УДК 517.929

А.С. БАЛАНДИН
Пермский государственный технический университет

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа. Получен эффективный достаточный признак экспоненциальной устойчивости решения.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных действительных чисел, $\Delta = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : \ t \geq s\right\}$, L_∞ – пространство функций измеримых и ограниченных в существенном на $\mathbb{R}_+$, $L_p \left(1 \leq p < \infty\right)$ – пространство измеримых функций с нормой $\|y\| = \left(\int\limits_0^\infty |y(s)|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}}$, оператор S_h, определенный для $h \in \mathbb{R}_+$ равенством [1, с. 20]

$$\left(S_h y\right)(t) = \begin{cases} y(t-h) \ , & t-h \geq 0, \\ 0 \ , & t-h < 0. \end{cases}$$

Отметим, что степень оператора S_h определяется выражением

$$\left(S_h^k y\right)(t) = \left(S_{kh} y\right)(t) = \begin{cases} y(t-kh) \ , & t-h \geq 0, \\ 0 \ , & t-h < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$\left(E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j\right) \dot{x}(t) = \left(\sum_{m=0}^{M} b_m S_{r_m}\right) x(t) + f(t) \, , \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}_0$, $a_j, b_m, r_m, h \in \mathbb{R}_+$, функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке $[0, l]$.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке $[0, l]$ функцию $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно [1, с. 84, теорема 1.1], уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t C(t,s) f(s) ds \, , \tag{2}$$

где $X:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $C:\Delta\to\mathbb{R}$ – *функцией Коши* уравнения (1).

В работе устанавливаются условия, при которых уравнение (1) является *экспоненциально устойчивым*, то есть существуют такие $N,\alpha>0$, что функция Коши и фундаментальное решение уравнения (1) имеют следующие экспоненциальные оценки:

$$\left|X(t)\right|\le Ne^{-\alpha t},\quad \left|C(t,s)\right|\le Ne^{-\alpha(t-s)}. \tag{3}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\dot{x}(t)=\left(\sum_{m=0}^{\infty}b_m S_{r_m}\right)x(t),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где $0\le r_m\le\rho_0+\rho_1 m$, $0\le b_m\le\beta_0 e^{-\beta_1 m}$, $\rho_0,\rho_1,\beta_0,\beta_1>0$. Разрешимость уравнения (4) также понимается в классе локально абсолютно непрерывных функций.

Найдем достаточные условия экспоненциальной устойчивости уравнения (4).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{m=0}^{\infty}b_m r_m<\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Тогда найдутся такие $N,\alpha>0$, *что фундаментальное решение уравнения (4) имеет экспоненциальную оценку*

$$\left|X(t)\right|\le Ne^{-\alpha t}. \tag{6}$$

Перед доказательством теоремы обоснуем возможность применения преобразования Лапласа к уравнению (4) и докажем вспомогательные леммы 1, 2 о свойствах полученных Лаплас-образов. Известно, что [2] фундаментальное решение уравнения (4) имеет экспоненциальную оценку $\left|X(t)\right|\le N_1 e^{\alpha_1 t}$, $N_1,\alpha_1>0$. Тогда, если на любом конечном отрезке $[0,l]$ ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}b_m X(t-r_m)$ будет равномерно сходиться к его сумме $S(t)$, то сумма $S(t)$ является непрерывной функцией на каждом конечном отрезке $[0,l]$, а значит, и на всей оси. Очевидно, что $S(t)=0,\ t<0$ и $\left|S(t)\right|\le N_2 e^{\alpha_2 t}$, $t\ge 0, N_2,\alpha_2>0$. Следовательно, к сумме ряда $S(t)$ применимо преобразование Лапласа. Оценим изображение остатка этого ряда для $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}p_0>\alpha_1$:

$$\left|\int_0^{\infty}\sum_{m=m_0}^{\infty}b_m X(t-r_m)e^{-pt}dt\right|\le\int_0^{\infty}\sum_{m=m_0}^{\infty}b_m N_1 e^{(\alpha_1-\operatorname{Re}p)t-r_m}dt\le\frac{1}{\alpha_1-\operatorname{Re}p_0}\sum_{m=m_0}^{\infty}b_m N_1 e^{-\alpha_1 r_m}.$$

Очевидно, что в области $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0$ изображение остатка ряда $\sum\limits_{m=m_0}^{\infty} b_m X(t-r_m)$ можно сделать сколь угодно малым при $m_0 \to \infty$, то есть знаки интеграла и суммы можно переставлять местами. Применим преобразование Лапласа к уравнению (4), получим $pX_0(p) - 1 = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m X_0(p) e^{-pr_m}$, откуда $X_0(p) = \left(p - \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m e^{-pr_m} \right)^{-1}$.

Обозначим
$$\varphi(p) = p + \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{-pr_m},$$
$$d_\varepsilon = \{ p \in \mathbb{C} : -\varepsilon \leq \operatorname{Re} p < 0 \}, \; D_\varepsilon = \{ p \in \mathbb{C} : -\varepsilon \leq \operatorname{Re} p \}.$$

Лемма 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (4) *удовлетворяют соотношению* (5). *Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что в области* D_ε *функция* φ *аналитична и не имеет нулей.*

Доказательство. Разделим область D_ε на две подобласти: правую полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq 0$ и полосу d_ε. Покажем аналитичность и отсутствие нулей функции φ в обеих областях.

Рассмотрим правую комплексную полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$. Аналитичность функции φ в этой области вытекает из сходимости ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m$. Покажем, что функция φ не обращается в нуль. Для этого используем доказательство теоремы 3.2.1 из работы [3] и перенесем его на случай, когда функция φ является заданным функциональным рядом.

Пусть p движется по контуру K_R комплексной плоскости, содержащему отрезок $I_R : p = -i\omega, (-R \leq \omega \leq R)$, и полуокружность $C_R : p = Re^{i\omega}, \left(-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

По принципу аргумента для доказательства достаточно показать, что $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \to 0$ при движении p по K_R при $R \to \infty$. Это будет означать отсутствие корней φ в правой полуплоскости. Очевидно, $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \to \pi$ при движении p по C_R, если $R \to \infty$. Рассмотрим движение по отрезку $p = -i\omega, (0 \leq \omega \leq R)$. Обозначим
$$u(\omega) = \operatorname{Re} \varphi(-i\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos(\omega r_m), \qquad v(\omega) = \operatorname{Im} \varphi(-i\omega) = -\omega + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin(\omega r_m).$$

Покажем, что из условий $u(\omega) = 0$, $\omega > 0$ следует $v(\omega) < 0$, ибо тогда $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \to -\dfrac{\pi}{2}$ при движении p по отрезку $p = -i\omega, (0 \leq \omega \leq R)$, $R \to \infty$ и вследствие симметрии $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \to -\pi$ на I_R, а поэтому $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \to 0$ на K_R.

Очевидно, что выполняется неравенство $t + \cos t - \dfrac{\pi}{2} \sin t \geq 0, \; t \geq 0$. Пусть $u(\omega) = 0$. Подставляя в неравенство $t = \omega r_m$, умножая обе части неравенства на b_m, просуммируем по m от 0 до ∞, имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m r_m \omega + \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos(\omega r_m) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin(\omega r_m) \ge 0 .$$

Так как $\sum_{m=0}^{\infty} b_m r_m < \frac{\pi}{2}$ и $u(\omega) = 0$, то получим $\omega - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin(\omega r_m) > 0$, вследствие чего $v(\omega) < 0$ и функция φ не имеет нулей в правой полуплоскости.

Теперь зафиксируем любое $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{\beta_1}{\rho_1}\right)$ и рассмотрим область d_{ε_0} на комплексной плоскости. В этой области оценим ряд

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{-p r_m} \right| \le \sum_{m=0}^{\infty} \left| b_m e^{-p r_m} \right| \le \sum_{m=0}^{\infty} \beta_0 e^{-\beta_1 m} e^{\varepsilon_0 (\rho_0 + \rho_1 m)} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_0 e^{\varepsilon_0 \rho_0} e^{-(\beta_1 - \varepsilon_0 \rho_1) m} .$$

Этот ряд сходится равномерно относительно p, следовательно, функция φ аналитична. Заметим, что φ имеет конечное число нулей в области d_{ε_0}, так как $|\varphi(p)| \to \infty$ при $|p| \to \infty$. Осталось выбрать $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ так, чтобы в области d_ε у функции φ нулей не было, следовательно, функция φ аналитична в области D_ε и не имеет нулей. ▲

Лемма 2. *Пусть в области* D_ε, $\varepsilon > 0$, *функция* $g(p)$ *аналитична и ограничена, а функция* $p + g(p)$ *не имеет нулей. Тогда имеет место оценка интеграла*

$$\left| \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{e^{pt}}{p + g(p)} dp \right| \le N e^{-\varepsilon t} . \tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что для любого $b < 0$ интеграл $\int_{b - i\infty}^{b + i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp$ сходится [4, с. 464–465] и равен нулю. Отсутствие нулей у функции $p + g(p)$ гарантирует конечное значение интеграла (7) вдоль любого конечного отрезка интегрирования. Оценим интеграл вдоль всей прямой интегрирования

$$\left| \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{e^{pt}}{p + g(p)} dp - \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp \right| \le \left| \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{g(p)}{(p + g(p))\, p} e^{pt} dp \right| \le$$

$$\le e^{-\varepsilon t} \int_{-\varepsilon - i\infty}^{-\varepsilon + i\infty} \frac{|g(p)|\, d(\operatorname{Im} p)}{|p + g(p)|\,|p|} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| O\left((\operatorname{Im} p)^{-2} \right) \right| d(\operatorname{Im} p) \right) e^{-\varepsilon t} = N e^{-\varepsilon t} . ▲$$

Доказательство теоремы 1.

По лемме 1 существует такое $\varepsilon > 0$, что в области D_ε функция φ аналитична и не имеет нулей, причем функция $g(p) = \varphi(p) - p$ аналитична и ограничена, то есть функция $g(p)$ удовлетворяет условиям леммы 2. По лемме 2 имеет место оценка интеграла (7), который с точностью до постоянного коэффициента является формулой обращения изображения $X_0(p) = (\varphi(p))^{-1}$ решения уравнения (4). Получим оценку фундаментального решения X уравнения (4)

$$\left|X(t)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{e^{pt}}{\varphi(p)}dp\right| \le Ne^{-\varepsilon t}.\blacktriangle$$

Как показано в работе [5], необходимым условием экспоненциальной устойчивости уравнения (1) является ограниченная обратимость оператора при производной в пространстве L_1. Покажем, что ограниченная обратимость оператора при производной в уравнении (1)

$$E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_{jh} \tag{8}$$

в пространстве L_1 влечет ограниченную обратимость этого оператора в любом пространстве L_p $(1 \le p \le \infty)$ и определяется расположением относительно единичного круга $|z| \le 1$ корней характеристического многочлена

$$1 - \sum_{j=1}^{J} a_j z^j . \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть* $S_r : L_p \to L_p$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда* $\sigma(S_r) = \{|\lambda| \le 1, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Доказательство. Множество $\sigma(S_r) = \sigma_p(S_r) \cup \sigma_c(S_r)$, где $\sigma_p(S_r)$ и $\sigma_c(S_r)$ соответственно точечный и непрерывный спектр.

При $\lambda \ne 0$ уравнение $\lambda y(t) - S_r y(t) = 0$ имеет только тривиальное решение: $y(t) = 0$; при $\lambda = 0$ уравнение $S_r y(t) = 0$ имеет нетривиальное решение. Таким образом, $\sigma_p(S_r) = \{0\}$.

Рассмотрим уравнение $\lambda y(t) - S_r y(t) = f(t)$ при $\lambda \ne 0$. Легко видеть, что его решение представимо в виде $y(t) = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{\left(S_{rj} f\right)(t)}{\lambda^j}$.

Рассмотрим случай $|\lambda| < 1$. Пусть $f(t) = \lambda^{\left[\frac{t}{r}\right]}$, очевидно, что для любого $p \ge 1$ имеем $\|f\|_p = \int\limits_0^{\infty} |f(t)|^p\, dt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{kp} < \infty$, то есть $f \in L_p$.

Оценим функцию $y(t)$

$$|y(t)| = \left|\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{[t/r]}\frac{\lambda^{[t/r]-j}}{\lambda^j}\right| = \left|\frac{1}{\lambda^{[t/r]+1}}\frac{1-\lambda^{2[t/r]+2}}{1-\lambda^2}\right| \ge \frac{1}{|\lambda|^{[t/r]+1}}\frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}.$$

Следовательно, $\|y\|_p = \int\limits_0^{\infty}|y(t)|^p\, dt \ge \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^{k+1}}\frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2} \to \infty$, то есть $y \notin L_p$, и множество $\{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \sigma_c(S_r)$.

Так как спектр – замкнутое множество [6, с. 220], тогда граница множества $\{|\lambda|<1, \lambda \in \mathbb{C}\}$ – единичная окружность – тоже принадлежит спектру. При $|\lambda|>1$ и любой $f \in L_p$ получим

$$\|y(t)\|_p = \left\| \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(S_{rj} f\right)(t)}{\lambda^j} \right\|_p \le \left|\frac{1}{\lambda}\right| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left\|\left(S_{rj} f\right)(t)\right\|_p}{|\lambda|^j} \le \left|\frac{1}{\lambda}\right| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|f\|_p}{|\lambda|^j} = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|f\|_p \frac{1}{1-|\lambda|} < \infty ,$$

то есть $y \in L_p$; значит, в силу теоремы Банаха об обратном операторе [6, с. 213] все $|\lambda|>1$ являются регулярными, а $\sigma(S_r) = \{|\lambda| \le 1, \lambda \in \mathbb{C}\}$. ▲

Лемма 4.[7] *Оператор* (8) *представим в виде произведения:*

$$E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_{jh} = E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j = a_J \prod_{j=1}^{J} (\lambda_j E - S_h) .$$

где λ_j *– корни многочлена* (9).

Лемма 5.[7] *Оператор* (8) *обратим тогда и только тогда, когда обратимы все операторы* $\left(\lambda_j E - S\right)$, *где* λ_j *– корни многочлена* (9), $j = 1, 2, ..., J$.

Пользуясь леммами 3, 4, 5, легко получим следующую теорему.

Теорема 2. *Для любого* $1 \le p \le \infty$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1. *оператор* $\left(E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_{rj}\right)$ *имеет в пространстве* L_p *ограниченный обратный;*

2. *оператор* $(\lambda E - S_r)$, *где* λ *– любой корень многочлена* (9), *имеет в пространстве* L_p *ограниченный обратный;*

3. *все корни многочлена* (9) *расположены вне единичного круга* $|z| \le 1$.

Таким образом, требование ограниченной обратимости оператора (8) в пространстве L_1 можно заменить любым утверждением теоремы 2, каждое из которых является необходимым условием экспоненциальной устойчивости.

Обозначим $$F(z) = \left(1 - \sum_{j=1}^{J} a_j z^j\right)^{-1} .$$

Теорема 3. *Пусть выполнено любое из утверждений теоремы* 2 *и*

$$\dot{F}(1) h \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) + F(1) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m r_m\right) < \frac{\pi}{2} . \tag{10}$$

Тогда уравнение (1) *является экспоненциально устойчивым.*

Доказательство. Выберем R так, чтобы $1 < R < |\lambda|$, где λ – минимальный по модулю корень многочлена (9), по теореме 2 $|\lambda| > 1$. Следовательно, функция F аналитична в круге $|z| \leq R$, представима в виде ряда Тейлора

$$F(z) = \left(1 - \sum_{j=1}^{J} a_j z^j\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{J} a_j z^j\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} z^k , \qquad (11)$$

и для коэффициентов ряда выполнены неравенства Коши [4, с. 58–59]

$$\left|\frac{F^{(k)}(0)}{k!}\right| \leq MR^{-k} . \qquad (12)$$

Рассмотрим оператор при производной уравнения (1). Построим к нему обратный

$$\left(E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_{jh}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} S_h^k . \qquad (13)$$

Подействуем на обе части уравнения (1) оператором (13) и перепишем уравнение (1) в виде (4):

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} S_{kh}\left(\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m S_{r_m}\right) x(t) + f(t)\right), \quad t \in \mathbb{R}_+ ,$$

Далее, меняя порядок суммирования, имеем

$$\dot{x}(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} b_m S_{kh+r_m} x(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} S_{kh} f(t) , \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

Применяя теорему 1, получим достаточное условие экспоненциальной оценки (6) фундаментального решения уравнения (1).

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} b_m \left(kh + r_m\right) < \frac{\pi}{2} .$$

Для того чтобы привести это неравенство к виду (10), осталось поменять порядок суммирования и использовать соотношение (11):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} kh \sum_{m=0}^{\infty} b_m + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} b_m r_m < \frac{\pi}{2} .$$

Как показано в работе [8], между фундаментальным решением и функцией Коши уравнения (1) существует следующая связь:

$$X(t) = \left(E - \sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j\right) Y(t), \quad Y(t-s) = C(t,s) .$$

Подействуем на фундаментальное решение X оператором (13), используя (12) и (6), оценим значение функции Y при $k_0 h \leq t < k_0 h + h$:

$$|Y(t)| = \left| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} S_h^k \right) X(t) \right| \le \sum_{k=0}^{k_0} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} |X(t-kh)| \le \sum_{k=0}^{k_0} \frac{M}{R^k} N e^{-\alpha(t-kh)} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha(t-k_0 h)} N}{R - e^{\alpha h}} \left(\frac{R}{e^{\alpha k_0 h}} - \frac{e^{\alpha h}}{R^{k_0}} \right) = N_1 e^{-\alpha t} + N_2 R^{-t}.$$

Переобозначая $\alpha = \ln R$, если $\ln R < \alpha$, получим экспоненциальную оценку функции Коши уравнения (1). Следовательно, в условиях ограниченной обратимости оператора (8) получается, что для уравнения (1) из экспоненциальной оценки фундаментального решения следует экспоненциальная оценка функции Коши. ▲

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 230 с.
3. Вагина М.Ю., Локальная устойчивость некоторых видов логистического уравнения динамики популяции с запаздываниями: дис. … канд. физ.-мат. наук. – Челябинск, 2004. – 97 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного: учеб. пособие для ун-тов. – 5-е изд. – М.: Наука, 1987. – С. 688.
5. Симонов П.М., Чистяков А.В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем // Изв. вузов. Математика. 1997. – № 6. – С. 37–49.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
7. Баландин А.С, Малыгина В.В. О разрешимости одного класса разностных уравнений // Вестник ПГТУ. – 2006. – № 4. – С. 67–72.
8. Баландин А.С., Малыгина В. В., Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2007. – № 7 – С.17–27.

Получено 01.05.2009.