

УДК 621.746.62

И.Л. Никулин, А.В. Перминов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНВЕКЦИИ НИКЕЛЕВОГО
РАСПЛАВА ПРИ ИНДУКЦИОННОМ ПЕРЕПЛАВЕ.
РЕШЕНИЕ МАГНИТНОЙ ПОДЗАДАЧИ**

В настоящей работе для изучения основных закономерностей движения расплава металла в неоднородном переменном магнитном поле разработана математическая модель, в которой рассматривается заполненная парамагнитным проводящим расплавом цилиндрическая область, ось симметрии которой направлена вертикально. Модель включает в себя: уравнения, описывающие пространственное распределение магнитного поля индуктора, который представляет собой короткую катушку; уравнения для индукционных токов, возникающих в объеме металла при изменении магнитного поля индуктора; уравнение переноса тепловой энергии, учитывающее движение среды и действие объемных источников тепла; уравнения конвекции расплава в приближении Буссинеска с учетом силы Лоренца, действующей на расплав. На твердых боковой и нижней границах области выполняются условия прилипания, верхняя граница расплава считается свободной. Теплоотвод на боковой поверхности задается законом Ньютона–Рихмана. Тепловой поток на верхней границе рассчитывается по закону Стефана–Больцмана, а нижняя грань считается теплоизолированной. Уравнения и граничные условия записаны в безразмерной форме. Показано, что поставленная задача сводится к последовательному решению магнитной и конвективной подзадач. В приближении осесимметричного индуктора методами вычислительного эксперимента для различных магнитных чисел Рейнольдса рассчитаны пространственно-временные распределения вектора напряженности магнитного поля в области расплава металла, плотности индукционных токов и мощности источников теплоты. Выявлены закономерности в изменениях указанных выше величин при варьировании управляющего параметра – магнитного числа Рейнольдса. Эта информация в перспективе позволит моделировать конвективные течения в расплаве и выявить эффекты, важные для понимания процессов, влияющих на распределение примесей.

Ключевые слова: математическое моделирование, магнитное поле, уравнение диффузии магнитного поля, магнитное число Рейнольдса, индукционные токи, конвекция.

I.L. Nikulin, A.V. Perminov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**THE MATHEMATICAL MODEL OF NICKEL MELT
CONVECTION IN THE INDUCTION MELTING.
THE SOLVING OF THE MAGNETIC SUBPROBLEM**

In this paper mathematical model is developed for the study of metal melt flows general regularities in nonuniform alternating magnetic field, in which cylindrical area filled with paramagnetic conducting melt is considered, the symmetry axis is directed vertically. The model include the equations describing spatial magnetic field distribution for the inductor representing itself shot coil, the equations for induced currents arising in metal volume at alternating inductor magnetic field, the equation of heat energy transfer that includes movement of media and volume heat sources, the equation of melt convection in Boussinesq approximation with accounting of Lorentz force actin to the melt. On the side and bottom solid area boundaries slip conditions for velocities, top boundary of melt is free. Heat sink on side surface is determined by Newton-Richman law, on the top it is calculated Stefan-Boltzmann law, bottom is considered as insulated. The governing equations and boundary conditions are given in dimensionless form. It is shown the given problem can be reduced to the consecutive solving the magnetic and thermoconvective subproblem. In axial symmetrical external magnetic field approximation for different magnetic Reynolds numbers the magnetic field strength spatiotemporal distributions in melt, densities of electrical currents and heat source powers are calculated. The parameters given above changes regularities at the control parameter – Reynolds number variations are detected. This information will later allow modeling the melt convective flow and revealing the effects are important for understanding the processes regulating the distribution of impurities.

Keywords: mathematical modeling, magnetic field, magnetic field diffusion equation, magnetic Reynolds number, induction current, convection.

Введение

Качество конструкционных материалов в значительной степени определяет технологический прогресс в металлургии. Так, при индукционной плавке повышение качества напрямую связано с возможностью управления конвективными течениями металла в тигле. Поскольку плавление жаропрочного сплава происходит в закрытой вакуумной камере при температурах, превышающих 1000 °С, наиболее доступным средством для изучения конвекции является математическое моделирование.

Взаимодействие металлического расплава и переменного электромагнитного поля изучается весьма интенсивно как экспериментальными методами [1], так и теоретически [2–4]. Результаты этих исследований имеют широкое применение в черной [5] и цветной металлургии [6]. К известным положительным эффектам влияния магнитного поля на металлургическую продукцию можно отнести сокращение

технологического цикла по времени, измельчение зерна при затвердевании, гомогенизацию химического состава, выравнивание температурного поля.

В научной литературе встречаются работы, посвященные влиянию переменных магнитных полей на движение расплава в цилиндрической полости, например [2, 3]. В работе [4] рассматривался расплав в цилиндрической жидкой зоне, находящейся во вращающемся магнитном поле. Показано, что для умеренных частот вращения магнитное поле практически однородно в каждый момент времени как вне, так и внутри жидкой зоны.

В большинстве случаев, описанных в литературе, исследуются слабые и однородные по пространству магнитные поля. Изучение влияния сильных и существенно неоднородных полей на состояние расплавленного металла представляет интерес как с точки зрения теории, так и с точки зрения технологических приложений.

В настоящей работе представлена математическая модель для изучения основных закономерностей конвективного движения расплава металла в переменном высокочастотном магнитном поле. В рамках модели рассматривается заполненная парамагнитным проводящим расплавом цилиндрическая область, ось симметрии которой направлена вертикально. В качестве объекта для моделирования был выбран технологический процесс индукционной плавки, реализованный в цехе точного литья ОАО «Протон – Пермские моторы», г. Пермь. Показано, что сложная сопряженная задача сводится к последовательному решению магнитной и термоконвективной подзадач. В приближении осесимметричного индуктора для различных магнитных чисел Рейнольдса рассчитаны пространственно-временные распределения вектора напряженности магнитного поля в области расплава металла, плотности индукционных токов и мощности источников теплоты.

1. Геометрические и физические параметры задачи

Принципиальная схема теплового узла печи представлена на рис. 1. Шихта жаропрочного никелевого сплава 1 помещается в тигель 2, спекаемый из смеси шамота и электрокорунда, находящийся внутри водоохлаждаемого медного индуктора 3, установленного на асбестовом основании 4. Заливка металла происходит через носик электрокорундового стакана 5. Индукторная печь находится внутри вакуумной

камеры, а процесс электромагнитного переплава происходит в условиях технического вакуума (10^{-3} Па). Верхняя граница расплава считается свободной. Параметры технологического процесса представлены в табл. 1. Физические свойства никелевого расплава [7], использованные для моделирования, приведены в табл. 2.

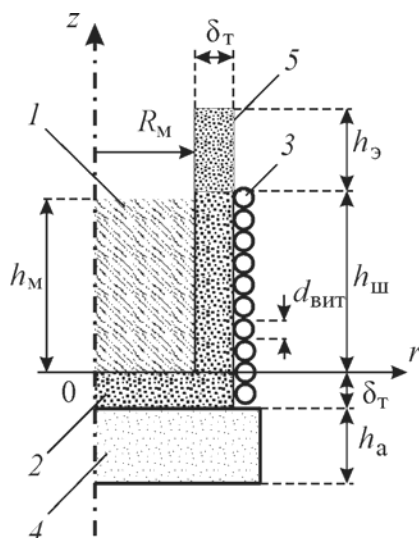


Рис. 1. Тепловой узел индукторной печи: 1 – расплав металла; 2 – тигель; 3 – индуктор; 4 – асбестовое основание; 5 – электрокорундовый стакан

Таблица 1

Параметры технологического процесса

Параметры	Обозначение	Значение
Геометрические параметры, мм		
Толщина стенки тигля	δ_T	10
Высота электрокорундового стакана	$h_{\text{Э}}$	50...100
Высота шамотного тигля	$h_{\text{Ш}}$	200...300
Высота асбестового основания	$h_{\text{а}}$	50...60
Радиус витка	$R_{\text{ВИТ}}$	150
Диаметр витка	$d_{\text{ВИТ}}$	35
Внутренний радиус тигля	$R_{\text{М}}$	125
Высота столба расплава металла	$h_{\text{М}}$	200...250
Физические параметры индуктора		
Рабочий ток индуктора, А	I	250
Частота переменного тока, кГц	$\omega/2\pi$	1...2
Число витков индуктора	N	8...12

Таблица 2

Физические свойства никелевого расплава

Параметр	Обозначение	Значение
Теплопроводность, Вт/(м·К)	λ	100
Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	c	655
Плотность, кг/м ³	ρ	7770
Удельная проводимость, МСм/м	σ	13,3
Динамическая вязкость, мПа·с	η	41,0
Коэффициент объемного расширения, К ⁻¹	β	$38,5 \cdot 10^{-6}$

2. Основные уравнения и допущения

Рассматривается заполненная парамагнитным $\mu \approx 1$ проводящим расплавом вертикальная цилиндрическая область (см. рис. 1), которая находится во внешнем неоднородном переменном магнитном поле $\mathbf{H}^{out} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \sin \omega t$. Пространственное распределение внешнего поля будет определено ниже. На данном этапе оно считается известным. В дальнейшем полагается, что диэлектрические стенки не влияют на магнитное поле, созданное индуктором. Характерные частоты и параметры катушки индуктора приведены в табл. 1.

Переменное магнитное поле генерирует в расплаве токи, которые являются объемными источниками тепла. За счет неравномерного распределения тепловых источников в жидкости возникает градиент температуры, который порождает конвективное течение в расплаве.

Система уравнений, описывающих состояние расплава, состоит из уравнений Максвелла, закона Ома и уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска, в которых учтена сила Лоренца и джоулево тепло в уравнении теплопроводности

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\
 \mathbf{J} &= \sigma (\mathbf{E} + \mu \mu_0 [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]), \\
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \beta T + \frac{\mu \mu_0}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T &= a \nabla^2 T + \frac{\mathbf{J}^2}{\rho c \sigma}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где \mathbf{H} – напряженность магнитного поля; t – время; μ – магнитная проницаемость; μ_0 – магнитная постоянная; σ – удельная электрическая проводимость; \mathbf{v} – скорость; T – температура; a – коэффициент температуропроводности; \mathbf{J} – плотность электрического тока; ρ – плотность; c – удельная теплоемкость; p – давление; ν – кинематическая вязкость; \mathbf{g} – ускорение свободного падения; β – коэффициент объемного расширения.

Проанализируем взаимное влияние магнитного поля и конвективных течений в расплаве на основе оценок некоторых слагаемых в системе уравнений (1). Следуя [8], оценим глубину проникновения магнитного поля в расплав. Пусть имеется неподвижный расплав во внешнем поле. Комбинируя первые два уравнения системы (1), получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{H}. \quad (2)$$

Оценивая порядок левой и правой части уравнения (2), для характерной глубины проникновения магнитного поля в расплав получаем значение $\delta \approx \sqrt{1/\sigma \mu_0 \omega} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ м. Для оценки здесь и далее использованы данные, приведенные в табл. 1 и 2. Глубина проникновения магнитного поля в расплав значительно меньше размеров тигля. Это говорит о том, что влияние магнитного поля на движение в расплаве будет существенно только в пределах гартмановских пограничных слоев, примыкающих к границам полости [9].

Для оценки влияния конвекции на распределение магнитного поля и электрических токов возьмем ротор от обеих частей закона Ома и используем теорему о циркуляции электрического поля (1)

$$\text{rot } \mathbf{J} = -\sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H}).$$

При выполнении неравенства $\omega \gg \nu R^{-1}$ вторым слагаемым в правой части данного равенства, а значит, и влиянием конвективного движения на распределение токов можно пренебречь.

Исходя из того, что в уравнении Навье-Стокса конвективное слагаемое $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ и слагаемое с подъемной силой $\mathbf{g} \beta T$ имеют один порядок, для характерного значения скорости получим оценку $v \sim \sqrt{g \beta R \theta}$,

где характерная разность температур $\theta = 20$ К, а течение считалось установившимся. В этом случае получаем $vR^{-1} = R^{-1} \sqrt{g\beta R\theta} = 0,4 c^{-1}$.

Значение частоты колебаний тока в индукторе изменяется в пределах 1–2 кГц и значительно превосходит критические значения частоты, при которых генерируемые конвективным движением расплава электрические токи влияют на распределение магнитного поля внутри расплава.

Таким образом, сопряженная магнитогидродинамическая задача может рассматриваться последовательным решением следующих подзадач: 1) расчет пространственного распределения магнитного поля индуктора в объеме расплава без учета его движения; 2) расчет индукционных токов J и объемной мощности источников джоулевой теплоты; 3) решение задачи тепломассопереноса с известным распределением магнитного поля и внутренних источников теплоты.

3. Безразмерные уравнения и граничные условия

Рассмотрим вначале уравнение диффузии магнитного поля в металле (2). Его решение будем искать в виде суперпозиции составляющих магнитного поля: внешней гармонической \mathbf{H}^{out} , создаваемой индуктором, и внутренней \mathbf{H}^{ind} , создаваемой индукционными токами

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{out} \cos \omega t + \mathbf{H}^{ind}. \quad (3)$$

Внутри рассматриваемой области $\text{rot} \mathbf{H}^{out} = 0$.

Выберем в качестве характерных масштабов для координаты – внутренний радиус тигля R_m , для времени – обратную частоту пульсаций магнитного поля в индукторе ω^{-1} , для магнитного поля – величину $H_0 = NI/4\pi R_m \approx 10^3 \text{ А} \cdot \text{м}^{-1}$. Учитывая (3), запишем безразмерное уравнение для индукционной составляющей магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{ind}}{\partial \tau} = \frac{1}{\text{Re}_m} \nabla^2 \mathbf{H}^{ind} + \mathbf{H}^{out} \sin \tau, \quad (4)$$

где $\text{Re}_m = \mu_0 \sigma R_m^2 \omega$ магнитное число Рейнольдса. Подстановка физических констант и характерных величин технологического процесса (см. табл. 1 и 2) дает значение для $\text{Re}_m \sim 10^3$.

Уравнение (4) для выбранной геометрии удобно решать в цилиндрической системе координат. Решение полагается не зависящим от

азимутальной координаты и симметричным относительно оси z , что позволяет свести задачу к двумерному варианту и проводить расчеты в половине вертикального сечения цилиндра. За пределами расплава индукционным полем пренебрегаем в силу малости по сравнению с внешним, а на оси симметрии отсутствует нормальная компонента плотности тока

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = 0, \quad z = h: \quad \mathbf{H}^{ind} = 0, \\ r = 0: \quad \mathbf{J} = \text{rot}\mathbf{H}^{ind} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Внешнее магнитное поле создается индуктором, который представляет собой короткую катушку. Стенка тигля неэлектропроводна и при температуре расплава диамагнитна, следовательно, на основании теоремы о циркуляции магнитного поля не влияет на напряженность магнитного поля индуктора \mathbf{H}^{out} .

Аксиальная и радиальная компоненты напряженности магнитного поля индуктора в безразмерной форме, рассчитанные на основании закона Био-Савара-Лапласа, имеют вид

$$\begin{aligned} H_z &= \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} \frac{R(R - r_k \cos \varphi)}{\left[R^2 + r_k^2 + z_k^2 - 2Rr_k \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi, \\ H_r &= \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} \frac{Rz_k \cos \varphi}{\left[R^2 + r_k^2 + z_k^2 - 2Rr_k \cos \varphi \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R = 1 + \delta_t / R_m$ – безразмерный радиус витка индуктора; r_k и z_k – компоненты радиуса-вектора от элемента тока k -го кольца индуктора к точке наблюдения; φ – азимутальный угол цилиндрических координат. Схема для расчета по формулам (6) приведена на рис. 2.

Далее рассмотрим уравнения движения и температуропроводности (1). При их обезразмеривании использованы характерные масштабы: координаты – R_m , температуры – температура окружающей среды T_0 , давления – $\rho\nu\chi/R_m^2$; скорости – χ/R_m , времени – ω^{-1} , напряженности магнитного поля – $H_0 = NI/4\pi R_m$, объемной мощности джоулевых источников – $q_0 = H_0^2/\sigma R_m^2$; плотности тока – $J_0 = H_0/R_m$. Безразмерные уравнения конвекции запишутся в виде

$$\frac{1}{\text{Fo}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \text{Pr} (\nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \tilde{p}) + \text{Ra Pr } \Theta \boldsymbol{\gamma} + \text{Al } \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\text{Fo}} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \nabla) \Theta = \nabla^2 \Theta + P_\Lambda J^2, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

где $\text{Re}_m = \mu_0 \sigma R_m^2 \omega$ – магнитное число Рейнольдса; $\text{Fo} = \chi / (\omega R_0^2)$ – число Фурье; $\text{Pr} = \nu / \chi$ – число Прандтля; $\text{Ra} = g \beta R_m^3 T_0 / (\chi \nu)$ – число Рэлея; $\Theta = T / T_0$ – безразмерная температура; давление определяется как $\tilde{p} = p + \text{Ra } \Theta_L z$, где $\Theta_L = T_L / T_0$ – безразмерная температура плавления сплава; $\text{Al} = \mu_0 H_0^2 R_m^2 / (\rho \chi^2)$ – число Альфвена; $P_\Lambda = H_0^2 / (c \rho \sigma \chi T_0)$ – параметр, характеризующий отношение плотности потока энергии электромагнитного поля к плотности теплового потока. Плотность тока в (7) определяется из уравнения

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H}. \quad (8)$$

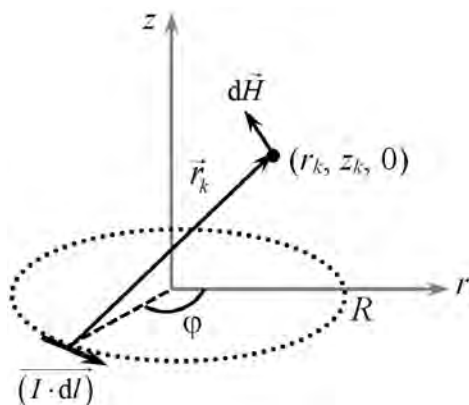


Рис. 2. Схема к определению магнитного поля кольца в точке с координатами $(r_k, z_k, 0)$

На твердых границах полости для скорости выполняются условия прилипания, на свободной границе имеет место равенство нулю касательной компоненты тензора вязких напряжений. При электромагнитном переплаве единственным тепловыделяющим элементом является сам расплав металла, поэтому в условиях установившегося теплообмена на границах области могут быть определены стационарные тепловые потоки $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$.

Тепловой поток излучением с верхней свободной поверхности металла q_1 будем рассчитывать по закону Стефана–Больцмана

$$q_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \varepsilon \sigma_B (T^4 - T_0^4), \quad (9)$$

где ε – степень черноты поверхности металла; σ_B – постоянная Стефана–Больцмана; T – температура поверхности металла, а T_0 – температура окружающей среды. В безразмерном виде уравнение (9) примет вид

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \text{Bi}_1 (\Theta^4 - 1), \quad (10)$$

где $\text{Bi}_1 = \varepsilon \sigma_B T_0^3 R_m / \lambda_0$ – число Био для верхней границы.

Плотность стационарного теплового потока через цилиндрическую боковую стенку определяется из соотношения [10]

$$q_2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = K_2 (T - T_0), \quad K_2 = \frac{\lambda_r}{R_0 \ln \left(1 + \frac{\delta_r}{R_0} \right)},$$

где K_2 – коэффициент теплопередачи через стенку тигля; λ_r – коэффициент теплопроводности тигля; δ_r – толщина стенки тигля. Для боковой границы безразмерное уравнение для теплового потока принимает вид

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \text{Bi}_2 (\Theta - 1), \quad \text{Bi}_2 = \frac{K_2 R_0}{\lambda_0}, \quad (11)$$

Теплоотвод с нижней поверхности металла осуществляется двухступенчато: сначала диффузионно через тигель и асбестовое основание, внешняя поверхность которого охлаждается радиационно. В приближении изотермической границы металл-тигель и с учетом неразрывности стационарный тепловой поток q_3 может быть рассчитан из системы уравнений

$$q_3 = -\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial r} = K_3 (T - T_a), \quad q_3 = \varepsilon_a \sigma_B (T_a^4 - T_0^4), \quad K_3 = \left(\frac{\delta_r}{\lambda_r} + \frac{h_a}{\lambda_a} \right)^{-1},$$

где T_a – температура внешней поверхности асбеста; ε_a – степень черноты асбеста; K_3 – коэффициент теплопередачи через форму и асбестовое

основание. Безразмерный тепловой поток на нижней границе определяется соотношением

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \text{Bi}_3 (\Theta - \Theta_a), \quad \text{Bi}_3 = \frac{K_3 R_0}{\lambda_0}, \quad (12)$$

$\Theta_a = T_a/T_0$ – безразмерная температура нижней поверхности асбестового основания, которая является решением уравнения

$$\frac{\varepsilon_a \sigma_B T_0^3}{K_2} (\Theta_a^4 - 1) - \Theta + \Theta_a = 0, \quad \Theta_a \in [1, \Theta]. \quad (13)$$

Температура Θ на границе считается известной. Ограничения на решения уравнения (13) вытекают из второго начала термодинамики.

Ось симметрии представляет собой адиабатическую границу $q_4 = 0$, поэтому безразмерное граничное условие для температуры на оси имеет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0. \quad (14)$$

Числа Био, входящие в уравнения (10)–(12), характеризуют тепловые потоки через границы полости. Для их оценки использованы следующие величины: степень черноты для никелевого расплава $\varepsilon = 0,15$, температура поверхности металла $T = 1770$ К, температура внутренней поверхности вакуумной камеры, принята равной температуре охлаждающей ее воды, $T_0 = 300$ К. Температура поверхности тигля, соприкасающейся с металлом, принята равной температуре металла, $T = 1770$ К, а температура противоположной поверхности принята $T_0 = 300$ К, поскольку соприкасается с медным водоохлаждаемым индуктором. При $R_0 = 0,1$ м, $\lambda_T = 2,2$ Вт/(м·К) и $\delta_T = 50$ мм коэффициент теплопередачи $K_2 = 54,3$ Вт/(м²·К). При значениях $\delta_T = 0,01$ м, $h_a = 0,05$ м, $\lambda_T = 2,2$ Вт/(м·К), $\lambda_a = 0,01$ Вт/(м·К) и $\varepsilon_a = 0,85$ коэффициент теплопередачи $K_3 \approx 0,2$ Вт/(м²·К). В итоге для соответствующих границ значения чисел Био равны $\text{Bi}_1 = 23 \cdot 10^{-3}$, $\text{Bi}_2 = 54,3 \cdot 10^{-3}$, $\text{Bi}_3 = 0,2 \cdot 10^{-3}$. Видно, что величина теплового потока через нижнюю границу расчетной области значительно меньше, чем через боковую и свободную поверхность. Следовательно, дно тигля можно считать теплоизолированным, а сложное условие (12), (13) примет простой вид (14).

4. Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим первые два этапа решения поставленной магнито-гидродинамической задачи, т.е. расчет пространственного распределения магнитного поля индуктора в объеме расплава и расчет индукционных токов J и объемной мощности источников джоулевой теплоты. Алгоритм решения задачи (4)–(6), реализован в виде пакета программ, написанных на языке фортран. При аппроксимации уравнения (4) использовалась явная конечно-разностная схема. Основные результаты получены на сетках 100×100 . Для обеспечения устойчивости схемы для шага по времени применялось условие $h_t \leq h_r^2 h_z^2 \text{Re}_m / [6(h_r^2 + h_z^2)]$.

На рис. 3. показано поведение решения на сгущающихся сетках для интегральной величины – суммарной мощности тепловых источников. Квазистационарное решение считалось установившимся, если относительная погрешность в определении амплитуды H^{ind} не превышала $\varepsilon = 10^{-5}$.

На рис. 4 показано распределение магнитного поля солеоида H^{out} (а – в), результирующее поле в расплаве при $\text{Re}_m = 1000$ (г), азимутальная составляющая плотности индукционных токов (д) и мощность джоулевых источников теплоты $q_v = J^2$ (е). Для перехода к размерным величинам J и q_v необходимо умножить на размерные множители:

$$J_0 = \frac{H_0}{R_0} \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}, \quad q_0 = \frac{H_0^2}{\sigma R_0^2} \sim 500 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Для установления закономерностей в генерации теплоты проведены вычислительные эксперименты с различными магнитными числами Рейнольдса, Re_m , результаты которых приведены на рис. 5.

Из рис. 4, г и 5, а, б видно, что магнитное поле присутствует только в приграничной области, а в центральной части полностью гасится индукционным полем, что хорошо согласуется с оценками, при-

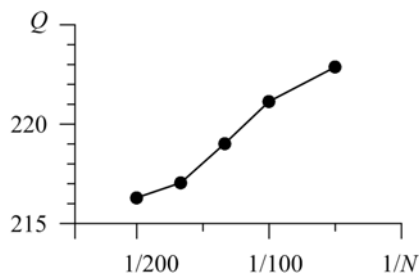


Рис. 3. Зависимость суммарной мощности тепловых источников от обратного числа разбиения расчетной области

веденными выше. В области, где градиенты магнитного поля велики, возникают электрические токи, причем на торцевых гранях и на боковой поверхности области токи противоположно направлены (рис. 4, д и рис. 5, в, г). Следует отметить, что токи на боковой поверхности значительно превышают таковые на торцах (рис. 5, в, г). Области интенсивного выделения теплоты локализованы около боковой поверхности, тепловыделение на торцевых гранях значительно слабее (рис. 5, д, е).

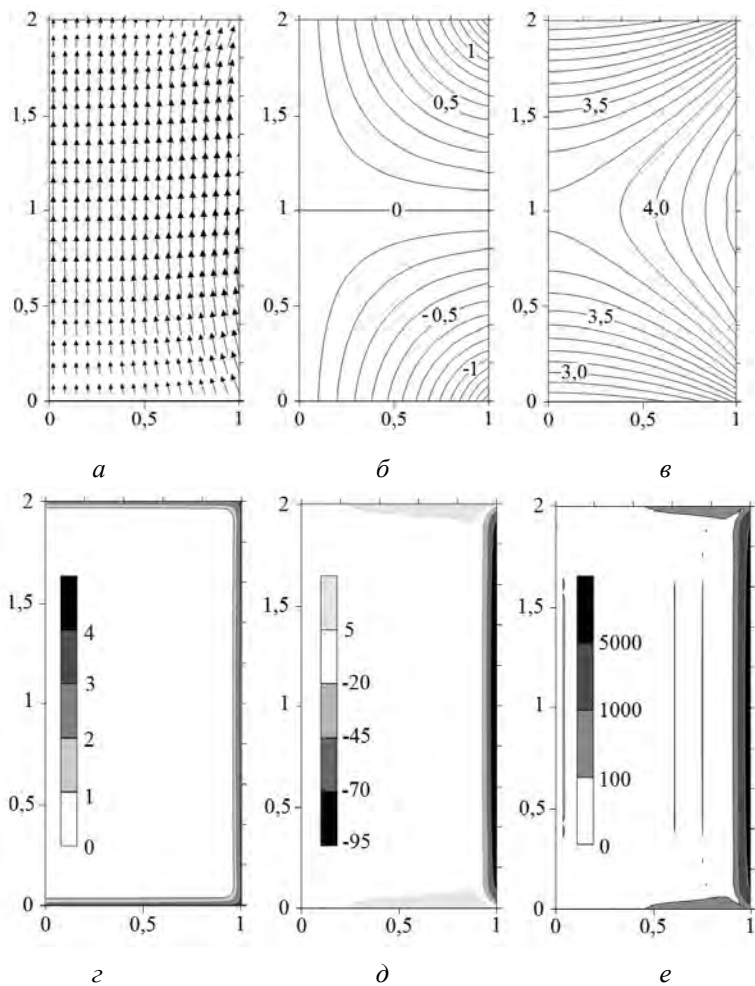


Рис. 4. Вектор напряженности магнитного поля индуктора H^{out} (а); радиальная компонента поля H_r^{out} (б); аксиальная компонента поля H_z^{out} (в); результирующее поле в расплаве (г); плотность токов J (д) и мощности внутренних источников тепла q_v (е)

Установлено, что с ростом магнитного числа Рейнольдса магнитное поле проникает в проводник на меньшую глубину, индукционные токи и тепловыделение возрастают и локализуются ближе к поверхности области.

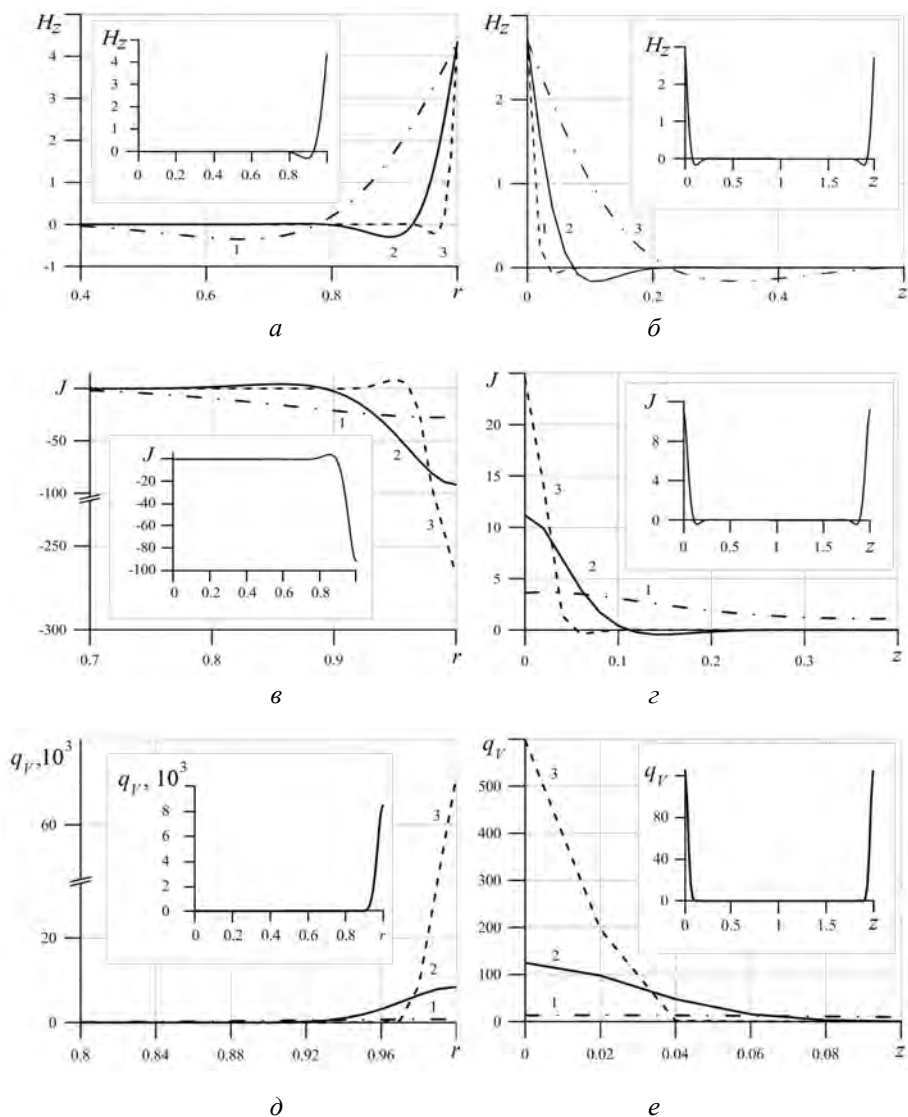


Рис. 5. Зависимости аксиальной компоненты результирующего магнитного поля вдоль радиуса (*a*) и высоты (*б*), плотности тока вдоль радиуса (*в*) и высоты (*г*), объемной мощности источников теплоты вдоль радиуса (*д*) и высоты (*е*) для различных значений Re_m : 1 – $Re_m=100$; 2 – $Re_m=1000$; 3 – $Re_m=10000$. На графиках подробно изображены приграничные области, на врезках показаны зависимости во всей области для $Re_m=1000$

Заключение

В настоящей работе представлена математическая модель, описывающая магнитное поле в электропроводном цилиндре, который помещен во внешнее неоднородное переменное магнитное поле индуктора. Модель включает уравнения, описывающие пространственное распределение магнитного поля индуктора, который представляет собой короткую катушку; уравнения для индукционных токов, возникающих в объеме металла при изменении магнитного поля индуктора; уравнение переноса тепловой энергии, учитывающее движение среды и действие объемных источников тепла; уравнения конвекции расплава в приближении Буссинеска. На твердых боковой и нижней границах области выполняются условия прилипания, верхняя граница расплава считается свободной. В соответствии с конструкцией технологической установки теплоотвод на боковой поверхности задан законом Ньютона–Рихмана. Тепловой поток на верхней границе рассчитывается по закону Стефана–Больцмана, нижняя грань – теплоизолированной. Уравнения и граничные условия записаны в безразмерной форме. Показано, что поставленная задача сводится к последовательному решению магнитной и конвективной подзадач.

В приближении осесимметричного индуктора методами вычислительного эксперимента для различных магнитных чисел Рейнольдса рассчитаны пространственно-временные распределения вектора напряженности магнитного поля в области расплава металла, плотности индукционных токов и мощности источников теплоты. Выявлены закономерности в изменениях указанных выше величин при варьировании управляющего параметра – магнитного числа Рейнольдса. Эта информация в перспективе позволит моделировать конвективные течения в расплаве и выявить эффекты, важные для понимания процессов, влияющих на распределения примесей.

Библиографический список

1. Кристаллизация цилиндрических алюминиевых слитков при МГД-перемешивании / С. Ю. Хрипченко [и др.] // Российская конференция по магнитной гидродинамике: тез. докл., Пермь, 18–22 июня 2012 г.; Институт механики сплошных сред УрО РАН. – Пермь, 2012. – С. 101.

2. Numerical Investigation of Dynamic Magnetic Field Influence on Vertical Bridgman Crystal Growth / T.P. Lyubimova [et al.] // Proc. of Int. Conf. Advanced Problems in Thermal Convection. – Perm, 2004. – P. 343–349.

3. Любимова Т.П., Файзрахманова И.С. Численное исследование влияния бегущего магнитного поля на тепломассоперенос в жидкой зоне // Гидродинамика: сб. науч. тр. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2004. – Вып. 11. – С. 173–190.

4. Демин В.А., Макаров Д.В. Влияние вращающегося магнитного поля на расплав в цилиндрической жидкой зоне // Вестн. Перм. ун-та. – Вып. 1. – Физика. – Пермь, 2004. – С. 106–111.

5. Цаплин А.И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН., 1995. – 238 с.

6. Шейден О., Леман А. Разработки в области электромагнитного перемешивания (ЭМП) расплава в печах для плавки алюминия // Цветные металлы Сибири: сб. науч. статей. – Красноярск: Версо, 2009. – С. 648–656.

7. Свойства элементов: справ.: в 2 кн. Кн. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. / под ред. М.Е. Дрица – М.: Металлургия, 1997. – 432 с.

8. Ландау Л.Д., Лившиц И.М. Электродинамика сплошных сред – М.: Наука, 1982. – 620 с.

9. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic field / D.V. Lyubimov [et al.] // J. Fluid Mech. – 2009. – Vol. 635 – P. 297–319.

10. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: справ. пособие. – М.: Энергоатомиздат. – 1990. – 367 с.

References

1. Hripchenko S.Ju. [et al.] Kristallizacija cilindricheskiih aljuminievykh slitkov pri MGD-peremeshivanii [The Crystallization of Cylindrical Aluminum Ingots under MHD-sreering]. *Tezisy dokladov Rossijskoy konferentsii po magnitnoy gidrodinamike*: Perm, 18–22 iyunja 2012. Perm: Institut mekhaniki sploshnykh sred. Ural'skoe otdelenie Rossiyskoy akademii nauk, 2012, pp. 101.

2. Lyubimova T.P. [et al.] Numerical Investigation of Dynamic Magnetic Field Influence on Vertical Bridgman Crystal Growth. *Proc. of Int.*

Conf. «Advanced Problems in Thermal Convection». Perm, 2004, pp. 343-349.

3. Ljubimova T.P., Fajzrahmanova I.S. Chislennoe issledovanie vlijanija beguschego magnitnogo polja na teplomassoperenos v zhidkoj zone [Numerical modelling of the running magnetic field influence on heat and mass transfer in the liquid zone]. *Sbornik nauchnykh trudov «Gidrodinamika»*. Permskiy universitet, 2004, vol. 11, pp. 173-190.

4. Demin V.A., Makarov D.V. Vlijanie vrashhajushhegosja magnitnogo polja na rasplav v cilindricheskoj zhidkoj zone [The Rotating Magnetic Field Influence on the Melt in the Cylindrical Liquid Zone]. *Vestnik Permskogo universiteta, vypusk 1, Fizika*, 2004, pp. 106-111.

5. Tsaplin A.I. Teplofizika vneshnih vozdeystvij pri kristallizacii stal'nyh slitkov na mashinah nepreryvnogo lit'ja [Thermophysics of the External Influence at the Crystallization Steel Ingots in the Continuous Casting Machines]. Ekaterinburg: Uralskoe otdelenie RAN, 1995, 238 p.

6. Shjojden O., Leman A. Razrabotki v oblasti jelektromagnitnogo peremeshivaniya (JeMP) rasplava v pechah dlja plavki aljuminija [The Engineering in Field of Electromagnetic Steering (EMS) of Melt in Aluminum Casting Furnaces]. *Sbornik nauchnykh statej «Cvetnye metally Sibiri»*, Krasnojarsk: Verso, 2009, pp. 648-656.

7. Svoystva jelementov [The Elements Properties]: spravochnik. Ed. M.E. Drits. Moscow: Metallurgija, 1997, 432 p.

8. Landau L.D., Livshic I.M. Jelektrodinamika sploshnyh sred [Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow: Nauka, 1982, 620 p.

9. Lyubimov D.V. [et al.]. Stability of convection in a horizontal channel subjected to a longitudinal temperature gradient. Part 2. Effect of a magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 2009, vol. 635, pp. 297-319.

10. Kutateladze S.S. Teploperedacha i gidrodinamicheskoe soprotivlenie [The Thermotransfer and Hydrodynamic Resistance]. Moscow: Jenergoatomizdat, 1990, 367 p.

Об авторах

Никулин Илларион Леонидович (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: nil@mail.ru).

Перминов Анатолий Викторович (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: perminov1973@mail.ru).

About the authors

Nikulin Illarion Leonidovich (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Department of General Physics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: nil@mail.ru).

Perminov Anatoliy Victorovich (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Ass. Professor, Department of General Physics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: perminov1973@mail.ru).

Получено 4.03. 2013