УДК 534.14:532.582.81:539.215.9

Л.И. Блехман

Институт проблем машиноведения РАН и НПК «Механобр-техника»
Санкт-Петербург, Россия

ВИБРАЦИОННОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ И СЫПУЧЕЙ СРЕДЕ

Рассматривается твердое тело, вибрирующее в жидкости вблизи непроницаемой стенки перпендикулярно ее плоскости. Показано, что при этом возникает средняя сила, направленная от стенки перпендикулярно к ней, т.е. своеобразная подъемная сила; эта сила быстро возрастает при приближении тела к стенке. Получены выражения взвешивающей силы для тела вращения произвольной формы, в частности для плоского, выпуклого и вогнутого по направлению к стенке тела. Это позволяет сделать вывод о взвешивании вибрирующих тел с большей, чем жидкость, плотностью и определить высоту взвешивания. Результаты сопоставляются с закономерностями взаимодействия двух пульсирующих или вибрирующих тел, первоначально изученными К. Бъеркнесом и в дальнейшем другими исследователями, в том числе учеными пермской школы гидродинамики.

Как показывают эксперименты и натурные наблюдения, взвешивание возникает также при воздействии вибрации на тело, находящееся в сыпучей среде, что приводит к всплыванию тела, более плотного, чем сыпучая среда. Рассмотрен физический механизм этого явления, являющегося одним из проявлений эффекта сегрегации. Он отличается от механизма взвешивания тела в жидкости. Предполагаемая причина всплывания тяжелого тела в этом случае состоит в том, что сила сопротивления относительному движению тела в среде больше при его движении вглубь среды, чем в направлении свободной поверхности.

Рассмотрен случай, когда эффект возникает вследствие колебаний объема среды вблизи частицы.

В заключение ставится общая задача о поведении вибрирующих твердых и деформируемых тел вблизи границы раздела двух сред.

Результаты работы могут быть использованы в теории взвесенесущих турбулентных потоков, имеющей большое значение для приложений, теории вибрационных насосов, для объяснения и оценки величины изгиба пролетов трубопроводов, расположенных вблизи морского дна, а также для объяснения парадокса «непотопляемости» конкреций и необычного залегания горных пород, когда валуны выталкиваются к поверхности грунта.

Ключевые слова: вибрация, сыпучие среды, жидкости, взвешивание тела, эффект Бьеркнеса, сегрегация, выпучивание трубопроводов, парадокс «непотопляемости» конкреций, вибрационная плавучесть.

L.I. Blekhman

Institute of Problems in Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences
and Mechanobr-Tekhnika Research and Engineering Corporation,
St. Petersburg, Russian Federation

OSCILLATION-INDUCED SUSPENSION OF SOLIDS IN FLUID AND LOOSE MEDIA

The phenomenon under study is the behaviour of a solid body placed in some fluid adjacent to an opaque horizontal plane and oscillating perpendicular to the plane. In this condition a resultant force directed from that plane and normal to it was observed to arise. This force acts like a lifting force and tends to rapidly increase when approaching the plane. Expressions for the suspension force magnitude in relation to the plane have been derived for rotary bodies of arbitrary shape, in particular, flat, concave and convex ones. This provided possibility of assessing the height of suspension and suspending behaviour of oscillating bodies that are denser than the liquid. The inferences obtained were compared with the interaction order of two pulsing or vibrating bodies studied first by C. Bjerknes and later by other researchers, including those of the Perm Scientific School of Hydrodynamics.

As shown by experiments and routine observations the effect of suspension is likely to arise in a vibrating body placed in a dry loose medium, the effect causing upward motion of the body in spite of its being denser than the medium. The physical mechanism of such a phenomenon has been put under scrutiny. This mechanism, which is believed to be a peculiar form of the segregation effect, is different from that observed in fluid suspension.

The cause inducing a solid body to rise to the surface is supposed to be in that the resistance force impeding displacement of the solid body into the medium insides is greater than the force directed upwards toward the free surface.

A case study is described of the similar effect produced by a medium volume oscillating about the solid body.

In conclusion a general principle has been formulated on the behaviour of vibrating solid and strained bodies in the vicinity of their interfaces.

The research results may be used in the theoretical calculation of turbulent suspended flows, in the theory of vibrating pumps, in explanation and assessment of pipes span bulging, especially those laid on the see bottom, – they can explain also the paradoxical unsinkability of see concretions and mystical “push up“ of heavy rock boulders to the ground surface.

Keywords: vibration, loose media, fluids, suspension of a body, Bjerknes effect, segregation, buckling of pipes, concretion unsinkability paradox, vibrational buoyancy.

1. Всплывание вибрирующей пластинки в жидкости вблизи твердой стенки. Сила и высота взвешивания

Пусть круглая пластина радиусом R совершает гармонические колебания в безграничной жидкости перпендикулярно своей плоскости и твердой стенке по закону

$$y = h_0 + A \sin \omega t\,, \tag{1}$$

где A – амплитуда, а ω – частота колебаний (рис. 1, *а*). В нейтральном положении пластина удалена от стенки (дна) на расстояние h_0.

Задача о среднем давлении жидкости на пластину была рассмотрена А.И. Короткиным [1] в связи с теорией вибронасоса, предложенного Г.Я. Лишанским (а. с. СССР 706573 и 1222905). В работе [1] предполагалось наличие отверстия в стенке. Решение для системы (см. рис. 1, *а*), в которой отверстие отсутствует, получалось как частный случай найденного достаточно сложного решения.

Те же задачи более простым способом – с помощью метода прямого разделения движений – были рассмотрены в книге [2], причем получены аналогичные соотношения. Кратко это решение изложено в работе [3], где приведены также результаты экспериментов.

Здесь дается еще более простое решение, которое, однако, охватывает и более сложные случаи – случаи вращения тел произвольной формы, в частности выпуклого и вогнутого по направлению к стенке тела (рис. 1, *б*, *в*). Гидродинамический подход А.И. Короткина рассмотреть такие случаи не позволяет.

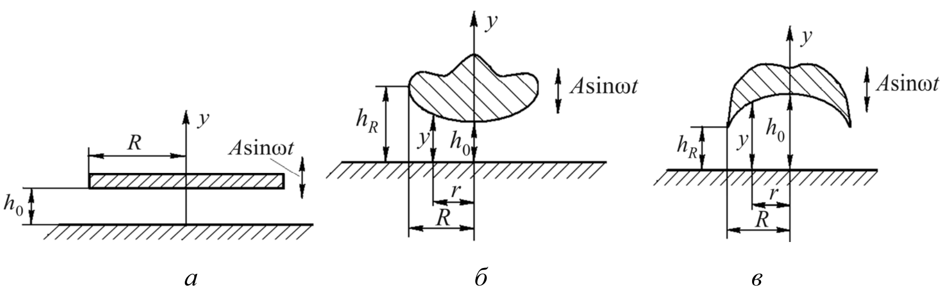


Рис. 1. Колебания тел в жидкости вблизи стенки: *а* – круглой пластины; *б* – тела с выпуклой поверхностью; *в* – тела с вогнутой поверхностью

Будем считать жидкость идеальной и несжимаемой, поток симметричным относительно оси y, а его радиальную скорость u_r не зависящей от координаты y. Можно ожидать, что последнее предположение будет справедливо на некотором удалении от оси y и при $h_0/R \ll 1$. В таких предположениях уравнение гидромеханики для скорости u_r будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{2}$$

где p – давление, а ρ – плотность жидкости.

К уравнению (2) следует присоединить условие сохранения объема при вибрации пластины

$$\left(h_0 + A\sin\omega t\right)\left(r+\eta\right)^2 = h_0 r^2 \tag{3}$$

или

$$\left(1+\frac{A}{h_0}\sin\omega t\right)\left(1+\frac{\eta}{r}\right)^2 = 1, \tag{4}$$

где η – радиальное смещение частиц жидкости при вибрации. Отсюда, считая, что выполняются соотношения

$$A/h_0 \ll 1 \text{ и } \eta/r \ll 1, \tag{5}$$

получим с точностью до малых первого порядка включительно

$$\eta = -Ar\sin\omega t/2h_0, \tag{6}$$

$$u_r = \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}t = -A\omega r\cos\omega t/2h_0. \tag{7}$$

Обозначим через $\langle u_r\rangle$ и $\langle p\rangle$ средние за период $T=2\pi/\omega$ значения скорости u_r и давления p:

$$\langle u_r\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} u_r \mathrm{d}t,\ \langle p\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} p\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Тогда, осреднив равенство (2) с учетом того, что $\langle u_r\rangle = 0$, и интегрируя по r, получим

$$\langle p\rangle + P_V - P_* = 0, \tag{9}$$

где

$$P_V = \frac{1}{2}\rho\langle u_r^2\rangle = \frac{1}{16}\rho\left(\frac{A\omega r}{h_0}\right)^2 \tag{10}$$

– величина, которая может быть названа вибрационным давлением, а P_* – постоянная интегрирования.

Постоянная P_* может быть определена из условия, что на определенном удалении от края диска, т.е. при $r=\kappa R$, давление выравнивается до статического значения вблизи дна сосуда P_0. Коэффициент κ можно рассматривать как эмпирический. В работе [1] предлагалось считать, что $\kappa = 1{,}4$. Здесь, учитывая результаты экспериментального исследования [3], примем $\kappa = 1$, т.е. будем считать, что давление выравнивается уже у края диска. Тогда согласно (9) находим

$$P_* = P_V\big|_{r=R} + P_0$$

и

$$\langle p\rangle = P_V\big|_{r=R} + P_0 - P_V\,. \tag{11}$$

Для диска, тонкого по сравнению с высотой слоя жидкости над ним, давление на его верхней части можно считать равным P_0, и тогда избыточное давление

$$P_{\mathrm{d}} = \langle p\rangle - P_0 = P_V\big|_{r=R} - P_V\,. \tag{12}$$

При учете выражения (10) находим

$$P_{\mathrm{d}} = \frac{1}{16}\rho\left(\frac{A\omega}{h_0}\right)^2\left(R^2 - r^2\right). \tag{13}$$

Таким образом, диск находится под действием вибрационной (подъемной) силы.

$$V_{pl} = \int_0^R 2\pi r P_{\mathrm{d}} dr = \frac{\pi}{8}\rho\left(\frac{A\omega}{h_0}\right)^2\int_0^R\left(R^2 - r^2\right)r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{32}\rho A\omega^2\frac{AR^4}{h_0^2}\,. \tag{14}$$

Диск зависнет в жидкости, если

$$\frac{V_{pl}}{G_{pl}} = \frac{1}{32}\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{d}} - \rho}\frac{A\omega^2}{g}\frac{AR^2}{\delta h_0^2} > 1\,, \tag{15}$$

где $G_{pl} = \left(\rho_{pl} - \rho\right)g\pi R^2\delta$ – вес диска в жидкости; δ – его толщина, а ρ_{pl} – плотность материала; считаем, что $\rho_{pl} > \rho$.

Высота зависания диска h_{pl} определится из условия $V_{pl} = G_{pl}$:

$$h_{pl} = \frac{R}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho}{\rho_{pl} - \rho}\frac{A\omega^2}{g}\frac{A}{\delta}}\,. \tag{16}$$

Отсюда, например, при $R = 20$ см, $\rho_{pl} = 2{,}7$ г/см^3, $\rho = 1{,}0$ г/см^3, $A\omega^2 / g = 4$, $A/\delta = 0{,}5$ получается $h_{pl} \approx 4$ см. Для относительно мелкой частицы ($R = 1$ см) при тех же значениях остальных параметров находим $h_{pl} \approx 0{,}2$ см. Если плотность среды вблизи дна $\rho = 2{,}0$ г/см^3 (взвесенесущий поток, придонный ил), то высота взвешивания тех же частиц увеличится более чем в два раза.

Согласно формуле (16), высота h_{pl} пропорциональна амплитуде скорости вибрации $A\omega$ и комбинации геометрических размеров пластины $R\big/\sqrt{\delta}$. Две пластины, у одной из которых радиус в два раза больше, чем у другой, а толщина в четыре раза больше, отличающиеся по массе в 16 раз, всплывут на одинаковую высоту.

Формулы (14)–(16) совпадают с полученными в [2]. Возникновение избыточного давления между вибрирующим диском и дном сосуда экспериментально подтверждено в работе [3]. Этот эффект лежит в основе упомянутого вибронасоса Г.Я. Лишанского.

2. Обобщение задачи: о взвешивании твердых частиц в турбулентных потоках

Полученные соотношения легко обобщаются для случая тела вращения произвольной формы, в частности, обращенного к стенке выпуклой или вогнутой стороной (см. рис. 1, *б,в*). При данном приближенном подходе форма части тела, не обращенной к стенке, значения не имеет. С другой стороны, в рамках данного подхода не может быть рассмотрен случай частицы сферической формы, поскольку в этом случае нарушается условие $y(r)/R \ll 1$, заменяющее в общем случае условие $h_0 \big/ R \ll 1$. Иными словами, по-прежнему предполагается, что зазор между стенкой и обращенной к ней поверхностью тела мал по сравнению с поперечным размером тела.

В общем случае расстояние от поверхности тела до стенки представляет собой некоторую функцию $y(r)$. Нетрудно показать, что из условия сохранения объема в предположениях

$$A / y(r) \ll 1, \; \eta / r \ll 1 \qquad (17)$$

вместо формул (6) и (7) можно получить

$$\eta = -Ar\sin\omega t \big/ 2y(r), \quad u_r = \mathrm{d}\eta / \mathrm{d}t = -A\omega r\cos\omega t \big/ 2y(r). \qquad (18)$$

Вместо соотношений (10), (13) и (14) в рассматриваемом случае находим

$$P_V = \frac{1}{2}\rho\left\langle u_r^2\right\rangle = \frac{1}{16}\rho\left(\frac{A\omega r}{y(r)}\right)^2, \tag{19}$$

$$P_d = P_V\big|_{r=R} - P_V = \frac{1}{16}\rho(A\omega)^2\left[\left(\frac{R}{h_R}\right)^2 - \left(\frac{r}{y(r)}\right)^2\right], \tag{20}$$

$$V = \int_0^R 2\pi r P_{\mathrm{d}}\mathrm{d}r = \frac{\pi\rho}{8}(A\omega)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{h_R}\right)^2 - \int_0^R \frac{r^3\mathrm{d}r}{y^2(r)}\right]. \tag{21}$$

Здесь, как и в случае пластины, R – радиус наибольшего (миделева) сечения тела.

В частности, для выпуклого или вогнутого по отношению к стенке тела при параболической аппроксимации его формы расстояние от поверхности тела до стенки определяется формулой

$$y(r) = h_0 - (h_0 - h_R)\, r^2 / R^2 = h_0(1 - kr^2 / R^2)\,,\ (k = (h_0 - h_R)/h_0\,). \tag{22}$$

Согласно формуле (22) $y(0) = h_0$, а $y(R) = h_R$. В случае выпуклого тела $h_0 < h_R$, а в случае вогнутого $h_0 > h_R$; равенство $h_0 = h_R$ соответствует телу с плоской поверхностью.

Соотношения (19)–(21) в данном случае имеют вид

$$P_V = \frac{1}{16}\rho\left(\frac{A\omega r}{h_0(1 - kr^2/R^2)}\right)^2, \tag{23}$$

$$P_d = \frac{1}{16}\rho\left(\frac{A\omega R}{h_0}\right)^2\left[\frac{1}{(1-k)^2} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\frac{1}{(1 - kr^2/R^2)^2}\right], \tag{24}$$

$$V = \frac{\pi\rho}{16}\left(\frac{A\omega R^2}{h_0}\right)^2\left[\frac{1}{(1-k)^2} - \frac{k/(1-k) + \ln(1-k)}{k^2}\right]. \tag{25}$$

Формула (25) отличается от аналогичной формулы (14) для пластины наличием «коэффициента формы» f, зависящего от параметра k (рис. 2), т.е. $V = f\,V_{pl}$, где

$$f = 2\left[\frac{1}{(1-k)^2} - \frac{k/(1-k) + \ln(1-k)}{k^2}\right]. \qquad (26)$$

При $k \ll 1$ справедливы разложения $1/(1-k)^2 = 1 + 2k + 3k^2 + 4k^3 + \ldots$; $k/(1-k) = k + k^2 + k^3 + k^4 + \ldots$; $\ln(1-k) = -k - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{4}k^4 - \ldots$.

Поэтому

$$f = 1 + \frac{8}{3}k + \frac{9}{2}k^2 + \ldots . \qquad (27)$$

При $k = 0$, как и должно быть, $f = 1$ и формула (25) совпадает с формулой (14).

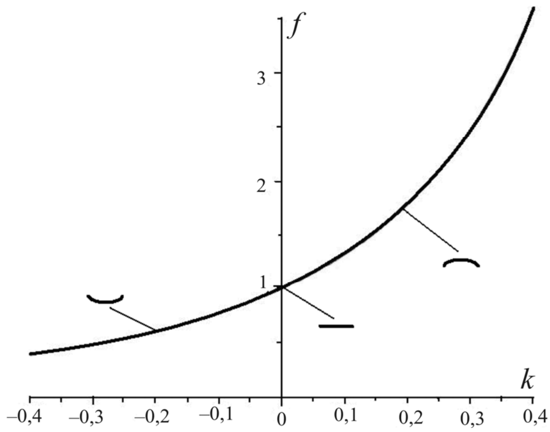


Рис. 2. Зависимость коэффициента формы *f* от параметра *k* (части кривой, отвечающие выпуклому, плоскому и вогнутому телам, помечены на графике соответственно знаками ◡, — и ◠)

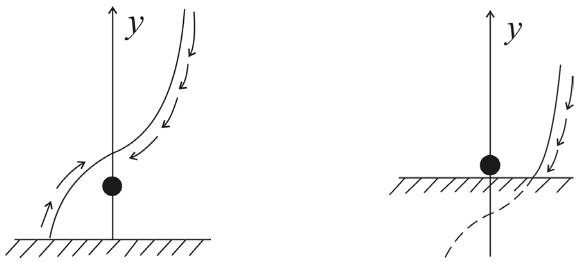
Высота зависания тела h, как и ранее, определится из соотношения $V/G = 1$, где G – вес тела в жидкости. При прочих равных условиях будет $h > h_{pl}$ для вогнутого тела и $h < h_{pl}$ для выпуклого. Так, для вогнутого тела, для которого параметр $k = 0{,}3$ по сравнению с выпуклым телом, имеющим $k = -0{,}3$, вибрационная сила будет в 5,2 раза больше, а высота зависания – в 2,3 раза больше.

Эффект взвешивания частиц имеет существенное значение для теории и расчета взвесенесущих потоков, в которых «вибрация» частиц обусловлена турбулентностью потока жидкости. Поэтому теории этого эффекта уделяется значительное внимание (например, работы [4–6]). Однако собственно механизм взвешивания остается дискуссионным.

3. Физическое объяснение вибрационного взвешивания «тяжелой» частицы в жидкости. О гидродинамическом и акустическом механизмах взвешивания

Физическое объяснение рассмотренного эффекта состоит в следующем. Как предполагается, давление жидкости у края колеблющихся тел (при $r=R$) равно статическому значению P_0. Амплитуда скорости жидкости в этом месте согласно формулам (7) и (18) либо максимальна (для случая пластины и вогнутого тела), либо близка к максимальной (для выпуклого тела), а в центральной части зазора между телом и плоскостью уменьшается до нуля при $r=0$. Но в соответствии с уравнением (2), аналогично уравнению Бернулли, на участках уменьшенных значений амплитуды скорости имеет место повышение среднего давления. Иными словами, под вибрирующим вблизи плоскости телом образуется область повышенного давления, что и объясняет взвешивание тела.

Сказанное выше относилось к механизму взвешивания под действием вибрации в несжимаемой жидкости. Такой механизм можно назвать гидродинамическим или гидравлическим. Взвешивание тяжелых тел имеет место и в сжимаемой среде, в частности в газонасыщенной жидкости [7, 8]. Здесь этот эффект может быть обусловлен наличием вблизи стенки стоячей волны с амплитудой $\xi(y)$. В этой волне твердые частицы «притягиваются» к положениям, близким к узлам волны и отталкиваются от положений, близких к пучностям (рис. 3).



а *б*

Рис. 3. Притяжение «тяжелой» частицы к положениям вблизи узлов волны: *а* – взвешивание частицы; *б* – прижатие к стенке

В данном случае в зависимости от частоты колебаний, скорости звука в среде и расстояния между частицей и плоскостью частица может как отталкиваться от стенки (взвешиваться), так и притягиваться к ней. Физическое объяснение механизма взвешивания в этом случае приводится в книге [2].

4. Сопоставление с эффектом Бьеркнеса и результатами последующих исследований

Эффект взвешивания вибрирующих тел интересно сравнить с эффектом Бьеркнеса и в целом с исследованиями поведения тел в жидкости при наличии границ или других тел.

Начало этим исследованиям было положено во второй половине XIX в. классическими работами Карла и Вильгельма Бьеркнесов [9–12], В. Томсона и П. Тэта, Г. Кирхгофа, В. Хикса, К. Пирсона, Г. Ламба, А. Бассе, Н.Е. Жуковского и других ученых.

В дальнейшем проблеме было посвящено большое число работ. В последние годы интерес к рассматриваемым исследованиям усилился с выходом в 1983 г. статьи В.Н. Челомея [13]. Ряд существенных результатов, а также обзоры и библиографические данные можно найти в публикациях [14–26, 7, 8], принадлежащих, в частности, ученым Пермской школы гидродинамики.

Нас для сравнения с приведенными выше результатами интересует случай двух одинаковых шаров, колеблющихся с одинаковыми амплитудами и частотами в противофазе или пульсирующими синфазно (рис. 4). Вследствие зеркальной симметрии этот случай относится также к колебаниям и пульсации одиночного шара относительно плоскости SS. Учитывая принятую в пп. 1 и 2 схематизацию колеблющегося тела, можно предположить, что к нашему рассмотрению ближе случай пульсирующего тела.

Применительно к данному случаю в одних работах говорится о притяжении тел (например, [9–12, 27]), в других – об отталкивании [28, 29] или более сложном поведении, в частности смене притяжения на отталкивание на малых расстояниях или даже их чередовании [30–32]. Такое различие можно объяснить различием постановок задач и сделанных предположений (рассматривались как объемные пульсации сжимаемых частиц и пузырьков газа в звуковом поле, так и различного вида колебания сосудов с жесткими частицами; как открытые сосуды, так и полости, частично или полностью заполненные жидкостью; идеальная и вязкая жидкость; сжимаемая и несжимаемая жидкость; учитывалась или не учитывалась теплопроводность среды; рассматривались либо различные соотношения размеров тела и его расстояния до стенки, либо соотношения размеров тел и расстояния между ними, различные соотношения плотностей тел и жидкости).

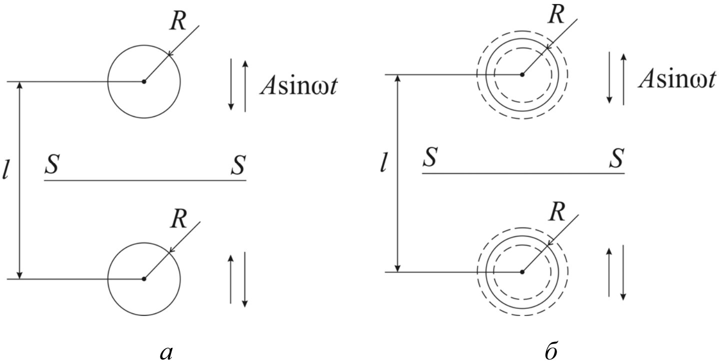


Рис. 4. Противофазно колеблющиеся (*а*) и синфазно пульсирующие (*б*) шары

Уже при учете одного из перечисленных факторов – сжимаемости среды – могут, как отмечено в п. 3, реализовываться противоположные эффекты.

Что же касается силы взаимодействия при пульсациях, то для ее величины К. Бьеркнесом и другими авторами приводится формула, которая в рассматриваемом частном случае принимает вид [10, 12, 31–34]

$$F = \frac{2\pi\rho(A\omega)^2 R^4}{l^2}, \tag{28}$$

где l – расстояние между центрами шаров.

Формула Бьеркнеса была получена в предположении о малости отношения R/l, в то время как нами рассматривался случай малости l/R. Тем не менее примечательно, что формула Бьеркнеса для одинаковых пульсирующих сферических тел лишь числовым коэффициентом и знаком отличается от полученной выше формулы (14) для вибрирующей пластины и формулы (25) для тела с параболической кривизной. (Роль расстояния между центрами тел l в нашем случае играет величина h_0, а роль радиуса сфер R – радиус пластины или миделева сечения тела.)

Подчеркнем, что при противофазных колебаниях тел, когда зазор между ними периодически изменяется, выше получено отталкивание тел, которые, по Бьеркнесу, при противофазных колебаниях или синфазных пульсациях притягиваются.

5. Об эффектах выпучивания трубопроводов вблизи морского дна, всплывания валунов в грунте, аномального залегания конкреций и явлении вибрационной сегрегации

Известна группа физических эффектов и природных явлений, характеризующихся парадоксальным поведением механической системы под действием вибрации, когда система стремится к состоянию не с минимальной, а с максимальной потенциальной энергией. В частности, речь идет об эффектах, когда создается впечатление, что сила тяжести изменила направление на противоположное. Характерными примерами могут служить маятник с вибрирующей осью подвеса (маятник Стефенсона–Капицы), у которого устойчивым состоянием является не нижнее, а верхнее положение [2], и маятник Челомея [13]. Другими примерами служат погружение в жидкость пузырьков газа и легких тел и всплывание более плотных тел в вибрирующей жидкости и сыпучей среде (см. [13], работы [7, 8, 25, 26] и приведенную в них библиографию), вибрационная стабилизация неустойчивости Рэлея–Тейлора, когда слой тяжелой жидкости расположен над слоем более легкой [35], а также эффект взвешивания вибрирующего тела в жидкости, рассмотренный в пп. 1–3.

К той же группе эффектов относится вертикальное выпучивание секций трубопроводов, расположенных в водонасыщенном грунте и подверженных, помимо прочего, колебательным воздействиям, связанным с волнением моря, турбулентностью, придонными течениями, сейсмичностью [36–38] (рис. 5, *а*). Этот эффект нередко приводил к аварийным ситуациям.

Другими примерами является всплывание валунов в грунте под влиянием сейсмических воздействий [39–41] (рис. 5, *б*), а также залегание конкреций на поверхности и в слое более легкого ила (парадокс «непотопляемости» конкреций) [42–47] (рис. 5, *в*).

Известно и явление вибрационной сегрегации, состоящее в расслоении частиц сыпучего материала по крупности и плотности. При этом также может наблюдаться упомянутое выше существенное отклонение от состояния, отвечающего минимуму потенциальной энергии в поле силы тяжести. Одним из проявлений эффекта сегрегации является и всплытие одиночных крупных тяжелых тел в вибрирующей сыпучей среде меньшей плотности [39–41, 48].

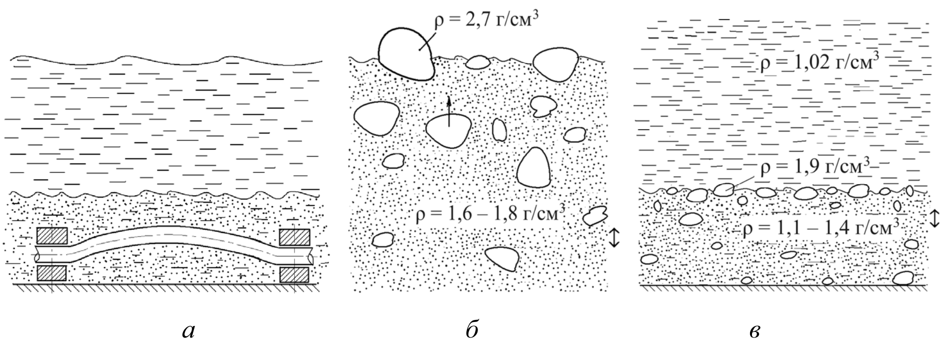
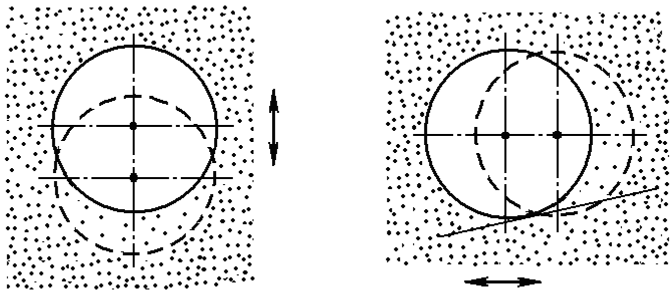


Рис. 5. Парадоксальные эффекты при воздействии вибрации: *а* – выпучивание пролета трубопровода вблизи морского дна; *б* – всплывание валунов в грунте; *в* – залегание конкреций

В рассматриваемых здесь случаях (см. рис. 5) сопротивление относительному движению тела в среде носит характер сухого трения. Поэтому физический механизм описанной группы эффектов отличен от механизма эффектов в жидкости. Однако естественно предположить, что, как и в жидкости, рассматриваемые эффекты обусловлены тем, что силы сопротивления среды вибрирующим телам больше при их движении вниз, чем при движении вверх. Чем вызвано это различие?

Можно представить себе два взаимно дополняющих объяснения такого различия в изучаемых здесь случаях.

Первое объяснение предполагает, что слой среды относительно невелик, так что существенно влияние жесткого дна и свободной поверхности слоя. В этом случае можно предположить, что при движении трубы (или тела) вниз необходимо большее усилие для уплотнения нижележащей части слоя и «расталкивания» частиц среды в стороны, чем при движении вверх, когда необходим лишь подъем вышележащих, близких к поверхности частиц. Подобное предположение использовалось при исследовании вибрационного разделения сыпучих смесей в работе [49] и в ряде последующих работ.



а *б*

Рис. 6. К механизму всплывания тела в сыпучей среде иной плотности при вертикальной (*а*) и горизонтальной (*б*) вибрации

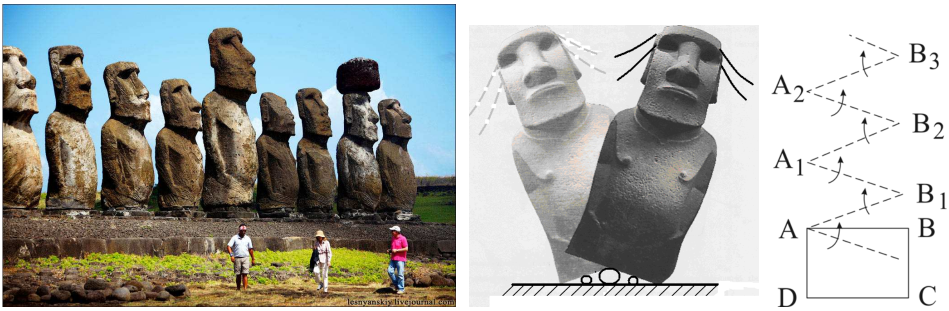
Второе объяснение основывается на том, что тело с плотностью, отличной от плотности среды под действием вибрации достаточной интенсивности, совершает колебания относительно среды [2]. При этом в каждом периоде относительных колебаний в течение половины периода возникает ситуация, когда частицы среды обрушиваются вниз и образуют подпор, так что в следующем полупериоде тело должно несколько приподниматься (рис. 6, *а*).

Можно ожидать, что тот же эффект будет иметь место при горизонтальной вибрации (рис. 6, *б*). В этом случае движение тела подобно его движению под действием вибрации вверх по наклонной плоскости, когда движение тела вниз затруднено или исключено.

Подобное объяснение в случае вертикальной вибрации предложено Б.В. Левиным, который, однако, предполагал, что тело вообще не может двигаться вниз [39, 40].

Отметим, что второе объяснение не предполагает близости тела к стенке, и оба объяснения остаются в силе также, если средняя плотность тела не больше, а меньше плотности среды. Важно лишь отличие этих плотностей, обуславливающее относительное движение тела при вибрации.

Заметим также, что рассмотренный механизм имеет сходство со способом, которым древние жители о. Пасхи (согласно гипотезе П. Павела и Т. Хейердала и их экспериментам с реальными объектами [50, 51]) передвигали и поднимали своих массивных каменных идолов (моаи). Отклонив с помощью веревок вертикально стоящую статую в одну сторону и разворачивая ее, они подкладывали под нее камни с другой стороны и, повторяя эти действия попеременно в разные стороны (рис. 7), перемещали изваяния на расстояния до 18 км. Иначе говоря, они использовали вертикальную кантовку, подобно тому, как передвигают тяжелый шкаф.



а *б* *в*

Рис. 7. Идолы о. Пасхи (*а*) и возможная схема их перемещения (*б*); вид сверху (*в*)

Зигзагообразные траектории движения аналогичны траекториям всплывающего тела при горизонтальной вибрации (см. рис. 6, *б*).

Высказывалась также гипотеза, что статуи могли перемещаться самостоятельно вследствие сильных ветров и высокой сейсмической активности в данном регионе (http://www.trizland.ru/trizba.php?id=363). Это соответствует легенде о том, что «моаи пришли сами».

6. Модель эффектов всплывания тел в среде с сопротивлением типа сухого трения под действием вибрации

В качестве простейшей модели эффектов, рассмотренных в п. 5, может быть предложена модель, показанная на рис. 8. Она представляет собой тело массой m, связанное с неподвижной опорой пружиной жесткости c. Тело находится под действием вибрации в некоторой среде, сопротивляющейся ее относительному движению посредством силы типа сухого трения, большей при движении вниз (к стенке, ко дну), чем при движении вверх. Наряду с учетом сухого трения будем также учитывать архимедову силу, ориентируясь на рассмотрение разжиженного грунта.

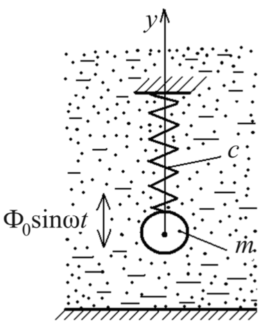


Рис. 8. Простейшая модель трубопровода – весомое твердое тело на пружине в сыпучей среде

Уравнение движения тела может быть записано в виде

$$(\rho_b+\tfrac{1}{2}\rho)v\ddot{y}=-cy-(\rho_b-\rho)vg+\Phi_0\sin\omega t+F(\dot{y}). \tag{29}$$

Здесь y – координата тела, отсчитываемая от положения ненапряженной пружины; ρ_b – средняя плотность тела; v – его объем; $\frac{1}{2}\rho v$ – присоединенная масса среды; ρ – плотность среды; Φ_0 – амплитуда; ω – частота вибрационного воздействия; g – ускорение свободного падения; $F(\dot{y})$ – сила сопротивления движению частицы, определяемая соотношениями

$$F(\dot{y})=\begin{cases}-F_+, & \dot{y}>0,\\ F_-, & \dot{y}<0,\end{cases}$$
$$-F_+<F(\dot{y})<F_-,\ \ \dot{y}=0, \tag{30}$$

причем согласно сказанному $F_->F_+$. Таким образом, исследование модели сводится к решению нелинейного неавтономного уравнения второго порядка.

Уравнение (29) является квазилинейным, для его точного поэтапного решения можно воспользоваться результатами теории вибрационного перемещения. Однако можно получить более простое аналитическое решение путем подхода вибрационной механики и метода прямого разделения движений [2]. В соответствии с этим методом разыскиваем решение в форме

$$y=Y(t)+\psi(t,\omega t),\ \langle\psi\rangle=0, \tag{31}$$

где Y – основная медленная, а ψ – быстрая 2π – периодическая по $\tau=\omega t$ составляющая, среднее значение которой за период равно нулю (угловые скобки здесь и ниже указывают на осреднение по τ за период 2π).

Для нахождения функций Y и ψ вместо (29) получаются два уравнения

$$(\rho_b+\tfrac{1}{2}\rho)v\ddot{Y}=-cY-(\rho_b-\rho)vg+\left\langle F(\dot{Y}+\dot{\psi})\right\rangle, \tag{32}$$

$$(\rho_b+\tfrac{1}{2}\rho)v\ddot{\psi}=-c\psi+\Phi_0\sin\omega t+F(\dot{Y}+\dot{\psi})-\left\langle F(\dot{Y}+\dot{\psi})\right\rangle, \tag{33}$$

первое из которых называется уравнением медленных, а второе – уравнением быстрых движений. Одним из достоинств метода прямого разделения движений является возможность приближенного решения уравнения быстрых движений без внесения существенной погрешности в уравнение медленных движений, представляющее основной интерес. В данном случае будем пренебрегать в уравнении (33) силой типа сухого трения F по сравнению с другими силами, полагая, что они сравнительно велики. Тогда это уравнение примет вид

$$\ddot{\psi}+\lambda^2\psi=\Phi\sin\omega t, \tag{34}$$

где

$$\lambda^2=c/(\rho_b+\tfrac{1}{2}\rho)v,\ \ \Phi=\Phi_0/(\rho_b+\tfrac{1}{2}\rho)v\,. \tag{35}$$

Периодическим решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $\langle\psi\rangle=0$, будет

$$\psi=-A\sin\omega t\,,\ A=\Phi/(\omega^2-\lambda^2)\,. \tag{36}$$

Процесс вычисления выражения $V(\dot{Y})=\langle F(\dot{Y}+\dot{\psi})\rangle$ – так называемой вибрационной силы вполне аналогичен приведенному в п. 8.2.1 книги [2], поэтому здесь на нем не останавливаемся. В результате получается

$$V(\dot{Y})=\begin{cases}-F_+\,,\ \ \dot{Y}\ge A\omega,\\ \tfrac{1}{2}(F_--F_+)-\tfrac{1}{\pi}(F_-+F_+)\arcsin(\dot{Y}/A\omega),\ |\dot{Y}|\le A\omega,\\ +F_-\,,\ \ \dot{Y}\le -A\omega\end{cases} \tag{37}$$

и уравнение медленных движений принимает вид

$$(\rho_b+\tfrac{1}{2}\rho)v\ddot{Y}=-cY-(\rho_b-\rho)vg+V(\dot{Y})\,. \tag{38}$$

Из этого уравнения определяется положение равновесия тела $Y=Y_0=\mathrm{const}$:

$$Y_0=\frac{1}{c}\big[V(0)-(\rho_b-\rho)vg\big], \tag{39}$$

и поскольку согласно (37)

$$V(0)=\frac{1}{2}(F_{-}-F_{+}), \tag{40}$$

то

$$Y_0=\frac{1}{c}\left[\frac{1}{2}(F_{-}-F_{+})-(\rho_b-\rho)vg\right]. \tag{41}$$

Нетрудно показать, что это положение равновесия устойчиво при условии $V'(0)<0$, которое согласно (37) всегда выполняется.

Из равенства (41) следует, что смещение тела вверх (а в случае трубы – ее прогиб) тем больше, чем больше разность сил сопротивления $F_{-}-F_{+}$, а при заданном $F_{-}-F_{+}$ – тем меньше, чем больше вес тела в среде $P_b=(\rho_b-\rho)vg$. Увеличение этого веса с использованием пригрузки различных типов является известным приемом, однако связано с дополнительными затратами и усложнением производства работ [36].

Согласно (37) при $\left|\dot{Y}\right|\le A\omega$ выражение $V(\dot{Y})$ представляется в виде

$$V(\dot{Y})=V(0)+V_1(\dot{Y}),$$

где $V_1(\dot{Y})=-\frac{1}{\pi}(F_{-}+F_{+})\arcsin(\dot{Y}/A\omega)$, причем $V_1(0)=0$.

Таким образом, следуя [2], можно сказать, что в результате действия вибрации, во-первых, сухое трение как бы превратилось в вязкое, а во-вторых, возникла некоторая дополнительная вибрационная сила $V(0)$, равная полуразности сил сопротивления F_{-} и F_{+}. Эта последняя и вызывает выпучивание трубы, а также всплывание твердых тел.

Соотношения (38)–(41) справедливы при выполнении двух условий. Во-первых, если описываемое уравнением (38) движение действительно медленное. Это условие приводит к требованию

$$\lambda=\sqrt{c/(\rho_b+\tfrac{1}{2}\rho)v}<<\omega. \tag{42}$$

Практика использования метода прямого разделения движений показывает, что обычно достаточно, чтобы было $\omega>(3\div5)\lambda$. Очевидно, что при выполнении этого условия величиной λ^2 в выражении (36) можно пренебречь. Второе ограничение связано с принятым при решении уравнения (33) предположением, что сила сопротивления F мала по сравнению с амплитудой вынуждающей силы. Случаи, когда это не так, представляют определенный интерес. В частности, согласно упоминавшейся в п. 5 гипотезе Б.В. Левина движение тела вниз при его колебаниях невозможно, что соответствует $F_{-}=\infty$. В этом, как и в предыдущем случае, можно воспользоваться точным решением, приведенным в книге [52] и в т. 4 справочника [53]. Не останавливаясь здесь на этом более сложном решении, отметим следующие вытекающие из него положения.

1) Движение тела вверх при определенном положении y происходит при условии

$$\Phi_0 > (\rho_b-\rho)vg + cy + F_{+}; \tag{43}$$

2) Скорость движения возрастает по мере увеличения Φ_0.

При расчетах трубопроводов иногда учитывается возможность их выпучивания вследствие потери устойчивости при действии осевых сил [38]. При проектировании морских трубопроводов необходимо, как показано выше, учитывать также появление при действии вибрации поперечных распределенных сил, которые могут быть направлены вверх. Согласно формуле (41), для того чтобы исключить выпучивание, связанное с прогибом трубы, необходимо, чтобы запас отрицательной плавучести превышал полуразность сил сопротивления F_{-} и F_{+}.

7. О случае колебаний объема среды вблизи тела

Выше предполагалось, что задана либо амплитуда вибрации тела A (пп. 1 и 2), либо амплитуда вибрационного воздействия Φ_0 (п. 6). Представляет практический интерес случай, когда задана амплитуда B и частота ω колебаний объема среды окружающей тело. В этом случае амплитуда силы инерции, действующей на тело в его относительном движении, определяется соотношением

$$\Phi_0 = |\rho_b-\rho| vB\omega^2, \tag{44}$$

а амплитуда колебаний A в задачах пп. 1 и 2, входящая в условия взвешивания, может быть оценена по формуле

$$A = \frac{\Phi_0}{(\rho_b+\frac{1}{2}\rho)v\omega^2} = \frac{|\rho_b-\rho|}{(\rho_b+\frac{1}{2}\rho)}B. \tag{45}$$

Что же касается среды с сухим трением (п. 6), то условие всплывания тела (43) может быть записано в виде

$$B\omega^2 > g \cdot \operatorname{sign}\left(\rho_b - \rho\right) + \frac{cy + F_+}{\left|\rho_b - \rho\right| v}. \tag{46}$$

Отсюда следует, что чем больше разность между плотностями ρ_b и ρ, тем меньшее ускорение колебаний требуется для начала всплытия тела. И, наоборот, при $\rho_b \approx \rho$ для всплытия тела, а также для его зависания в жидкости (пп. 1 и 2) необходимо весьма значительное ускорение $B\omega^2$.

8. О парадоксе «непотопляемости» конкреций

Одна из загадок, связанных с глубоководными железомарганцевыми конкрециями, состоит в том, что, имея плотность $\rho = 1{,}91–1{,}5$ г/см^3, они в течение тысяч и миллионов лет располагаются на поверхности и отчасти в слое значительно менее плотного ($\rho = 1{,}1...1{,}4$ г/см^3) придонного ила (см. рис. 5, *в*). При этом конкреции не перекрываются пелагическими осадками, которые накапливаются со скоростью, на несколько порядков превышающей скорость роста конкреций.

В числе гипотез, объясняющих это явление, назывались: деятельность донных организмов, выталкивающих и переворачивающих конкреции; встряхивание донных отложений сейсмическими толчками; переворачивание и перекатывание конкреций сильными придонными течениями, их вымывание из осадков; сползание грунтов по направлению уклона поверхностей [42–47].

Приведенное выше исследование свидетельствует в пользу предположения о том, что определяющим фактором, объясняющим непотопляемость конкреций, являются вибрационные воздействия. Можно считать достоверным, что такие воздействия реально имеют место. Некоторые из них, изменяя свою интенсивность, присутствуют постоянно, другие – как сейсмические – накладываются на этот фон в виде время от времени возникающих колебаний.

Таким образом, непотопляемость конкреций скорее всего относится к группе эффектов, которые можно назвать вибрационной инверсией силы тяжести. Некоторые из них были упомянуты в п. 5.

Выполненное здесь исследование можно рассматривать как простейшую модель, описывающую механизм эффекта «непотопляемости» конкреций.

9. Обобщение: проблема поведения вибрирующих твердых и деформируемых тел вблизи поверхности раздела двух сред (плавучесть вибрирующих тел)

Выполненное исследование дает повод поставить следующую задачу механики.

Вблизи поверхности раздела двух сред, одна из которых может быть, например, твердым телом, а другая жидкостью или газом, сопротивление движению тела в направлении границы может отличаться от сопротивления в противоположном направлении. Тогда в результате вибрации тела возникает средняя (вибрационная) сила, направленная в сторону наименьшего сопротивления.

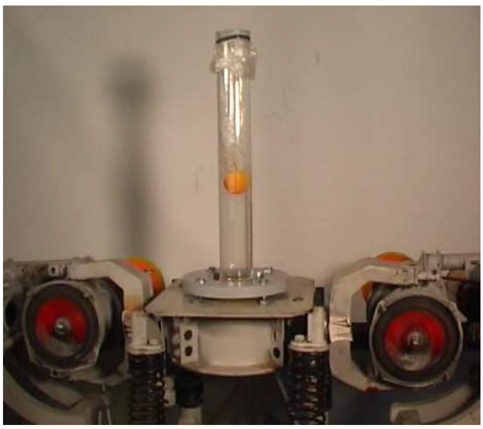


Рис. 9. Динамическое равновесие «тяжелого» тела на поверхности колеблющейся жидкости («вибрационная плавучесть» неплавучего тела)

Так, например, колебания тела вблизи свободной поверхности жидкости в гравитационном поле вызывают дополнительную (по отношению к архимедовой) выталкивающую силу, которая повышает плавучесть тела. Такая сила может обеспечить поддержание на плаву тела, более плотного, чем жидкость. Это подтверждается нашими экспериментами (рис. 9) [7] и может также служить объяснением расположения значительной части конкреций на границе раздела воды и ила.

Задача состоит в определении указанной вибрационной силы и исследовании соответствующего движения или равновесия тела.

Естественно, что поставленная проблема представляет общефизический и прикладной интерес.

Выполненное исследование представляет один из частных случаев общей проблемы. Как другие частные случаи могут рассматриваться задачи о погружении пузырьков газа в колеблющуюся жидкость [7, 8, 25, 26].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13–08–01201).

Библиографический список

1. Короткин А.И. Исследование гидродинамической характеристики вибронасоса ВНЛ-1: Научно-технический отчет ЦНИИ им. А.Н. Крылова. – 1993. – № 35288.

2. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.

3. Генерирование медленных потоков жидкости вибрирующим вблизи стенки диском (к теории вибрационных насосов) / И.И. Блехман, В.Б. Васильков, К.С. Якимова, Е.В. Шишкина // Обогащение руд. – 2001. – № 1. – С. 36–38.

4. Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. 17. – Вып. 3. – С. 261–274.

5. Баренблатт Г.И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т. 19, вып. 1. – С. 61–88.

6. Криль И.С. Напорные взвесенесущие потоки. – Киев: Наук. думка, 1990. – 160 с.

7. «Аномальные» явления в жидкости при действии вибрации / И.И. Блехман, Л.И. Блехман, Л.А. Вайсберг, В.Б. Васильков, К.С. Якимова // Докл. Акад. наук. – 2008. – Т. 422, № 4. – С. 470–474.

8. Phenomenon of inversion of the stable states of “gas – fluid – heavy” particles” system in the vibrating vessels / I.I. Blekhman, L.I. Blekhman, L.A. Vaisberg, V.B. Vasilkov, K.S. Yakimova // Proc. of 6-th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conf. (ENOC 2008), St. Petersburg, June 30–July 4, 2008. – St. Petersburg, 2008.

9. Bjerknes V. Vorlesungen uber hydrodynamische Fernkrafte nach C.A. Bjerknes's Theorie. – Leipzig: J.A. Barth. Bd. 1, 1900. – 388 p.; Bd. 2, 1902. – 316 p., available at: Bd. 1 – http://resolver.library.cornell.edu/math/1968499; Bd. 2 – URL: http://resolver.library.cornell.edu/math/1968499a).

10. Bjerknes V.F.K. Fields of Force: a course of lectures in mathematical physics delivered December 1 to 23, 1905. – New York: Columbia Univ. Press., 1906. – 160 p., available at: URL: http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=02780002&seq=1.

11. Bjerknes V.F.K. Die Kraftfelder. – Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1909. – 174 p.

12. Bjerknes C.A. Hydrodynamische Fernkrafte. Funf Abhandlungen uber die Bewegung kugelformiger Korper in einer incompressiblen Flussigkeit (1863–1880). – Leipzig: Verlag von W. Engelmann, 1915. – 229 p.

13. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 270, № 1. – С. 62–67.

14. Луговцов Б.А., Сенницкий В.Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 289, № 2. – С. 314–317.

15. Кубенко В.Д., Кузьма В.М., Пучка Г.Н. Динамика сферических тел в жидкости при вибрации. – Киев: Наук. думка, 1989. – 156 с.

16. Козлов В.Г. Экспериментальное исследование осредненной вибрационной динамики несжимаемой жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Перм. гос. ун-т. – Пермь, 1997. – 250 с.

17. Иванова А.А. Неоднородные системы в осциллирующих силовых полях. Экспериментальное исследование: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2000. – 237 с.

18. Дойников А.А. Нелинейная динамика дисперсных частиц в акустических полях // Фундаментальные и прикладные физические исследования 1986–2001 гг.: сб. науч. тр. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2001. – 457 с.

19. Вибрационные эффекты в гидродинамике: сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. – Пермь, 1998. – Вып. 1; 2001. – Вып. 2.

20. Опыты по вибрационной механике: сб. студ. науч. тр. / Перм. гос. пед. ун-т; под ред. А.А. Ивановой, В.Г. Козлова. – Пермь, 2001. – 138 с.

21. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. – М.: Физматлит, 2003. – 216 с.

22. Конвективные течения: сб. науч. тр. / отв. ред. В.Г. Козлов; Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2005. – Вып. 2. – 250 с.

23. Борисов А.В., Мамаев И.С., Рамоданов С.М. Движение двух сфер в идеальной жидкости. I. Уравнения движения в евклидовом пространстве. Первые интегралы и редукция // Нелинейная динамика. – 2007. – Т. 3, № 4. – С. 411–422.

24. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технологии. – М.: R&C Dynamics, 2008. – 711 с.

25. Движение пузырька газа в колеблющейся газонасыщенной жидкости / И.И. Блехман, Л.И. Блехман, В.Б. Васильков, В.С. Сорокин [и др.] // Обогащение руд. – 2011. – № 5. – С. 30–37.

26. Surface and volumetric effects in a fluid subjected to high-frequency vibration. Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part C / I.I. Blekhman, L.I. Blekhman, V.S. Sorokin, V.B. Vasilkov [et al.] // Journal of Mechanical Engineering Science. – London, 2012. – Vol. 226, iss. 8. August. – P. 2028–2043.

27. Жуковский Н.Е. Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы // Труды Отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания. – 1896. – Т. VIII, вып. 2 (См. также Жуковский Н.Е.: собр. соч. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – Т. 2. – С. 670–688).

28. Иванова А.А., Козлов В.Г., Кузаев А.Ф. Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Докл. Акад. наук. – 2005. – Т. 402, № 4. – С. 488–491.

29. Козлов Н.В., Терехов Е.В., Филонов В.М. Поднятие и подвес тяжелого тела в жидкости при помощи вибрации // Опыты по вибрационной механике: сб. студ. науч. тр. / Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2001. – С. 46–53.

30. Leahy A.H. On the pulsations of spheres in an elastic medium // Trans. Camb. Phil. Soc. – 1889. – Vol. 14. – P. 45–62.

31. Заболотская Е.А. Взаимодействие газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акустический журнал. – 1984. – Т. 30, вып. 5. – С. 618–623.

32. Завтрак С.Т. К вопросу о силе взаимодействия Бьеркнеса двух газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акустический журнал. – 1987. – Т. 33, № 2. – С. 240–245.

33. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field / R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, C.D. Ohl [et al.] // Physical Rewiew E. – 1997. – Vol. 56, no. 3. – P. 2924–2931.

34. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. – М.: Физматлит, 2009. – 520 с.

35. Зеньковская С.М., Новосядлый В.А. Влияние вертикальных колебаний на двухслойную систему с деформируемой поверхностью раздела // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 2008. – Т. 48 , № 9. – С. 1710–1720.

36. Бородавкин П.П., Сунаргин А.Х. Строительство магистральных трубопроводов в сложных условиях. – М.: Недра, 1965. – 214 с.

37. Моделирование гидродинамического воздействия на подводный газопровод в траншее с разжиженным грунтом / Е.Е. Гилев, С.Н. Шубин, А.И. Боровков, А.К. Абрамян // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 41–47.

38. Устойчивость морских трубопроводов, находящихся в донных грунтах, подверженных явлению разжижения / Т.И. Лаптева, М.Н. Мансуров, Д.Х. Чумарин, Л.А. Копаева // Газовая промышленность. – 2011. – № 13. – С. 98–101.

39. Левин Б.В. О сейсмическом механизме выталкивания валунов к поверхности грунта // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312, № 2. – С. 332–334.

40. Левин Б.В. Всплывание тяжелого шара в вибрирующем песке // Прикладная механика и техническая физика. – 1991. – № 3. – С. 85–87.

41. Федосеев В.Б. Закономерности распределения глыбового материала в осадочных породах. Маятник Челомея и зыбучие пески // Нелинейные колебания механических систем: тр. VIII Всерос. науч. конф., Н. Новгород, 22–26 сентября 2008. – Н. Новгород, 2008. – Т. 2.

42. Меро Дж. Минеральные богатства океана. – М.: Прогресс, 1969. – 440 с.

43. Горяинов И.Н., Горяинова Г.И. К вопросу о «непотопляемости» железомарганцевых конкреций // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 272, № 2. – С. 432–437.

44. Батурин Г.Н. Геохимия железомарганцевых конкреций океана. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

45. Баренблатт Г.И., Батурин Г.Н. О «непотопляемости» железомарганцевых конкреций и некоторых особенностях придонного слоя океана // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 308, № 1. – С 183–188.

46. Бараш М.С., Кругликова С.Б. Возраст радиолярий из железомарганцевых конкреций провинции Кларион-Клиппертон (Тихий океан) и проблема «непотопляемости» конкреций // Океанология. – М.: Наука, 1994. – 34 (6). – С. 890–904.

47. Каракин А.В., Лобковский Л.И. Механизм всплывания железомарганцевых конкреций // Геология морей и океанов: материалы XVII Междунар. конф. (Школы) по морской геологии. – М., 2007. – Т. II. – С. 127–130.

48. Блехман И.И., Васильков В.Б., Якимова К.С. О поведении твердых тел в вибрирующей сыпучей среде // Обогащение руд. – 2012. – № 4. – С. 21–24.

49. Блехман И.И., Хайнман В.Я. О теории вибрационного разделения сыпучих смесей // Изв. АН СССР, ОТН. Механика. – 1965. – № 5. – С. 22–30.

50. Павел П. Моаи учатся ходить // Вокруг света. – 1990. – № 3. – С. 12–16; № 4. – С. 38–42.

51. Хейердал Т. Аку-аку. Тайна острова Пасхи. – М.: Мысль, 1971.

52. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1964. – 410 с.

53. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 4. Вибрационные процессы и машины. – М.: Машиностроение, 1981. – 509 с.

References

1. Korotkin A.I. Issledovanie gidrodinamicheskoj harakteristiki vibronasosa VNL-1 [Research into hydrodynamic characteristics of VNL-1 vibropump]. *Nauchno-tehnicheskij otchjot CNII imeni A.N. Krylova*, 1993, no. 35288.

2. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics. (Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications). Singapore et al: World Scientific Publishing Co., 2000. 510 p.

3. Blekhman I.I., Vasilkov V.B., Yakimova K.S., Shishkina E.V. Generirovanie medlennyh potokov zhidkosti vibrirujushhim vblizi stenki diskom (k teorii vibracionnyh nasosov) [Generation of slow fluid flows by a vibrating wall adjacent disk (to the theory of vibrating pumps)]. *Obogashchenie rud*, 2001, no. 1, pp. 36-38.

4. Barenblatt G.I. O dvizhenii vzveshennyh chastic v turbulentnom potoke [On suspended particles motion in turbulent flows]. *Prikladnaja matematika i mehanika*, 1953, vol. 17, iss. 3, pp. 261-274.

5. Barenblatt G.I. O dvizhenii vzveshennyh chastic v turbulentnom potoke, zanimajushhem poluprostranstvo ili ploskij otkrytyj kanal konechnoj glubiny [On suspended particles motion in turbulent flows, enclosed within semi-space or an open flat channel of limited depth]. *Prikladnaja matematika i mehanika*, 1955, vol. 19, iss. 1, pp. 61-88.

6. Kril' I.S. Napornye vzvesenesushhie potoki [Pressure suspension flows]. Kiev: Naukova dumka, 1990. 160 p.

7. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Vaisberg L.A., Vasilkov V.B., Yakimova K.S. "Anomalous" phenomena in fluid under action of vibration. *Doklady Physics*. 2008, vol. 53, no. 10, pp. 520-524. doi: 10.1134/S1028335808100054.

8. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Vaisberg L.A., Vasilkov V.B., Yakimova K.S. Phenomenon of inversion of the stable states of "gas – fluid – "heavy" particles" system in the vibrating vessels. Proc. of 6-th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conf. (ENOC 2008). St. Petersburg, June 30-July 4, 2008. St. Petersburg, IPME RAS, 2008. Report ID 361.

9. Bjerknes V. Vorlesungen uber hydrodynamische Fernkrafte nach C.A. Bjerknes's Theorie. Leipzig: J.A. Barth. Band 1, 1900. 388 p.; Band. 2, 1902. 316 p., available at: (Bd. 1: http://resolver.library.cornell.edu/math/1968499; Bd. 2: http://resolver.library.cornell.edu/math/1968499a).

10. Bjerknes V.F.K. Fields of Force: a course of lectures in mathematical physics delivered December 1 to 23, 1905. New York: Columbia Univ. Press., 1906. 160 p., available at: http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=02780002&seq=1.

11. Bjerknes V.F.K. Die Kraftfelder. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1909. 174 p.

12. Bjerknes C.A. Hydrodynamische Fernkrafte. Funf Abhandlungen uber die Bewegung kugelformiger Korper in einer incompressiblen Flussigkeit (1863–1880). Leipzig: Verlag von W. Engelmann, 1915. 229 p.

13. Chelomej V.N. Paradoksy v mehanike, vyzyvaemye vibracijami [Vibration caused paradoxes in mechanics]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67.

14. Lugovcov B.A., Sennickij V.L. O dvizhenii tela v vibrirujushhej zhidkosti [On solids motion in vibrating fluid]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 2, pp. 314–317.

15. Kubenko V.D., Kuz'ma V.M., Puchka G.N. Dinamika sfericheskih tel v zhidkosti pri vibracii [Dynamics of spherical bodies in vibrating fluids]. Kiev: Naukova dumka, 1989. 156 p.

16. Kozlov V.G. Jeksperimental'noe issledovanie osrednennoj vibracionnoj dinamiki neszhimaemoj zhidkosti. Dissertacija na soiskanie uchionoj stepeni doktora fiziko-matematicheskih nauk [Experimental research into vibration dynamics of incompressible fluids. Doktor's degree dissertation]. Permskij gosdarstvennyj universitet, 1997. 250 p.

17. Ivanova A.A. Neodnorodnye sistemy v oscillirujushhih silovyh poljah. Jeksperimental'noe issledovanie. Dissertacija na soiskanie uchionoj stepeni doktora fiziko-matematicheskih nauk [Heterogeneous systems in oscillating force fields. Experimental study. Doktor's degree dissertation]. Permskij gosdarstvennyj universitet, 2000. 237 p.

18. Dojnikov A.A. Nelinejnaja dinamika dispersnyh chastic v akusticheskih poljah [Non-linear dynamics of disperce particles in acoustic fields]. *Sbornik nauchnyh trudov Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta «Fundamental'nye i prikladnye fizicheskie issledovanija 1986–2001»*. Minsk, 2001. 457 p.

19. *Sbornik nauchnyh trudov Permskogo gosudarstvennogo universiteta «Vibracionnye jeffekty v gidrodinamike»* [Vibration effects in hydrodynamics. Collection of Scientific Works of Perm State University]. Perm', 1998, iss. 1; 2001, iss. 2.

20. *Sbornik studencheskih nauchnyh trudov «Opyty po vibracionnoj mehanike»* [Experiments in vibration mechsanics: Collection of Student Scientific Works]. Permskij gosdarstvennyj pedagogicheskij universitet. Perm', 2001, 138 p.

21. Ljubimov D.V., Ljubimova T.P., Cherepanov A.A. Dinamika poverhnostej razdela v vibracionnyh poljah [Interfaces dynamics in vibrating fields]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 216 p.

22. *Sbornik nauchnyh trudov Permskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta «Konvektivnye techenija»* [Convection flows. Collection of Scientific Works of Perm State Teachers University]. Ed. V.G. Kozlov. Perm, 2005, iss. 2. 250 p.

23. Borisov A.V., Mamaev I.S., Ramodanov S.M. Dvizhenie dvuh sfer v ideal'noj zhidkosti. I. Uravnenija dvizhenija v evklidovom prostranstve. Pervye integraly i redukcija [Motion of two spheres in ideal fluid. I. Equations of motion in Euclide space. First integrals and reduction]. *Nelinejnaja dinamika*, 2007, vol. 3, no. 4, pp. 411-422.

24. Ganiev R.F., Ukrainskij L.E. Nelinejnaja volnovaja mehanika i tehnologii [Non-linear wave mechanics and engineering]. Moscow: R&C Dynamics, 2008. 711 p.

25. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Vasilkov V.B., Sorokin V.S., Yakimova K.S. Dvizhenie puzyr'ka gaza v kolebljushhejsja gazonasyshhennoj zhidkosti [Motion of gas bubble in oscillating gas-saturated fluid]. *Obogashchenie rud*, 2011, no. 5, pp. 30-37.

26. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Sorokin V.S., Vasilkov V.B., Yakimova K.S. Surface and volumetric effects in a fluid subjected to high-frequency vibration. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*. London, 2012, vol. 226, iss. 8. August, pp. 2028-2043. doi: 10.1177/0954406211433260.

27. Joukowski N.E. Obobshhenie zadachi B'jorknesa o gidrodinamicheskih silah, dejstvujushhih na pul'sirujushhie ili oscillirujushhie tela vnutri zhidkoj massy [Generalization of the Bjerknes problem of the hydrodynamic forces acting on pulsating and oscillating bodies immersed in a mass of fluid]. *Trudy Otdelenija fizicheskih nauk Obshhestva ljubitelej estestvoznanija*, 1896, vol. VIII, iss. 2. (Look also: Joukovskiy N.E. Collected Works. Vol. 2, GITTL Moscow-Leningrad. 1949. Pp. 670-688).

28. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Kuzaev A.F. Vibracionnaja podjomnaja sila, dejstvujushhaja na telo v zhidkosti vblizi tvjordoj poverhnosti [Vibrating lifting force acting on a body disposed adjacent a solid plane in fluid]. *Doklady Akademii nauk*, 2005, vol. 402, no. 4, pp. 488-491.

29. Kozlov N.V., Terehov E.V., Filonov V.M. Podnjatie i podves tjazhjologo tela v zhidkosti pri pomoshhi vibracii [Elevation and suspension of a heavy solid body in liquid by vibration]. *Sbornik studencheskih nauchnyh trudov Permskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta «Opyty po vibracionnoj mehanike».* 2001. 138 p. (Pp. 46-53).

30. Leahy A.H. On the pulsations of spheres in an elastic medium. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1889, vol. 14, pp. 45-62.

31. Zabolotskaja E.A. Vzaimodejstvie gazovyh puzyr'kov v pole zvukovoj volny [Interaction of gas bulbs in acoustic wave field]. *Akusticheskij zhurnal*, 1984, vol. 30, iss. 5, pp. 618-623.

32. Zavtrak S.T. K voprosu o sile vzaimodejstvija B'jorknesa dvuh gazovyh puzyr'kov v pole zvukovoj volny [On the issue of Bjerknes force for interaction of two gas bulbs in the acoustic wave field]. *Akusticheskij zhurnal*, 1987, vol. 33, no. 2, pp. 240-245.

33. Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C.D., Lauterborn W. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Physical Rewiew E*, 1997, vol. 56, no. 3, pp. 2924–2931.

34. Petrov A.G. Analiticheskaja gidrodinamika [Analytic hydrodynamics]. Moscow: Fizmatlit, 2009. 520 p.

35. Zen'kovskaja S.M., Novosjadlyj V.A. Vlijanie vertikal'nyh kolebanij na dvuhslojnuju sistemu s deformiruemoj poverhnost'ju razdela [Influence of vertical oscillations on bilaminar system with a non-rigid interface]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, 2008, vol. 48, no. 9, pp 1710-1720.

36. Borodavkin P.P., Sunargin A.H. Stroitel'stvo magistral'nyh truboprovodov v slozhnyh uslovijah [Construction of pipe mains in severe conditions]. Moscow: Nedra, 1965. 214 p.

37. Giljov Ye.Ye., Shubin S.N., Borovkov A.I., Abramjan A.K. Modelirovanie gidrodinamicheskogo vozdejstvija na podvodnyj gazoprovod v transhee s razzhizhennym gruntom [Simulation of hydrodynamic influence on submerged gas pipe in a diluted ground trench]. *Vychislitel'naja mehanika sploshnyh sred*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 41-47.

38. Lapteva T.I., Mansurov M.N., Chumarin D.H., Kopaeva L.A. Ustojchivost' morskih truboprovodov, nahodjashhihsja v donnyh gruntah, podverzhennyh javleniju razzhizhenija [Stability of sea pipes laid in grounds apt to be liquefied]. *Gazovaja promyshlennost'. Dobycha uglevodorodov na shel'fe*, 2011, no. 33, pp. 98-101.

39. Levin B.V. O sejsmicheskom mehanizme vytalkivanija valunov k poverhnosti grunta [On seismic mechanism of boulders expulsion to the ground surface]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1990, vol. 312, no. 2, pp. 332-334.

40. Levin B.V. Vsplyvanie tjazhelogo shara v vibrirujushhem peske [Surfacing of a heavy ball in vibrating sand]. *Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika*, 1991, no. 3, pp. 85-87.

41. Fedoseev V.B. Zakonomernosti raspredelenija glybovogo materiala v osadochnyh porodah. Majatnik Chelomeja i zybuchie peski [The order for distribution of boulders in sedimentary rocks. Chelomey pendulum and shifting sands]. *Trudy VIII Vserossijskoij nauchnoij konferencii «Nelinejnye kolebanija mehanicheskih system»*, vol. 2, Sept. 22-26, Nizhniy Novgorod, 2008.

42. Mero J. Mineral'nye bogatstva okeana [The Mineral Resources of the sea]. Moscow: Progress, 1969. 440 p.

43. Gorjainov I.H., Gorjainova G.I. K voprosu o «nepotopljaemosti» zhelezomargancevyh konkrecij [On unsinkability of sea ferromanganese nodules]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1983, vol. 272, no. 2, pp. 432-437.

44. Baturin G.N. Geohimija zhelezomargancevyh konkrecij okeana [Geochemistry of ocean ferromanganese nodules]. Moscow: Nauka, 1986. 328 p.

45. Barenblatt G.I., Baturin G.N. O «nepotopljaemosti» zhelezomargancevyh konkrecij i nekotoryh osobennostjah pridonnogo sloja okeana [On unsinkability of ocean ferromanganese nodules and particulars of ocean near-bottom layers]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1989, vol. 308, no. 1, pp. 183-188.

46. Barash M.S., Kruglikova S.B. Vozrast radioljarij iz zhelezomargancevyh konkrecij provincii Klarion-Klipperton (Tihij okean) i problema «nepotopljaemosti» konkrecij [The age of radiolarians from ferromanganese nodules in Clarion-Clipperton region (Pacific) and the unsinkability problem of sea concretions]. *Oceanologia.* Moscow: Nauka, 1994, vol. 34 (6), pp. 890-904.

47. Karakin A.V., Lobkovskij L.I. Mehanizm vsplyvanija zhelezo-margancevyh konkrecij [The mechanism of ferromanganese nodules floating]. *Materjaly XVII mezhdunarodnoij konferencii (Shkoly) po morskoij geologii* «*Geologija morej i okeanov*», vol. II. Moscow, 2007, pp. 127-130.

48. Blekhman I.I., Vasilkov V.B., Yakimova K.S. O povedenii tvjordyh tel v vibrirujushhej sypuchej srede [Upon behavior of solids in the vibrating loose medium]. *Obogashchenie rud*, 2012, no. 4, pp. 21-24.

49. Blekhman I.I., Hajnman V.Ja. O teorii vibracionnogo razdelenija sypuchih smesej [On the theory of vibrating separation of bulk mixtures]. *Izvestija Akademii nauk SSSR, Otdelenie tehnicheskih nauk. Mehanika*, 1965, no. 5, pp. 22-30.

50. Pavel P. Moai uchatsja hodit' [Moai learn how to walk]. *Vokrug sveta*, 1990, no. 3, p. 12-16; no. 4, p. 38-42.

51. Heyerdahl T. Aku-Aku. Aku-aku. Tajna ostrova Pashi [The mystery of Easter Isl.]. Moscow: Mysl', 1971.

52. Blekhman I.I., Dzhanelidze G.Ju. Vibratsionnoye peremeshcheniye [Vibration displacement]. Moscow: Nauka, 1964. 410 p.

53. Vibracii v tehnike: Spravochnik v shesti tomah. Tom 4. Vibracionnye processy i mashiny [Vibration in engineering. Reference book in 6 volumes. Vol. 4. Vibrating processes and machines]. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 509 p.

Об авторе

Блехман Леонид Ильич (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Лаборатории вибрационной механики (совместной лаборатории Института проблем машиноведения РАН и НПК «Механобр-техника») (199178, Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой пр., 61, e-mail: liblekhman@yandex.ru).

About the author

Blekhman Leonid Ilyich (St. Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Senior researcher of Laboratory of Vibrational Mechanics – Joint Laboratory of the Institute of Problems in Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences and Mechanobr-Tekhnika Research and Engineering Corporation, (61, V.O., Bolshoj av., 199178, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: liblekhman@yandex.ru).

Получено 05.03.13