ISSN 1812-5123. Российский журнал биомеханики. 2013. Т. 17, № 2 (60): 31–38

УДК 531/534: [57+61]

# ОБЛАСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЗУБА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА

**М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин, М.Ю. Няшин, А.Л. Дубинин**

Кафедра теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

**Аннотация.** Рассматривается малое мгновенное перемещение зуба под действием системы сил. Прямая линия называется прямой поступательного воздействия, если при нагружении зуба одной силой, расположенной на этой прямой, он перемещается поступательно. Центром сопротивления зуба называется точка, имеющая следующие свойства: всякая прямая поступательного воздействия проходит через эту точку и всякая прямая, проходящая через эту точку, является прямой поступательного воздействия. Центр сопротивления существует лишь в исключительном случае. Вводится понятие области сопротивления зуба, обобщающее понятие центра сопротивления. Такой областью называется область минимального диаметра, имеющая следующие свойства: всякая прямая поступательного воздействия проходит через эту область и через всякую точку этой области проходит прямая поступательного воздействия. Показано, что область сопротивления существует в ряде случаев отсутствия центра сопротивления и может быть эллипсом, двумя точками и одной точкой. Проведена классификация зубов по виду множества прямых поступательного воздействия. Введено понятие оси поворота парой; так называется прямая, если существует пара сил, при нагружении зуба которой он поворачивается вокруг этой прямой. Исследованы множества таких осей для различных типов зубов. Установлено, что существует тесная связь между множествами прямых поступательного воздействия и осей поворота парой. Введено понятие центра сопротивления зуба в плоскости.

**Ключевые слова:** зубочелюстная система, малое перемещение зуба, центр сопротивления, область сопротивления, классификация зубов.

## Введение

В литературе по биомеханике зубочелюстной системы встречается понятие центра сопротивления зуба. Обычно центр сопротивления определяется как точка, приложение силы в которой приводит к поступательному перемещению зуба [2, 3, 5, 6]. Иногда упоминается следующее свойство центра сопротивления: приложение к зубу пары сил приводит к вращению зуба вокруг центра сопротивления [4, 6]. В работах [1, 7] рассматриваются даже несколько центров сопротивления – по отношению к различным поступательным перемещениям и поворотам. Наиболее строго понятие центра сопротивления зуба введено в статье [8] (см. ниже). Там же установлено, что центр сопротивления существует только в исключительном случае. Поэтому представляет интерес вопрос о возможности обобщения понятия центра сопротивления зуба так, чтобы объект, задаваемый более общим определением, существовал в большем числе случаев и



Осипенко Михаил Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической механики, Пермь
Няшин Юрий Иванович, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой теоретической механики, Пермь
Няшин Михаил Юрьевич, к.ф.-м.н, доцент кафедры теоретической механики, Пермь
Дубинин Алексей Лаврентьевич, аспирант кафедры теоретической механики, Пермь

при этом сохранял основные свойства центра сопротивления. В настоящей работе предложено соответствующее обобщение, которое приводит к определению понятия *области сопротивления* зуба как множества точек. Исследованы некоторые свойства этой области и предложена классификация зубов по виду области сопротивления.

## Модель зуба. Прямые поступательного воздействия, оси поворота парой и центр сопротивления

Используем модель зуба, предложенную в работе [8]. В этой модели зуб представляет собой абсолютно твердое тело, частично погруженное в линейно-упругую среду (периодонт). Зуб нагружен системой сил, под действием которых он совершает (мгновенное) малое перемещение (рис. 1). Пусть $\mathbf{R}$ – главный вектор системы сил; $\mathbf{M}$ – главный момент системы сил относительно некоторого полюса; $\boldsymbol{\rho}$ – перемещение полюса; $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор малого поворота зуба. Тогда, вследствие линейной упругости среды,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\gamma} \\ \hat{\gamma}^{\mathrm{T}} & \hat{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матрицы $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ определяются формой корня зуба, упругими свойствами периодонта и положением полюса; при этом матрица (1) и, следовательно, матрицы $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ симметричны и положительно определены. Перемещение точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} . \tag{2}$$

Ввиду малости перемещений компоненты всех содержащихся в (1)–(2) векторов и матриц в отсчетном и актуальном положениях не различаются.

Назовем прямую *прямой поступательного воздействия*, если при нагружении зуба одной силой, расположенной на этой прямой, он перемещается поступательно (не обязательно в направлении действия силы, рис. 2).

Назовем прямую *осью поворота парой*, если существует пара сил (не обязательно перпендикулярная этой прямой), при нагружении зуба которой он поворачивается вокруг этой прямой (рис. 3).

Назовем точку *центром сопротивления зуба*, если она имеет следующие свойства: всякая прямая поступательного воздействия проходит через эту точку и всякая прямая, проходящая через эту точку, является прямой поступательного воздействия (рис. 4).

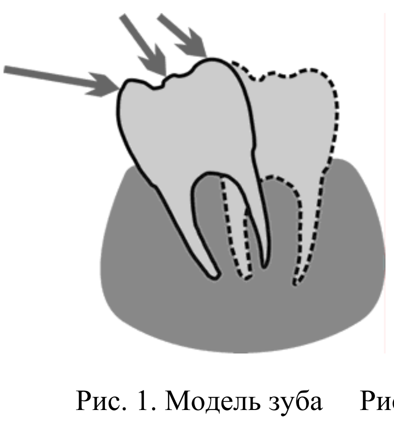


Рис. 1. Модель зуба

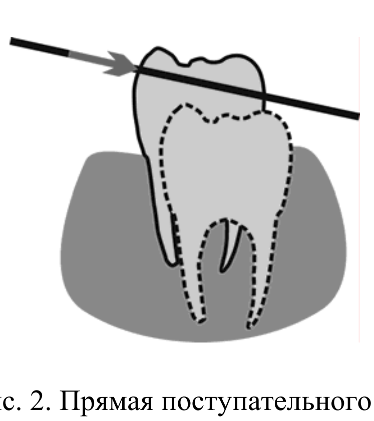


Рис. 2. Прямая поступательного воздействия

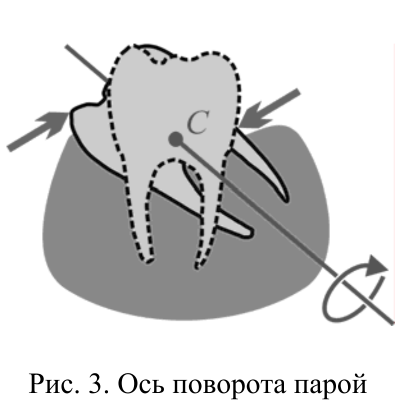



Рис. 3. Ось поворота парой

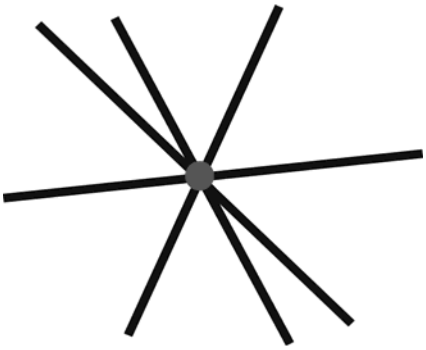


Рис. 4. Центр сопротивления зуба

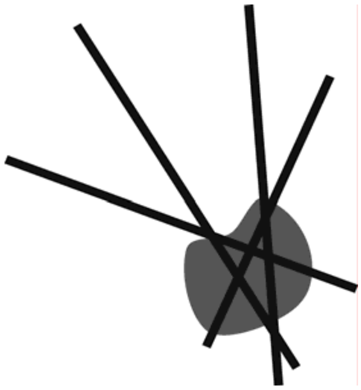


Рис. 5. Область сопротивления зуба

Пусть $\hat{\delta}$ – симметричная часть матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$; $\hat{\varepsilon}$ – антисимметричная часть матрицы $\hat{\gamma}\hat{\beta}^{-1}$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор, соответствующий матрице $\hat{\varepsilon}$ ($\hat{\varepsilon}\mathbf{V} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{V}$ для любого вектора $\mathbf{V}$). Справедливы следующие утверждения: 1) *центр сопротивления существует, если и только если* $\hat{\delta} = 0$ *его координаты суть компоненты вектора* $\boldsymbol{\varepsilon}$; 2) *если существует центр сопротивления, то любая прямая, проходящая через этот центр, является осью поворота парой и любая ось поворота парой проходит через этот центр.* Действительно, пусть $\mathbf{F}$ – вектор приложенной к зубу силы, а $\mathbf{r}_\mathbf{F}$ – радиус-вектор точки приложения этой силы; тогда из (1) и определений матриц $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$ следует, что

$$\boldsymbol{\varphi} = \hat{\beta}\left(\hat{\delta}\mathbf{F} + (\mathbf{r}_\mathbf{F} - \boldsymbol{\varepsilon})\times\mathbf{F}\right); \tag{3}$$

из этого равенства нетрудно вывести утверждение 1. Далее, пусть $\mathbf{M}$ – момент приложенной к зубу пары сил; тогда из (1)–(2) и определений матриц $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$ следует, что

$$\boldsymbol{\varphi} = \hat{\beta}\mathbf{M}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\varphi} = (\hat{\delta}\boldsymbol{\varphi})\cdot\boldsymbol{\varphi}, \tag{5}$$

$$\mathbf{u} = (\hat{\delta} + \hat{\varepsilon})\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r}\times\boldsymbol{\varphi}; \tag{6}$$

из (4)–(6) нетрудно вывести утверждение 2.

## Область сопротивления зуба. Классификация зубов

Если $\hat{\delta} \neq 0$, то центра сопротивления не существует. Однако прямые поступательного воздействия могут существовать. Поэтому естественно предложить следующее понятие, обобщающее понятие центра сопротивления. Назовем *областью сопротивления зуба* область минимального диаметра, имеющую следующие свойства: всякая прямая поступательного воздействия проходит через эту область и через всякую точку этой области проходит прямая поступательного воздействия (рис. 5).

Для исследования вида области сопротивления поместим полюс (начало системы координат) в точку, координаты которой суть компоненты вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, а оси системы координат направим по главным осям матрицы $\hat{\delta}$. Тогда из (3) следует, что условие $\boldsymbol{\varphi} = 0$ эквивалентно условию

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & -z & y \\ z & \delta_2 & -x \\ -y & x & \delta_3 \end{pmatrix}\mathbf{F} = 0, \tag{7}$$

где $\delta_i$ – собственные значения матрицы $\hat{\delta}$; $x$, $y$, $z$ – компоненты вектора $\mathbf{r}$. Приравнивая к нулю определитель матрицы (7), получаем уравнение поверхности

$$\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \delta_1 \delta_2 \delta_3 = 0. \tag{8}$$

Проводя через каждую точку поверхности (8) прямую вдоль собственного вектора матрицы (7), отвечающего нулевому собственному значению этой матрицы, получим множество прямых поступательного воздействия. Вид этого множества, определяющий вид области сопротивления, зависит от знаков чисел $\delta_i$; таким образом, приходим к некоторой классификации зубов:

1. Зуб типа $(+, +, +)$: все числа $\delta_i$ отличны от нуля и имеют одинаковый знак (набор знаков $(-, -, -)$ не дает нового типа, так как (8) не меняет вида при смене знаков всех $\delta_i$; этот факт используется и при дальнейшем обозначении типов). В этом случае поверхность (8) есть пустое множество; прямых поступательного воздействия и, следовательно, области сопротивления не существует. Имеется подтвержденная численным экспериментом гипотеза, что зуб такого типа невозможен, но теоретическое доказательство этой гипотезы авторам не известно.

2. Зуб типа $(+, +, -)$: все числа $\delta_i$ отличны от нуля, но имеют различные знаки. В этом случае поверхность (8) есть однополостный гиперболоид; прямые поступательного воздействия – одно из семейств прямолинейных образующих гиперболоида; область сопротивления – эллипс (рис. 6, *а*).

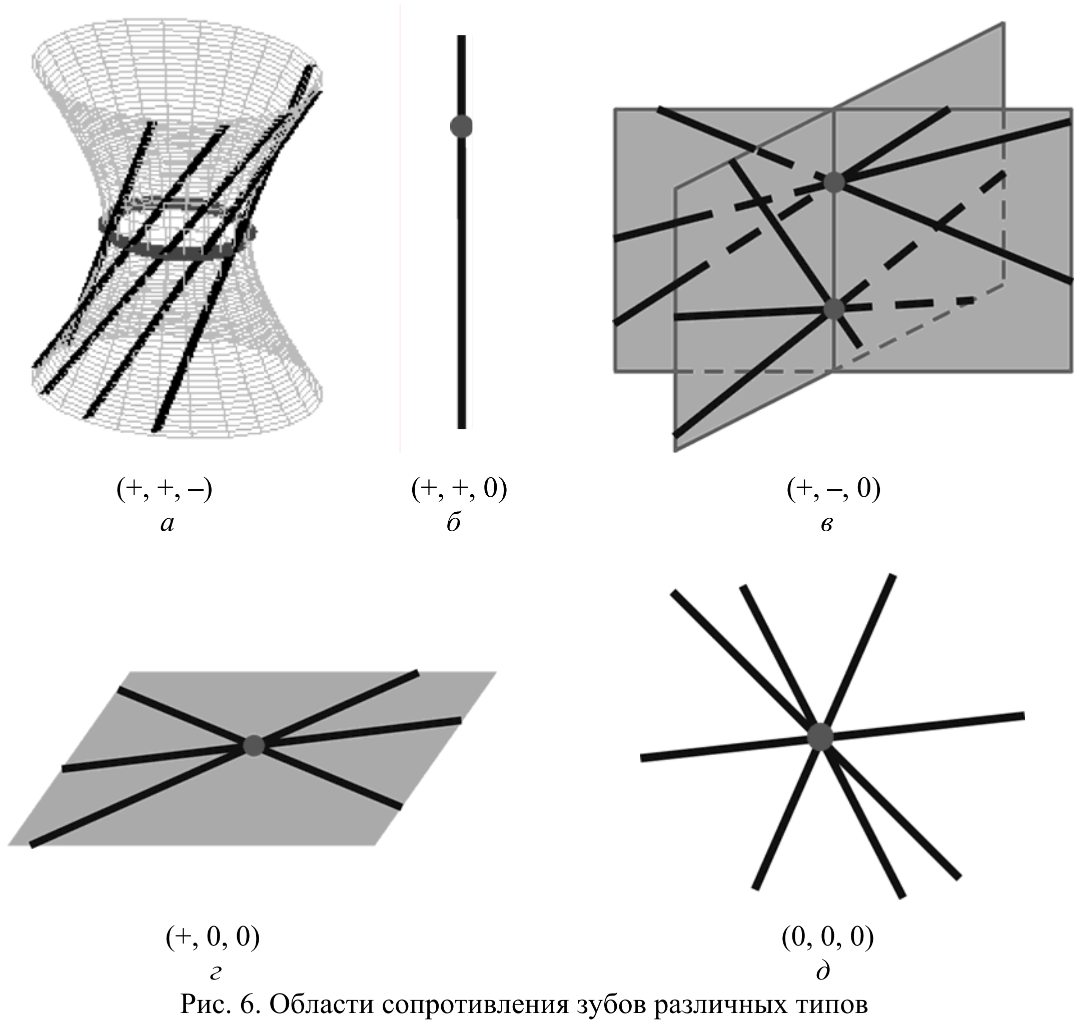



Рис. 6. Области сопротивления зубов различных типов

3. Зуб типа $(+, +, 0)$: одно из чисел $\delta_i$ равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют одинаковый знак. В этом случае поверхность (8) вырождается в прямую, которая есть единственная прямая поступательного воздействия. Область сопротивления – точка, определенная неоднозначно: можно взять любую точку указанной прямой (рис. 6, *б*).

4. Зуб типа $(+, -, 0)$: одно из чисел $\delta_i$ равно нулю, остальные отличны от нуля и имеют различные знаки. В этом случае поверхность (8) вырождается в две пересекающиеся плоскости. Прямые поступательного воздействия – два плоских пучка прямых, проходящих через две точки, лежащие на прямой пересечения указанных плоскостей. Эти две точки и являются областью сопротивления (рис. 6, *в*).

5. Зуб типа $(+, 0, 0)$: только одно из чисел $\delta_i$ отлично от нуля. В этом случае поверхность (8) вырождается в плоскость. Прямые поступательного воздействия – плоский пучок прямых, проходящих через одну точку. Эта точка и является областью сопротивления (рис. 6, *г*). Заметим, что центром сопротивления данная точка не является.

6. Зуб типа $(0, 0, 0)$: все числа $\delta_i$ равны нулю. В этом случае множество (8) есть все пространство. Прямые поступательного воздействия – пространственный пучок прямых, проходящих через одну точку. Эта точка и является областью сопротивления (рис. 6, *д*). В данном случае $\hat{\delta} = 0$ и существует центр сопротивления, который совпадает с областью сопротивления.

Типы зубов $(+, +, +)$ и $(+, +, -)$ представляют собой «общие» случаи, остальные типы – «вырожденные» случаи. Последние, вероятно, связаны с наличием у зуба элементов симметрии; изучение этой связи должно составить предмет дальнейшего исследования.

## Оси поворота парой для различных типов зубов

Пусть центра сопротивления не существует. Однако оси поворота парой могут существовать (не образуя пространственного пучка прямых, проходящих через одну точку). Поэтому представляет интерес исследование в этом случае множества осей поворота парой.

Условия поворота зуба вокруг оси с направлением $\boldsymbol{\varphi}$ имеют вид $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$, $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$. Если зуб нагружен парой сил, то первое условие следует из (4), а второе, с учетом (5), имеет вид $(\hat{\delta}\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$. Перейдем в уже применявшуюся выше специальную систему координат: ее начало расположено в точке, координаты которой суть компоненты вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, а оси направлены по главным осям матрицы $\hat{\delta}$. Тогда условия поворота принимают вид

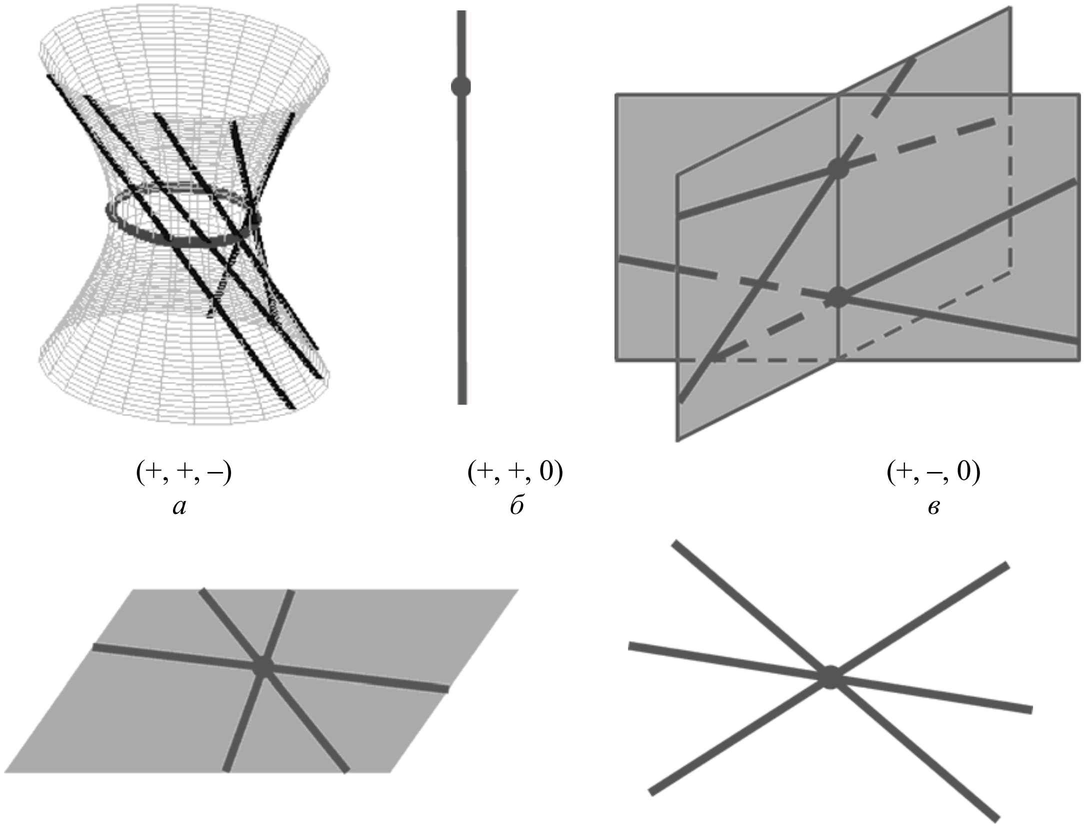
$$\boldsymbol{\varphi} \neq 0, \quad \delta_1 \varphi_x^2 + \delta_2 \varphi_y^2 + \delta_3 \varphi_z^2 = 0, \tag{9}$$

а из (6) и условия $\mathbf{u} = 0$ получаем уравнение оси поворота

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & z & -y \\ -z & \delta_2 & x \\ y & -x & \delta_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{10}$$

Далее рассмотрим отдельно каждый тип зубов:

1. Зуб типа $(+, +, +)$: соотношения (9) не имеют решений; осей поворота парой не существует.



(+, +, –) *а* (+, +, 0) *б* (+, –, 0) *в*

(+, 0, 0) *г* (0, 0, 0) *д*

Рис. 7. Оси поворота парой для зубов различных типов

2. Зуб типа $(+,+,-)$: уравнение (9) задает конус направлений; соответствующее множество осей поворота парой (10) представляет собой второе семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (образованного первым семейством – прямыми поступательного воздействия, рис. 7, *а*).

3. Зуб типа $(+,+,0)$: соотношения (9) дают только одно направление, вдоль которого расположена единственная ось поворота парой; она совпадает с единственной прямой поступательного воздействия (рис. 7, *б*).

4. Зуб типа $(+,-,0)$: соотношения (9) дают два семейства направлений, параллельных двум плоскостям. Соответствующее множество осей поворота парой (10) представляет собой два плоских пучка прямых, лежащих в тех же плоскостях, которые были образованы прямыми поступательного воздействия, и проходящих через те же две точки, из которых состояла область сопротивления (рис. 7, *в*). При этом оси поворота парой и прямые поступательного воздействия, проходящие через одну из точек области сопротивления, лежат в различных плоскостях (см. рис. 6, 7). Если плоскости, образованные осями поворота парой (или прямыми поступательного воздействия), взаимно перпендикулярны, то для зуба данного типа каждая из двух точек области сопротивления является *центром сопротивления в плоскости* в следующем смысле. Существуют плоскость и точка на ней, такие, что: 1) всякая прямая поступательного воздействия, лежащая в этой плоскости, проходит через эту точку и всякая прямая, проходящая через эту точку и лежащая в этой плоскости, является прямой поступательного воздействия; 2) существует пара сил (не обязательно лежащая в этой плоскости), при нагружении зуба которой он поворачивается вокруг прямой, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через эту точку.

5. Зуб типа $(+, 0, 0)$: соотношения (9) дают семейство направлений, параллельных некоторой плоскости. Соответствующее множество осей поворота парой (10) представляет собой плоский пучок прямых, лежащих в той же плоскости, которая была образована прямыми поступательного воздействия, и проходящих через ту же точку, которая представляла собой область сопротивления (рис. 7, *г*). Заметим, что эта точка не является центром сопротивления в плоскости в указанном выше смысле, так как для нее не выполнено свойство 2.

6. Зуб типа $(0, 0, 0)$: соотношение (9) допускает любые направления; соответствующее множество осей поворота парой (10) представляет собой пространственный пучок прямых, проходящих через существующий в данном случае центр сопротивления (рис. 7, *д*).

## Заключение

Для произвольного зуба центр сопротивления, определенный традиционным образом, существует не всегда, а только в исключительном случае. Введенная в настоящей работе область сопротивления зуба существует в ряде других случаев, является естественным обобщением центра сопротивления и сохраняет ряд свойств этого центра. Область сопротивления может быть эллипсом (общий случай), двумя точками или одной точкой (исключительные случаи). Проведена классификация зубов по виду множества прямых поступательного воздействия. Дальнейшие исследования могут быть направлены на установление связи исключительных видов области сопротивления с элементами симметрии зуба, а также на изучение свойств области сопротивления при нагружении зуба системой сил общего вида (динамой).

## Список литературы

1. Наумович Ю.В., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб – периодонт. Минск: Экономические технологии, 2000. – 132 с.
2. Bulcke M.M., Dermaut L.R., Sachdeva R.C.L., Burstone C.J. The center of resistance of anterior teeth during intrusion using the laser reflection technique and holographic interferometry // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 1986. – Vol. 90, No. 3. – P. 211–220.
3. Burstone C.J., Pryputniewicz R.J. Holographic determination of centers of rotation produced by orthodontic forces // American Journal of Orthodontics. – 1980. – Vol. 77, No. 4. – P. 396–409.
4. Christiansen R.L., Burstone C.J. Centers of rotation within the periodontal space // American Journal of Orthodontics. – 1969. – Vol. 55, No. 4. – P. 353–369.
5. Dermaut L.R., Kleutghen J.P.J., de Clerck H.J.J. Experimental determination of the center of resistance of the upper first molar in a macerated, dry human skull submitted to horizontal headgear traction // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 1986. – Vol. 90, No. 1. – P. 29–36.
6. Hocevar R.A. Understanding, planning, and managing tooth movement: orthodontic force system theory // American Journal of Orthodontics. – 1981. – Vol. 80, No. 5. – P. 457–477.
7. Nagerl H., Burstone C.J., Becker B., Kubein-Messenburg D. Centers of rotation with transverse forces: an experimental study // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 1991. – Vol. 90, No. 4. – P. 337–345.
8. Osipenko M.A., Nyashin M.Y., Nyashin Y.I. Centre of resistance and centre of rotation of a tooth: the definitions, condition of existence, properties // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3, No. 1. – P. 5–15.

# REGION OF RESISTANCE OF A TOOTH: THE DEFINITION AND THE PROPERTIES

**M.A. Osipenko, Yu.I. Nyashin, M.Yu. Nyashin, A.L. Dubinin (Perm, Russia)**

The small momentary displacement of a tooth under the action of force system is considered. The straight line is called the line of translational action if one force located on this line causes the pure translation of a tooth. The centre of resistance of a tooth is a point that possesses the following properties: any line of translational action passes through this point and any line that passes through this point is the line of translational action. The centre of resistance exists only in the exceptional case. The concept of the region of resistance of a tooth that generalizes the concept of the centre of resistance is introduced. The region of resistance is the region of minimum diameter that possesses the following properties: any line of translational action passes through this region and some line of translational action passes through any point of this region. It is shown that the region of resistance exists in some cases of the centre of resistance absence. The region of resistance can represent the ellipse, two points and one point. The classification of teeth according to the form of the lines of translational action set is carried out. The concept of the couple-produced rotation axis is introduced. The straight line is called in this way if there exists the force couple that produces the rotation of a tooth about this line. The form of the couple-produced rotation axes set is investigated for different teeth types. It is established that the sets of the lines of translational action and couple-produced rotation axes are in close association. The concept of the centre of resistance of a tooth in the plane is introduced.

**Key words:** dentoalveolar system, small displacement of a tooth, centre of resistance, region of resistance, classification of teeth.

*Получено 19 июня 2013*