

УДК 539.375.5, 51-72

**Н.В. Савельева<sup>1,2</sup>, Ю.В. Баяндин<sup>1</sup>, О.Б. Наймарк<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

## МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ОТКОЛА

Ранее авторами была предложена структурно-феноменологическая модель поведения материалов при ударно-волновом нагружении, основанная на статистико-термодинамическом описании среды с типичными мезоскопическими дефектами (микротрещинами и микросдвигами). Введены независимые структурные переменные: тензор плотности дефектов, ассоциируемый с деформацией, обусловленной дефектами, и параметр структурного скейлинга, зависящий от двух структурных масштабов – отношения характерного размера дефектов и расстояния между ними. Термодинамическое состояние системы описывается с использованием термодинамического потенциала (свободной энергии Гельмгольца, зависящей также от введенных структурных переменных). В представленной работе была модифицирована ранее предложенная модель плоского соударения пластин на основе уравнений, описывающих эволюцию объемных и сдвиговых дефектов с учетом критерия разрушения, соответствующего достижению объемной доли дефектов заданного критического значения. Сформулированная краевая задача плоского ударно-волнового нагружения решалась численно в пакете прикладных программ MatLab с использованием метода конечных разностей и многошагового интегрирования по времени с автоматическим выбором шага. Верификация разработанной модели проводилась по экспериментально полученным профилям скорости свободной поверхности образца ванадия при давлениях 6 ГПа. Сравнение численных результатов с экспериментом показало удовлетворительное соответствие. Модельное определение откольной прочности ванадия позволило установить зависимость роста последней от величины внешнего воздействия.

**Ключевые слова:** ударно-волновое нагружение, откол, дефекты.

**N.V. Savelieva<sup>1,2</sup>, Bayandin Yu.V.<sup>1</sup>, Naimark O.B.<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation<sup>2</sup>Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## MODEL FOR THE SPALLING FORMATION

In the earlier works of authors there was proposed the structural-phenomenological model of the materials behavior under shock-wave loading, based on the statistical-thermodynamic description of the medium with the typical mesoscopic defects (microcracks and microspheres). The independent structural variables: the defect density tensor associated with the strain due to the defects and the structural scaling parameter that depends on two structural scales, ratio of the characteristic defect size and the distance between them are introduced in the model. The thermodynamic state of the system is described using the thermodynamic potential (Helmholtz free energy, which depends on the introduced structural variables). In the present study there was modified the earlier proposed model of a plate plane collision on the basis of the equations describing the evolution of the bulk and shear defects with the failure criterion and up to a volume fraction of defects in a given critical value. Formulated boundary problem of planar shock wave loading was solved numerically in the application package MATLAB using the finite

difference method and the multi-step time integration with the automatic step selection. Verification of the model was carried out on the experimentally obtained free-surface velocity profiles of vanadium sample at pressures of 6 GPa. Comparison of numerical results with the experimental data shows a good agreement. Model identification of the vanadium spall strength made it possible to establish the dependence between the spall strength growth and the external influence.

**Keywords:** shock-wave loading, spall failure, defects

## **Введение**

Целью исследования реакции материалов на высокоскоростное нагружение является изучение основных механизмов деформирования и формулировка определяющих соотношений, которые позволяют адекватно описывать поведение при интенсивных воздействиях. Базовыми применительно к широкому спектру материалов являются плосковолновые эксперименты по ударному сжатию (соударение двух пластин) [1–4]. В ходе эксперимента в пластинах генерируется ударная волна (волна сжатия), при достижении свободной поверхности она отражается и переходит в волну растяжения. В области наиболее интенсивных растягивающих напряжений, возникающих в результате взаимодействия встречных волн разрежения, реализуется многомасштабная кинетика роста дефектов, нарушается сплошность материала, что приводит к явлению откола. Закономерности формирования ударно-волнового фронта и кинетики разрушения в процессе нагружения регистрируются при измерении профиля скорости свободной поверхности с помощью системы VISAR.

Современные возможности программных комплексов и пакетов прикладных программ позволяют реализовать вычислительный эксперимент с учетом особенностей поведения материала в широком интервале скоростей нагружения, что обеспечивает верификацию моделей и прогнозирование поведения материала в реальных условиях. Ударно-волновое нагружение характеризуется большими амплитудами, малыми временами воздействия и интенсивной кинетикой роста на масштабах нарастания волнового фронта. Это приводит к резкой локализации деформации и поврежденности в достаточно узкой области за малый промежуток времени. Механические свойства и особенности разрушения материалов при ударно-волновом воздействии существенно отличаются от наблюдаемых при квазистатическом нагружении, что объясняется близостью характерных времен механической и структурной релаксации, обусловленной нелинейной многомасштабной кинетикой развития дефектов [1, 5–7].

В работе построена математическая модель поведения твердого тела, позволяющая реализовать описание отклика материала на ударно-волновое нагружение на различных масштабных уровнях на основе

введения переменных, отражающих эволюцию дефектной структуры материала и имеющих тензорный характер. Описание активационных механизмов, соответствующих различным скоростям нагружения, также играет ключевую роль при моделировании.

Исследование ограничивается поведением металлов под действием умеренных нагрузок ( $\leq 10$  ГПа).

### 1. Статистико-термодинамический подход

В работе при моделировании были использованы результаты статистико-термодинамического подхода и развитая на его основе структурно-феноменологическая модель [8], учитывающая кинетику роста мезоскопических дефектов (микротрещин и микросдвигов) и влияние последней на релаксационные свойства и развитие разрушения.

Термодинамическое состояние системы описывается с помощью термодинамического потенциала (свободной энергии Гельмгольца), который зависит от переменных, характеризующих дефектную структуру материала: тензора плотности дефектов (деформации, обусловленной дефектами) и параметра структурного скейлинга. Нелинейная кинетика развития дефектов описывается системой эволюционных уравнений для введенных структурных переменных, что позволяет объяснить различные стадии дисперсного накопления мезоскопических дефектов (поврежденности), локализацию разрушения, влияние на релаксационные свойства.

### 2. Математическая модель

Рассматривается задача соударения двух пластин в приближении плоского удара [9]. Система дифференциальных уравнений включает уравнение движения (1); уравнение неразрывности (2); условие аддитивности упругой, пластической и структурной деформации (3) (в предположении малости деформации); представления тензоров напряжений и деформации, обусловленной дефектами, как суммы шаровой (индекс  $s$ ) и девиаторной (индекс  $d$ ) частей (соотношения (4) и (5)); закон Гука в скоростной форме (6); кинетические уравнения для введенных структурных переменных (7)–(9) (записанных с учетом условий Онзагера (10)):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_d, \quad (4)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_d, \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \mathbf{I}_1(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) + 2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = A_1\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_2\dot{\mathbf{p}}, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}} = A_3\dot{\mathbf{p}} - A_2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} = A_4\dot{\delta}, \quad (9)$$

$$A_1A_3 - A_2^2 > 0, \quad A_i > 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (10)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – напряжение;  $\boldsymbol{\sigma}_s$  и  $\boldsymbol{\sigma}_d$  – его шаровая и девиаторная составляющие соответственно;  $\mathbf{u}$  – перемещение;  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{V}$  – скорость;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – полная деформация;  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  – упругая деформация;  $\mathbf{p}$  – деформация обусловленная дефектами;  $\mathbf{p}_s$  и  $\mathbf{p}_d$  его шаровая (объемная плотность дефектов) и девиаторная части;  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  – пластическая деформация;  $\mathbf{I}_1(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)$  – первый инвариант скорости упругой деформации;  $\lambda$  и  $G$  – первый и второй параметры Ламе;  $\mathbf{F}$  – свободная энергия Гельмгольца (термодинамический потенциал);  $\delta$  – параметр структурного скейлинга;  $A_i$  – кинетические коэффициенты, которые в общем виде могут зависеть от всех термодинамических параметров.

Разбиение тензоров напряжения и деформации, обусловленной дефектами, на шаровую и девиаторную части позволяет учесть вклад каждой из составляющих в процесс деформирования. Откольное разрушение формируется при интенсивных растягивающих напряжениях, которые генерируют образование дефектов преимущественно объемного типа. Эта гипотеза позволяет сформулировать критерий в рамках разработанной модели.

Ранее в работе [10] был приведен вид аппроксимации свободной энергии и получены кинетические уравнения для шаровой и девиаторной частей тензора плотности дефектов. Показано, что кинетика роста дефектов приобретает лавинообразный характер (режим с обострением) по достижении критического значения объемной плотности

дефектов, что является предвестником формирования очага макроскопического разрушения.

После преобразования и введения безразмерных переменных соотношения (1) – (10) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Sigma_d}{\partial \tau} &= \frac{2}{3} k_1 \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \xi} - \Gamma_\sigma \frac{\Sigma_d}{\sigma_{cd}} - k_1 \frac{\partial \eta_d}{\partial \tau} - k_1 \frac{\partial \eta_s}{\partial \tau}, \\
 \frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} &= \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \xi} - k_2 \Gamma_\sigma \frac{\Sigma_d}{\sigma_{cd}} - \frac{\partial \eta_d}{\partial \tau} - \frac{\partial \eta_s}{\partial \tau}, \\
 \frac{\partial \eta_d}{\partial \tau} &= \Gamma_{pd} \left( \frac{1}{\delta_d} \left( \frac{\eta_d}{p_{cd}} + k_2 \frac{\Sigma_d}{\sigma_{cd}} \right) - \left( \frac{\eta_d}{p_{cd}} + f \left( \frac{\eta_d}{p_{cd}} \right) \right) \right), \\
 \frac{\partial \eta_s}{\partial \tau} &= \Gamma_{ps} \left( \frac{1}{\delta_s} \left( \frac{\eta_s}{p_{cs}} + k_2 \frac{(\Sigma - \Sigma_d)}{\sigma_{cs}} \right) - \left( \frac{\eta_s}{p_{cs}} + f \left( \frac{\eta_s}{p_{cs}} \right) \right) \right), \\
 \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial \tau} &= k_2 \Gamma_\sigma \frac{\Sigma_d}{\sigma_{cd}}, \\
 \frac{\partial \delta_d}{\partial \tau} &= \Gamma_{\delta d} \left( \frac{1}{\delta_d^2} \left( 0.5 \left( \frac{\eta_d}{p_{cd}} \right)^2 + k_2 \frac{\Sigma_d \eta_d}{\sigma_{cd} p_{cd}} \right) \right), \\
 \frac{\partial \delta_s}{\partial \tau} &= \Gamma_{\delta s} \left( \frac{1}{\delta_s^2} \left( 0.5 \left( \frac{\eta_s}{p_{cs}} \right)^2 + k_2 \frac{(\Sigma - \Sigma_d) \eta_s}{\sigma_{cs} p_{cs}} \right) \right), \\
 \frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \xi} \widehat{\rho}^2, \\
 \frac{\partial \widehat{V}}{\partial \tau} &= \frac{1}{\widehat{\rho}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi}, \\
 k_1 &= \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad k_2 = \frac{1}{k_1}, \\
 \eta_s &\geq p_{cs}.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Обезразмеривание проводилось согласно соотношениям

$$\begin{aligned}\sigma_d &= M\Sigma_d; \quad \sigma_s = K\Sigma_s, \\ \sigma &= M\Sigma; \quad p_d = \eta_d; \quad p_s = \eta_s, \\ V &= C_l\widehat{V}; \quad x = h\xi, \\ t &= \tau_h\tau; \quad \rho = \rho_0\widehat{\rho},\end{aligned}\tag{12}$$

где  $M$  – продольный модуль упругости, равный  $\lambda + 2G$ ;  $K$  – объемный модуль упругости;  $C_l$  – продольная скорость звука;  $h$  – толщина образца;  $\tau_h = \frac{h}{C_l}$ ;  $\rho_0$  – начальная плотность;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Кинетические параметры имеют вид [9]

$$\Gamma_\sigma = \frac{\tau_h}{\tau_\sigma}; \quad \Gamma_{pd} = \frac{\tau_h}{\tau_{pd}}; \quad \Gamma_{ps} = \frac{\tau_h}{\tau_{ps}}; \quad \Gamma_{\delta d} = \frac{\tau_h}{\tau_{\delta d}}; \quad \Gamma_{\delta s} = \frac{\tau_h}{\tau_{\delta s}},$$

где  $\tau_\sigma, \tau_{pd}, \tau_{ps}, \tau_{\delta d}, \tau_{\delta s}$  связаны с коэффициентами  $A_i$ .

Система уравнений (11) была решена численно в пакете прикладных программ MatLab. В основе алгоритма, реализующего решение дифференциального уравнения параболического типа, лежат метод конечных разностей и многошаговый метод интегрирования по времени с автоматическим выбором шага. Для определения параметров модели в работе [11] была разработана процедура идентификации, которая основана на решении задачи минимизации невязки численных и экспериментальных данных при динамическом нагружении.

### 3. Результаты

В результате решения системы уравнений (11) были построены профили скорости свободной поверхности для ванадия для различной величины прикладываемого нагружения (рис. 1), параметры модели были найдены в работе [9].

В результате расчетов было показано, что модель описывает характерные для данного типа нагружения профили. На рисунке можно четко проследить формирование упругого предвестника и пластического фронта, формирование откольного импульса и реверберацию волн в откольной пластине.

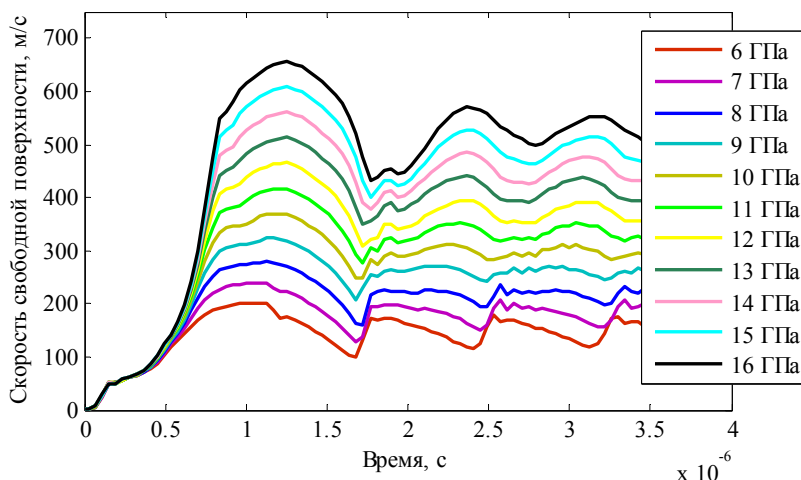


Рис. 1. Профили скорости свободной поверхности для ванадия для различной величины прикладываемого напряжения (6–16 ГПа)

Расчеты показали, что в исследуемом диапазоне давлений амплитуда упругого предвестника остается постоянной. При этом откольная прочность, которая определяется как разность между амплитудой пластического фронта и минимумом скорости в откольном импульсе, при изменении скорости меняется (рис. 2). Рост откольной прочности при увеличении внешних напряжений имеет двухстадийный характер.

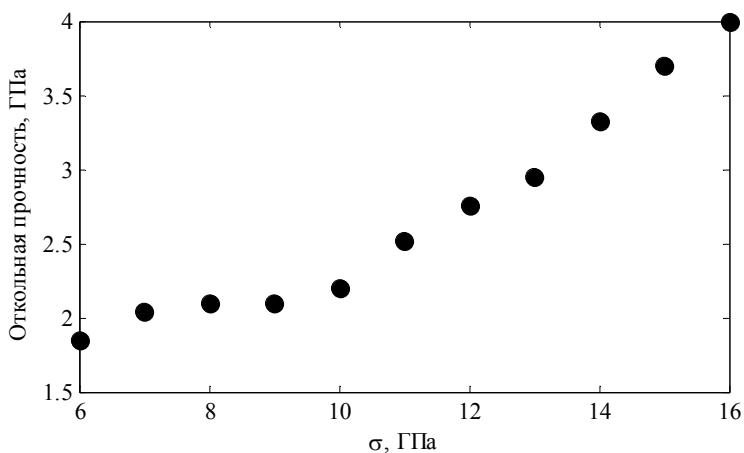


Рис. 2. Зависимость откольной прочности от величины прикладываемого напряжения

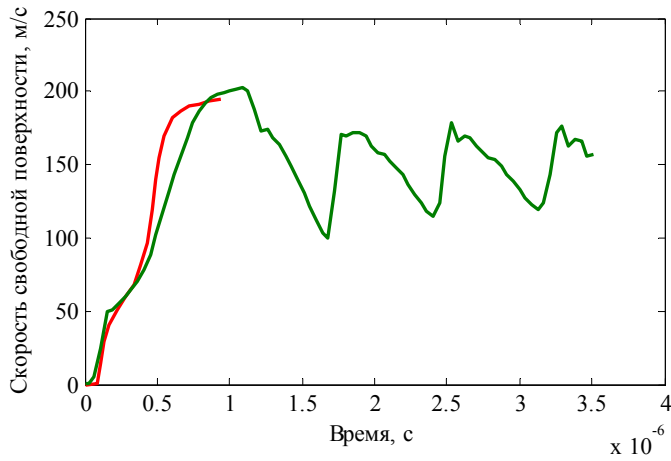


Рис. 3. Профиль скорости свободной поверхности для ванадия: красная линия – эксперимент, зеленая – численный расчет

На рис. 3 показано сравнение численного расчета и экспериментальных данных. В опыте на ударно-волновое нагружение ванадия [12] откольный импульс не регистрировался, поэтому проводилось сравнение только ударно-волнового фронта. Соответствие можно признать удовлетворительным.

#### 4. Обсуждение результатов

Результат представленных расчетов свидетельствует об удовлетворительном описании исследуемого процесса разрабатываемой моделью. Профиль скорости свободной поверхности соответствует типичному для данного типа нагружения. Построенные профили на рис. 1 выявили слабую зависимость величины предела упругости Гюгонио от скорости нагружения. Такая реакция материала (в данном случае ванадия) наблюдается в широком интервале скоростей нагружения. В рамках построенной модели это можно связать с близостью между характерным временем нагружения и временем ориентационного перехода, который определяется скачком деформации, обусловленной дефектами в конечном интервале напряжений. При слабой зависимости величины упругого предвестника от скорости нагружения этот интервал имеет малую ширину.



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31504 мол\_а) и программы Президиума РАН (проект №12-П-1-1021).

### **Библиографический список**

1. Ударно-волновые явления в конденсированных средах / Г.И. Каннель, С.В. Разоренов, Л.В. Уткин, В.Е. Фортгов. – М.: Янус-К, 1996. – 408 с.

2. Гаркушин Г.В., Каннель Г.И., Разоренов С.В. Сопротивление деформированию и разрушению алюминия AD1 в условиях ударно-волнового нагружения при температурах 20 и 600°C // Физика твердого тела. – 2010. – Вып. 11. – Т. 52. – С. 2216–2222.

3. О механизмах микро- макроэнергообмена при ударном нагружении твердых тел / Ю.И. Мещеряков, А.К. Диваков, Н.И. Жигачева, И.П. Макаревич, С.Ю. Мушникова, Г.Ю. Калинин // Письма в ЖТФ. – 2010. – Вып. 11. – Т. 36. – С. 54–60.

4. Влияние предварительного деформационного упрочнения на напряжение течения при ударном сжатии титана и титанового сплава / С.В. Разоренов, А.С. Савиных, Е.Б. Зарецкий, Г.И. Каннель, Ю.Р. Колобов // Физика твердого тела. – 2005. – Вып. 4. – Т. 47. – С. 639–645.

5. Bo Ren, Shaofan Li, Jing Qian, Xiaowei Zeng. Meshfree simulation of spall fracture // Computer method in applied mechanics and engineering. – 2011. – Vol. 200. – P. 797–811.

6. Danian Chen, S.T.S. Al-Hassani, M.Sarumi, Xiaogang Jin. Crack straining-based spall model // International Journal of Impact Engineering. – 1997. – Vol. 19. – No. 2. – P. 107–116.

7. A modified Cochran-Banner spall model / Chen Danian, Yu Yuying, Yin Zhihua, Wang Huanran, Liu Guoqing, Xie Shugang // International Journal of Impact Engineering. – 2005. – Vol. 31. – P. 1106–1118.

8. Наймарк О.Б. Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения // Физ. мезомех. – 2003. – Т. 6, № 4. – С. 45–72.

9. Савельева Н.В., Баяндин Ю.В., Наймарк О.Б. Численное моделирование деформирования и разрушения металлов в условиях плоского удара // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 300–307.

10. Баяндин Ю.В. Исследование автомодельных закономерностей формирования пластических фронтов в металлах при интенсивных воздействиях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь. 2007. – 119 с.

11. Баяндин Ю.В., Наймарк О.Б., Уваров С.В. Структурно-скейлинговые переходы при динамических и ударно-волновых нагрузках в твердых телах // Физика экстремальных состояний вещества – 2008. – Черноголовка, 2008. – С. 122–124.

12. Tonks D.L. The DataShop: a Database of Weak-Shock Constitutive Data. – LosAlamos, New Mexico, 1991. – 135 p

### References

1. Kanel G.I., Razorenov S.V., Utkin L.V., Fortov V.E. Udarno-volnovye yavleniya v kondensirovannykh sredakh [Shock-wave phenomena in condensed matter]. Moscow: Yanus-K, 1996. 408 p.

2. Garkuschin G.V., Kanel G.I., Razorenov S.V. Soprotivlenie deformirovaniyu i razrusheniyu alyuminiya AD1 v usloviyakh udarno-volnovogo nagruzheniya pri temperaturax 20 i 600°C [Resistance to deformation and fracture of aluminum AD1 under shock-wave loading at 20 and 600°C]. *Fizika tverdogo tela*, 2010, iss. 11, vol. 52, pp. 2216-2222.

3. Mescheryakov Yu.I., Divakov A.K., Gigacheva N.I., Makarevich I.P., Muschnikova S.Yu., Kalinin G.Yu. O mexanizmax mikro-makro e'nergoobmena pri udarnom nagruzhenii tverdykh tel [On the mechanisms of micro-macro of energy under impact loading of solids]. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2010, iss. 11, vol. 36, pp. 54-60.

4. Razorenov S.V., Savinych A.S., Zaretskiy E.B., Kanel G.I., Kolobov Yu.R. Vliyanie predvaritel'nogo deformacionnogo uprochneniya na napryazhenie techeniya pri udarnom szhatii titana i titanovogo splava [The influence of strain hardening prior to the flow stress by shock compression of titanium and titanium alloy]. *Fizika tverdogo tela*, 2005, iss. 4, vol. 47, pp. 639-645.

5. Bo Ren, Shaofan Li, Jing Qian, Xiaowei Zeng. Meshfree simulation of spall fracture. *Computer method in applied mechanics and engineering*, 2011, vol. 200, pp. 797-811.

6. Danian Chen, S.T.S. Al-Hassani, M.Sarumi, Xiaogang Jin. Crack straining-based spall model. *International Journal of Impact Engineering*, 1997, vol. 19, no.2, pp. 107-116.

7. Chen Danian, Yu Yuying, Yin Zhihua, Wang Huanran, Liu Guoqing, Xie Shugang. A modified Cochran-Banner spall model. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, vol. 31, pp. 1106-1118.

8. Naimark O.B. Kollektivnye svoystva ansamblej defektov i nekotorye nelinejnye problemy plastichnosti i razrusheniya [Collective properties of ensembles of defects and some nonlinear problems of plasticity and fracture] *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2003, vol. 6, iss. 4, pp. 45-72.

9. Saveleva S.V., Bayandin Yu.V., Naimark O.B. Chislennoe modelirovanie deformirovaniya i razrusheniya metallov v usloviyax ploskogo udara [Numerical simulation of deformation and fracture of metals under plane shock wave loading]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 300-307.

10. Bayandin Yu.V. Issledovanie avtomodel'nykh zakonomernostej formirovaniya plasticheskikh frontov v metallakh pri intensivnykh vozdeystviyakh [Investigation of self-similar regularities of formation of plastic fronts in metals in the intensity of the impact]: PhD thesis. Thesis of doctors degree dissertation, Perm, 2007, 119 p.

11. Bayandin Yu.V., Naimark O.B., Uvarov S.V. Strukturno-skejlningovye perekhody pri dinamicheskikh i udarno-volnovykh nagruzkakh v tverdykh telakh [Structural-scaling transitions in dynamic and shock waves in solids loadings]. *Fizika e'kstremal'nykh sostoyanij veshhestva – 2008*. Chernogolovka, 2008, pp. 122-124.

12. Tonks D.L. The DataShop: a Database of Weak-Shock Constitutive Data. LosAlamos, New Mexico, 1991, 135 p.

### Об авторах

**Савельева Наталья Владимировна** (Пермь, Россия) – аспирантка кафедры математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29), инженер-исследователь Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: saveleva@icmm.ru).

**Баяндин Юрий Витальевич** (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: buv@icmm.ru).

**Наймарк Олег Борисович** (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: [naimark@icmm.ru](mailto:naimark@icmm.ru)).

#### **About the authors**

**Savelieva Natalia Vladimirovna** (Perm, Russian Federation) – post-graduate student, Department of Mathematical Modeling of Systems and Processes, of Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation), research engineer ICMM UB RAS (1, Akademic Korolev st., 614013, Perm, e-mail: [saveleva@icmm.ru](mailto:saveleva@icmm.ru)).

**Bayandin Yuriy Vitalievich** (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, scientist ICMM UB RAS (1, Akademic Korolev st., 614013, Russian Federation, Perm, e-mail: [buv@icmm.ru](mailto:buv@icmm.ru)).

**Naimark Oleg Borisovich** (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, laboratory's head of ICMM UB RAS (1, Akademic Korolev st., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: [naimark@icmm.ru](mailto:naimark@icmm.ru)).

Получено 06.08.2013