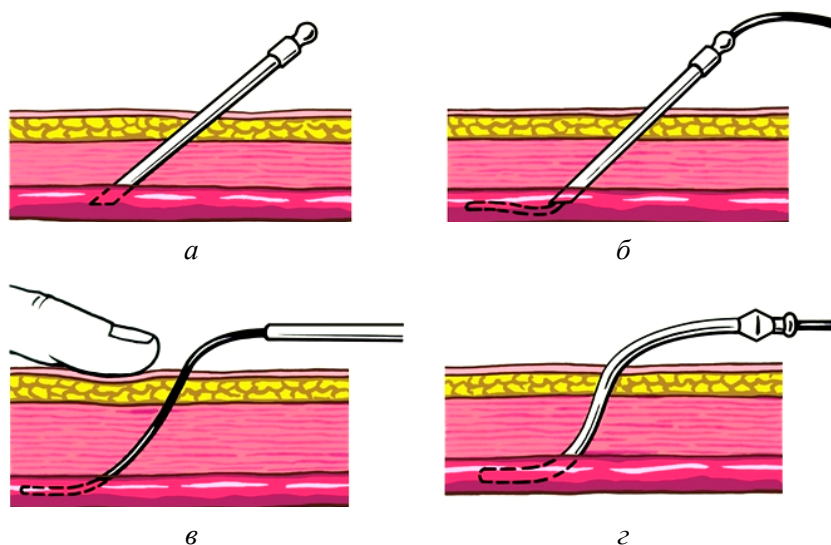


Рис. 1. Катетеризация артериального русла: *а* – пункция сосуда; *б* – введение проводника и удаление иглы; *в* – нанизывание катетера; *г* – введение катетера в сосуд и удаление проводника

полимерную трубку, заполненную раствором гепарина [1]. Катетер соединяется при помощи удлинителя с манометром. Манометр измеряет среднее давление по торцу катетера.

Очевидно, что введение катетера искажает истинную картину кровяного потока и распределения давления в сосуде. Поэтому давление, которое измеряется манометром, отличается от давления при отсутствии катетера. Соответственно изначально в упомянутом методе заложена систематическая погрешность.

Цель работы состоит в том, чтобы теоретически рассчитать данную погрешность. Очевидно, что такой расчет является единственным способом получить оценку указанной погрешности. Как известно авторам, эта задача ранее в литературе не рассматривалась.

### РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Будем рассматривать кровеносный сосуд как канал цилиндрической формы в упругой среде. Последняя моделирует собой биоткани, окружающие сосуд. Радиус указанного канала обозначим через  $b$ .

Катетер представим в виде полого цилиндра с внутренним радиусом  $a$  и внешним  $a_1$ , заполненного идеальной несжимаемой жидкостью. Поскольку толщина стенки катетера на порядок меньше радиуса, границу катетера далее в расчетах будем считать линией. Материал стенки катетера будем считать абсолютно твердым. Полый цилиндр располагается внутри канала таким образом, что их оси симметрии совпадают (рис. 2).

Сосуд заполнен кровью, которая рассматривается как идеальная несжимаемая жидкость. Течение крови описывается уравнением Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p, \quad (1)$$

при условии

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{v}$  – скорость;  $t$  – время;  $p$  – давление.

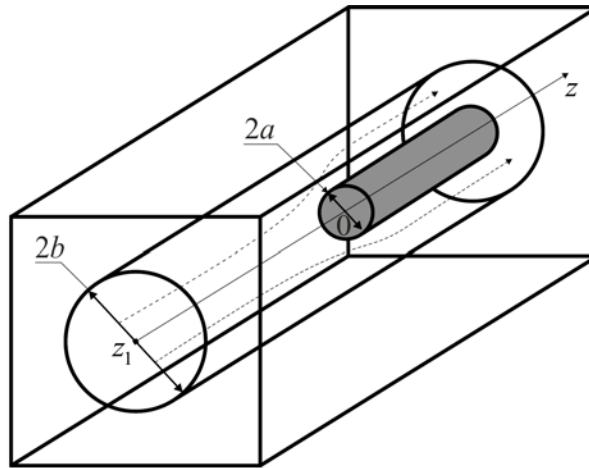


Рис. 2. Расчетная модель:  $a$  – радиус катетера;  $b$  – радиус упругой среды, моделирующей биоткани, окружающие сосуд

Задача решается в линейном приближении, уравнение (1) примет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (3)$$

Введем цилиндрические координаты с осью  $z$ , которая совпадает с осью симметрии данной задачи. Пусть торец катетера соответствует координате  $z = 0$ . Поскольку задача обладает осевой симметрией, угловая координата выпадает из рассмотрения. Радиальную координату обозначим через  $r$ .

Векторные выражения (3) и (2), записанные в компонентах, имеют вид

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

где  $v_z$  и  $v_r$  – осевая и радиальная компоненты скорости.

На граничных поверхностях  $z = 0$ ,  $r < a$  и  $0 < z < \infty$ ,  $r = a$  катетера должно выполняться условие

$$v_n = 0, \quad (7)$$

где  $v_n$  – проекция скорости на нормаль к указанной поверхности. На торце катетера принимается условие  $v_z = 0$  из-за того, что внутри катетера пульсовая волна не может распространяться по причине жесткости его стенок.

Обозначим через  $\mathbf{u} \equiv \{u_r, u_z\}$  вектор смещения, определяемый формулой

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (8)$$

Постулированная ранее упругость стенок канала требует выполнения на его границе  $r = b$  условия

$$p = \alpha u_r \Big|_{r=b}, \quad (9)$$

где  $\alpha$  – коэффициент упругости среды, окружающей канал.

Поступление крови в сосуд обеспечивает насосная функция сердца. Описать процесс движение крови, направленной в сосуд, можно, например, задавая скорость в сечении, где располагается клапан аорты [4]. Будем считать, что это сечение соответствует координате  $z_1$ , записывая граничное условие

$$v_z(z_1, t) = \phi(t), \quad (10)$$

где  $\phi(t)$  – функция, вид которой определяется физиологическими процессами. Ее в рассматриваемой задаче следует считать заданной.

Решив систему уравнений (4)–(6) при граничных условиях (7), (9), (10), можно определить вид функции  $p(z, r, t)$ . Распределение давлений на торце описывается функцией  $p_0(r, t) = p(0, r, t)$ .

Как уже упоминалось, данная задача состоит в том, чтобы рассчитать давление  $p_T$  в торце катетера. Фактически  $p_T$  – это среднее давление, действующее на указанный торец. Это давление определяется формулой

$$p_T(t) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p_0(r, t) 2\pi r dr. \quad (11)$$

### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В СОСУДАХ

Исследование течения жидкости в каналах относится к классическим задачам гидродинамики и имеет долгую историю (например, [2, 3] и др.). За этим научным направлением закрепилось название «теория длинных гравитационных волн». Основу этой теории составляет так называемое гидравлическое приближение [3].

Главным тезисом этого приближения является предположение о том, что компонента  $v_z$  является постоянной в данном сечении канала. По отношению к рассматриваемой задаче из этого предположения следует, что решение уравнения (4) должно иметь вид

$$v_z = v_z'(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right). \quad (12)$$

Здесь и далее величины, отмеченные одним штрихом, относятся к случаю, когда сечение вдоль канала не изменяется.

Формула (12) раскрывает физический смысл принятого предположения. Согласно этой формуле входное возмущение (10) распространяется вдоль канала со скоростью  $c$ , не меняя своей формы. Но это как раз тот тип течения, который соответствует течению крови в сосуде: в медицине такой тип течения носит название пульсовой волны.

Указанная аналогия открывает возможности для применения теории длинных волн при описании течения крови.

Сопоставляя выражения (12) и (10), приходим к выводу о справедливости равенства

$$\phi(t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right). \quad (13)$$

Подстановка формулы (12) в соотношение (6) и последующее интегрирование приводят к результату

$$v_r' = \frac{r}{2c} \frac{\partial v_z'}{\partial t}. \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в формулу (8) и выполняя интегрирование, получаем

$$u_r' = \frac{r}{2c} v_z'. \quad (15)$$

Соответственно для давления получаем формулу

$$p' = \frac{\alpha b}{2c} v_z'. \quad (16)$$

Подставляя формулы (12) и (16) в уравнение (4), получаем

$$c = \left(\frac{\alpha b}{2\rho}\right)^{1/2}. \quad (17)$$

Теперь формулу (16) можно переписать в виде

$$p' = \rho c v_z'. \quad (18)$$

По своему смыслу величина  $p'$  представляет собой разность систолического и диастолического давления, которую в гемодинамике принято называть пульсовым давлением.

Вышеприведенные формулы описывают поведение пульсовой волны при отсутствии катетера. Понятно, что введение последнего в сосуд изменяет картину течения. При этом катетер выступает в роли некоторого препятствия.

Согласно теории длинных гравитационных волн препятствие приводит к возникновению отраженной и прошедшей волн в дополнение к волне, падающей на препятствие. Сохраняя для характеристик падающей волны прежние обозначения  $v_z'$  и  $p'$ , введем для аналогичных характеристик отраженной и прошедшей волн обозначения  $v_z''$ ,  $p''$  и  $v_z'''$ ,  $p'''$ .

В упомянутой теории при рассмотрении вопроса о течении жидкости в канале с препятствием оставляют в силе предположение о постоянстве компонент  $v_z'$ ,  $v_z''$ ,  $v_z'''$ , а значит, и давлений  $p'$ ,  $p''$ ,  $p'''$  (см. формулу (18)) по сечению канала. При этом условие непрерывности скорости для сечения  $z = 0$ , где располагается препятствие, записывается в виде

$$S'(v_z' - v_z'') = S'''v_z''', \quad (19)$$

где  $S'$  и  $S'''$  – площади сечения канала для  $z < 0$  и  $z > 0$ , а условие непрерывности давления для того же сечения – в виде

$$p' + p'' = p'''. \quad (20)$$

Учитывая формулу (18) и равенства  $S' = \pi b^2$  и  $S'' = \pi(b^2 - a^2)$ , из системы уравнений (19)–(20) на участке канала  $z < 0$  имеем

$$p = p' + p'' = p' \frac{1}{1 - \frac{a^2}{2b^2}}. \quad (21)$$

### ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ПУЛЬСОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Формула (21), казалось бы, решает поставленную задачу: в этой формуле  $p'$  – это истинное давление, сумма  $p' + p''$  – давление  $p$ , измеряемое датчиком, а множитель  $\frac{1}{1 - \frac{a^2}{2b^2}}$  определяет систематическую погрешность измерения. Однако

этот вывод неверен. Сомнения в правомерности использования формулы (21) для расчета давления, измеряемого датчиком, порождает следующий факт.

Рассматривая картину линий тока (см. рис. 2), мы видим, что линия тока, совпадающая с осью симметрии, заканчивается в точке  $z=0$ ,  $r=0$  (ее принято называть в гидродинамике критической). В этой точке равна нулю не только нормальная к поверхности торца компонента  $v_z$ , но и радиальная компонента  $v_r$ . В силу последнего обстоятельства частицы жидкости, движущиеся по указанной траектории в направлении торца сплошного цилиндра, не могут обогнуть это препятствие, а отбрасываются от торца в обратном направлении вдоль оси симметрии. Для таких частиц складывается та же ситуация, что возникает при нормальном падении волны на абсолютно твердую бесконечную плоскость. Как известно, в последнем случае давление на этой плоскости равно давлению в падающей волне, умноженному на два. Следовательно, в рассматриваемом случае для критической точки имеем равенство

$$p = 2p'. \quad (22)$$

Таким образом, оказывается известным значение функции  $p_0$  в точке  $r=0$ , а именно

$$p_0(0, t) = 2p'(t). \quad (23)$$

Как указано в работе [2], условия непрерывности скорости (19) и давления (20) выполняются, строго говоря, для пары сечений, удаленных от сечения  $z=0$  на расстояние порядка  $b$ . И если приближенно указанную пару сечений считать, следуя теории длинных гравитационных волн, совпадающей с сечением  $z=0$ , то более логично (хотя это тоже некоторое приближение) говорить, что условие (20) выполняется не по всему сечению  $z=0$ , а только на участке этого сечения  $r \geq a$ , так как участок  $r < a$  занят катетером.

Поскольку для давления должна соблюдаться непрерывность, из последнего соображения следует, что для граничного значения функции  $p_0$  можно записать выражение

$$p_0(a, t) = \frac{1}{1 - \frac{a^2}{2b^2}} p'(t). \quad (24)$$

Разложим функцию  $p_0(r, t)$  в ряд по степеням  $r$ , ограничившись членом второй степени. В силу осевой симметрии данной задачи справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial p_0(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (25)$$

так что указанное разложение имеет вид

$$p_0(r, t) = p'(t)(2 - Br^2). \quad (26)$$

Подставляя равенство (24) в формулу (26), определяем коэффициент  $B$ , получая для функции  $p_0(r, t)$  выражение

$$p_0(r, t) = p'(t) \left( 2 - \frac{2}{a^2} \frac{b^2 - a^2}{2b^2 - a^2} r^2 \right). \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в формулу (11) и выполняя интегрирование, получаем

$$p_\tau(t) = p'(t) \frac{3b^2 - a^2}{2b^2 - a^2}. \quad (28)$$

Как видно из последней формулы, измеренное датчиком давление  $p_\tau(t)$  отличается от истинного давления  $p'(t)$ , причем относительная систематическая погрешность  $\varepsilon_p = \frac{p_\tau - p'}{p'}$  составляет

$$\varepsilon_p = \frac{b^2}{2b^2 - a^2}. \quad (29)$$

В качестве примера оценим погрешность, допускаемую при инвазивном измерении давления крови в аорте. Радиус аорты  $b$  примерно равен 1,5 см. Принимая для радиуса катетера  $a$  значение 1,5 мм, получаем  $\varepsilon_p \sim 0,5$ .

Как следует из формулы (29), при больших значениях отношения  $a/b$ , что характерно для сосудов меньшего радиуса, чем аорта, погрешность превышает 50%.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как это уже указывалось, априори очевидно, что введение катетера в кровеносный сосуд меняет картину течения крови. Следовательно, манометр измеряет давление в потоке, возмущенном введением катетера. Диагност же интересуется давлением в невозмущенном потоке, который реализуется при отсутствии катетера. Таким образом, уже изначально в метод инвазивного измерения закладывается погрешность. Здесь, по-видимому, важно подчеркнуть, что речь идет именно о погрешности метода – систематической погрешности. И естественным является вопрос, насколько велика эта погрешность.

Ответ, полученный в данной статье, несколько обескураживает: оказывается, эта погрешность превышает 50%.

Однако, как известно, то обстоятельство, что тот или иной метод характеризуется большой систематической погрешностью, вовсе не означает, что от этого метода следует отказаться. Если эта погрешность известна, то ее можно учесть, внося соответствующие поправки в измеренные указанным методом величины.

Главный результат данной статьи состоит в том, что в ней дан ответ на вопрос, как скорректировать измеренное значение давления крови, чтобы получить истинное значение последнего: для этого согласно формуле (28) необходимо измеренное давление  $p_t$  разделить на величину  $\frac{3b^2 - a^2}{2b^2 - a^2}$ . Указанную операцию логично, по мнению авторов, назвать введением поправки на возмущение потока.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьков В.В., Киров М.Ю. Инвазивный мониторинг гемодинамики в интенсивной терапии и анестезиологии / Сев. гос. мед. ун-т. – Архангельск, 2008. – 244 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. – М.–Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1947. – 928 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
4. Скобцов Ю.А., Родин Ю.В., Оверко В.С. Моделирование и визуализация поведения потоков крови при патологических процессах. – Донецк: Заславский А.Ю., 2008. – 212 с.

## FLOW DISTURBANCE AT BLOOD PRESSURE INVASIVE MEASUREMENT

L.A. Bulavin, G.V. Knyshov, Y.F. Zabashta, B.V. Batsak, S.V. Severilov (Kiev, Ukraine)

A pulse wave spreads in arteries as a result of heart beat. Measuring of this wave pressure is an important diagnosis parameter characterizing the body activity. The invasive method is used for such measuring. Feature of this method is the fact that the catheter being a hollow polymeric pipe filled with heparin solution is inserted into the vascular bed. Catheter insertion leads to reflected wave that essentially changes the blood stream character. Therefore, the pressure is measured with an error. This article gives a review of this error estimation. A model where a vessel is considered as a channel in an elastic medium is used for calculation. This medium simulates biological tissues. Blood is considered as an incompressible liquid. Hydrodynamic equations are solved for the area of the channel with the catheter. The catheter is simulated in form of a hollow cylinder filled with an ideal incompressible liquid. The solution is got in a hydraulic approximation. According to this approximation, the pressure and speed axial component are considered to be constant along the channel section. The continuity condition for speed axial component and pressure is recorded for the section where the flat end of the catheter is situated. Because the flat end of the catheter is absolutely hard, speed components in its centre are equal to zero. In this point, the pressure is equal to doubled pressure in the incident wave. The formula for the average pressure acting on the flat end of the catheter is derived. It is shown that the average pressure differs significantly from the pressure in the incident wave. The corresponding relative error of pulse pressure measurement in value order is several dozens of percent.

**Key words:** arterial pressure, pulse pressure, invasive methods of measurement, catheter, long gravity waves.

*Получено 3 июля 2013*