

УДК 539.3

**В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гульяев**

Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА БАУШИНГЕРА  
И ГРАНИЦЫ ТЕКУЧЕСТИ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ  
ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕТАЛЛОВ**

Представлены результаты опыта на многократное знакопеременное нагружение при растяжении-сжатии тонкостенного трубчатого образца из стали 45 на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ. Дана экспериментальная оценка эффекта Баушингера и влияния на него различных допусков на остаточную деформацию. Исследуется влияние допуска на остаточную деформацию при определении вторичных пределов текучести, а также на радиус-функцию и положение центра гипотетической поверхности текучести в пространстве напряжений, используемой в теории пластического течения. По результатам проведенного исследования установлено, что с ростом допуска на остаточную деформацию параметр, характеризующий эффект Баушингера, и радиус-функция поверхности текучести увеличиваются, а смещение ее центра уменьшается. Показано, что параметр, характеризующий эффект Баушингера, уменьшается с ростом длины дуги пластического деформирования и стремится к некоторому стационарному значению. Экспериментально установлено, что для стали 45 смещение центра поверхности текучести увеличивается с ростом длины дуги пластического деформирования. Также установлено, что радиус сферической поверхности текучести совершает временное понижение, а затем с ростом длины дуги пластического деформирования увеличивается. При этом в некоторых математических моделях теории пластического течения временное убывание радиуса поверхности текучести (сужение поверхности текучести) в начале процесса пластического деформирования не связывают с определением пределов текучести по допуску на остаточную деформацию.

**Ключевые слова:** пластичность, упругость, сложное нагружение, эффект Баушингера, поверхность текучести, процессы деформирования.

**V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gulyaev**

Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

**EXPERIMENTAL STUDY OF BAUSHINGER EFFECT  
AND YIELD SURFACE AT ELASTOPLASTIC  
DEFORMATION OF METALS**

This work contains results of the experimental investigation on repeated sign-variable loading at stretching compression of a thin-walled tubular specimen from steel 45 in an automatized computational and experimental installation SN-EVM. Also presents the results of the experimental assessment of the

Bauschinger effect and the influence of various admissions on residual deformation on it. The influence of the admission on residual deformation on definition of secondary offset yield stress was investigated, as well as on initial and subsequent radius function and position of the center of a hypothetical spherical yield surface in stress space in the plastic-flow theory. According to the results of the investigation, the parameter characterizing the Bauschinger and the radius function of the yield surface increase on the increase of admission on residual deformation effect, yet the displacement of the center of the yield surface decreases. It is shown that the parameter characterizing the Bauschinger effect decreases on the increase of the length of the arc of plastic deformation and tends to a stationary value. It is experimentally discovered that for steel 45 the displacement of the center of the yield surface increases on the increase of the length of the arc of plastic deformation. It is also established that the radius of the spherical yield surface lowers temporary, and then increases on the increase of the length of the arc of plastic deformation radius. Thus, in some mathematical models of plastic-flow theory temporary decrease of the radius of the yield surface (contraction of the yield surface) at the beginning of the process of plastic deformation is not associated with the definition of the yield stress for the admission on residual deformation.

**Keywords:** plasticity, elasticity, complex loading, Bauschinger effect, the yield surface, the deformation processes.

В теории пластичности тензоры напряжений и деформаций представляют [1–5] в виде

$$\mathbf{T}_\sigma = (\sigma_{ij}) = \sigma_0(\delta_{ij}) + (S_{ij}), \quad \mathbf{T}_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_0(\delta_{ij}) + (\mathcal{E}_{ij}), \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;

$$\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii} / 3, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

– средние напряжение и деформация (компоненты шаровых тензоров);

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

– компоненты тензоров-девиаторов напряжений и деформаций соответственно.

Тензорам напряжений и деформаций (1) в линейном тензорно-координатном евклидовом пространстве  $E_6$  поставлены в соответствие векторы напряжений и деформаций [1–5]:

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^0 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \bar{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \quad (4)$$

где

$$\bar{\mathbf{S}}^0 = S_0 \hat{\mathbf{i}}_0, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \mathcal{E}_0 \hat{\mathbf{i}}_0 \quad (5)$$

– векторы напряжений и деформаций объемного растяжения и сжатия;

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = S_k \hat{\mathbf{i}}_k, \quad \bar{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}_k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 5) \quad (6)$$

– векторы напряжений и деформаций формоизменения в пятимерном девиаторном подпространстве  $E_5$ ;  $\{\hat{\mathbf{i}}_k\}$  – ортонормированный фиксированный базис А.А.Ильюшина тензорно-координатного подпространства  $E_5$ ;

$$\begin{cases} S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{22} - S_{33}), S_3 = \sqrt{2}S_{12}, S_4 = \sqrt{2}S_{23}, S_5 = \sqrt{2}S_{13}, \\ \Theta_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \Theta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\Theta_{11}, \Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_{22} - \Theta_{33}), \Theta_3 = \sqrt{2}\Theta_{12}, \Theta_4 = \sqrt{2}\Theta_{23}, \Theta_5 = \sqrt{2}\Theta_{13} \end{cases} \quad (7)$$

– компоненты векторов напряжений и деформаций.

Модули векторов напряжений и деформаций в пятимерном подпространстве формоизменения  $E_5$  равны модулям тензоров-девиаторов:

$$\begin{aligned} \sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Theta = \sqrt{\Theta_k \Theta_k} = \sqrt{\Theta_{ij} \Theta_{ij}}, \\ (k = 1, 2, \dots, 5), (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

В теории пластического течения вводятся две основополагающие гипотезы [3, 6]. Первая гипотеза состоит в разложении тензора-девиатора деформаций на упругие  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластические  $\varepsilon_{ij}^p$  части, что позволяет ввести понятие о мгновенной гипотетической поверхности текучести  $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\Theta}}^p) = 0$ , разделяющей в подпространстве формоизменения  $E_5$  область активного пластического деформирования и область упругой разгрузки [3, 6] (рис. 1). Принцип градиентальности Драккера позволяет определить приращения векторов упругих и пластических деформаций [6] для активного и пассивного процессов деформирования соответственно.

$$\begin{cases} d\bar{\boldsymbol{\Theta}}^e = \frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{2G}, \quad d\bar{\boldsymbol{\Theta}}^p = d\lambda \mathbf{grad} f, \quad (d\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{grad} f > 0), \\ d\bar{\boldsymbol{\Theta}}^e = \frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{2G}, \quad d\bar{\boldsymbol{\Theta}}^p = 0, \quad (d\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{grad} f < 0). \end{cases} \quad (9)$$

Вторая гипотеза относится к возможности разложения полного вектора напряжений (рис. 1) [6–8]:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^0 + \bar{\mathbf{a}}, \quad (10)$$

где  $\bar{\sigma}^0$  – вектор активных напряжений;  $\bar{a}$  – вектор добавочных остаточных микронапряжений в  $E_5$ .

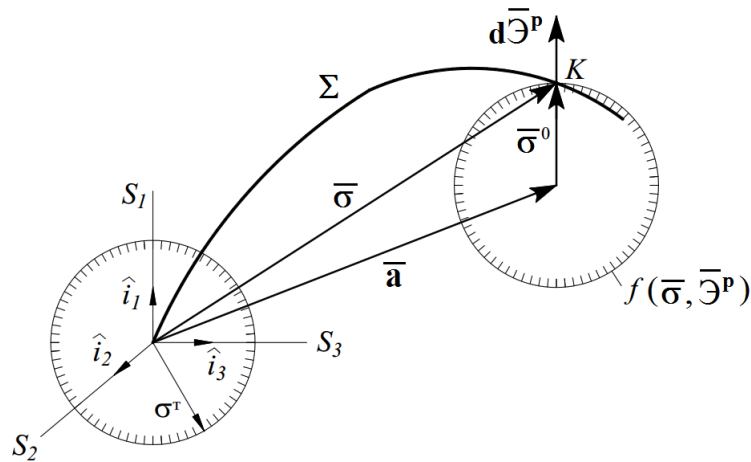


Рис. 1. Разложение полного вектора напряжений в  $E_5$

Математические модели (определяющие соотношения) теории течения отличаются формой поверхности текучести. В наиболее распространенном на практике варианте теории с трансляционно-изотропным упрочнением материала она имеет форму сферы:

$$2f = \bar{\sigma}^0 \cdot \bar{\sigma}^0 - C_p^2(s^p) = 0, \quad (11)$$

которая может изменять свои размеры и местоположение [6–8]. Здесь  $\sigma^0 = C_p(s^p)$  – скалярная функция изотропного упрочнения, равная радиусу поверхности текучести;  $s^p$  – длина дуги траектории пластического деформирования. В начальном состоянии при  $s^p = 0$  радиус гипотетической начальной поверхности текучести  $\sigma^0 = \sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$  (см. рис. 1), где  $\sigma_T$  – начальный предел текучести при простом нагружении, определяемый по техническому допуску на остаточную деформацию  $\bar{E}_*^p \approx \sqrt{3/2} \varepsilon_{11}^p = 0,245\%$  ( $\varepsilon_*^p = 0,2\%$ ). Принимается универсальный закон упрочнения Одквиста–Ильюшина

$$\sigma = \Phi(s), \quad (12)$$

мало отличающийся от закона единой кривой при простом нагружении  $\sigma = \Phi(\bar{E})$ . За новый предел текучести принимается точка  $K$  начала разгрузки (12).

Эффект Баушингера при знакопеременном нагружении в  $E_5$  оценивается [9] безразмерным параметром

$$\gamma = \left| \sigma_M^T \right| / \sigma_K^T \quad (13)$$

при соответствующей величине дуги траектории пластического деформирования  $s^P$ , где  $\sigma_K^T$  – новый предел текучести на диаграмме растяжения в некоторой точке  $K$  начала разгрузки;  $\sigma_M^T$  – вторичный предел текучести при разгрузке из той же точки  $K$  при «протыкании» поверхности текучести по диаметральному направлению в результате излома траектории на  $180^\circ$  в  $E_5$ , определяемый по допуску на остаточную деформацию  $\mathcal{E}_*^P$ . Радиус  $\sigma^0 = C_p$  гипотетической текущей сферической поверхности текучести, изменяющийся в результате пластического деформирования [3, 10] при условии сохранения ее формы

$$\sigma^0 = C_p = \frac{\sigma_K^T - \sigma_M^T}{2}, \quad (14)$$

а смещение ее центра

$$a = \sigma_K^T - C_p = \frac{\sigma_K^T + \sigma_M^T}{2}. \quad (15)$$

Экспериментальное исследование функций  $\sigma^0 = C_p(s^P)$  и  $a(s^P)$  проводилось в опыте при знакопеременном нагружении-разгрузении на автоматизированном испытательном комплексе на сложное нагружение СН-ЭВМ им. А.А.Ильюшина в лаборатории механических испытаний кафедры «Сопrotивление материалов, теория упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. В опыте использовался тонкостенный трубчатый образец из стали 45 в состоянии поставки с площадкой текучести, который имел толщину стенки  $h = 1$  мм, радиус срединной поверхности поперечного сечения  $R = 15,5$  мм и длину рабочей части  $l = 110$  мм. В результате испытания образец подвергался многократному знакопеременному нагружению через равные приращения  $\Delta\mathcal{E}_1 = 0,5\%$  при растяжении (рис. 2, 3), с последующим знакопеременным нагружением на  $|\Delta\mathcal{E}| \approx 0,75 - 0,9\%$  при сжатии. Опыт в режиме непрерывного деформирования продолжался

в течение 8 часов. На рис. 4 представлены полученные опытные зависимости параметра  $\gamma$  от длины дуги траектории пластического деформирования  $s^P$ , характеризующие эффект Баушингера, на рис. 5 – изменение радиуса  $\sigma^0$  гипотетической сферической поверхности текучести, а на рис. 6 – график смещения центра гипотетической сферической поверхности текучести в зависимости от параметра  $s^P$ . Все представленные зависимости построены при различных допусках на остаточную деформацию  $\varepsilon_*^P = 0,2; 0,1; 0,05; 0,025\%$ , что в  $E_5$  составляет  $\mathcal{E}_*^P = 0,245; 0,1225; 0,06125; 0,030625\%$  соответственно.

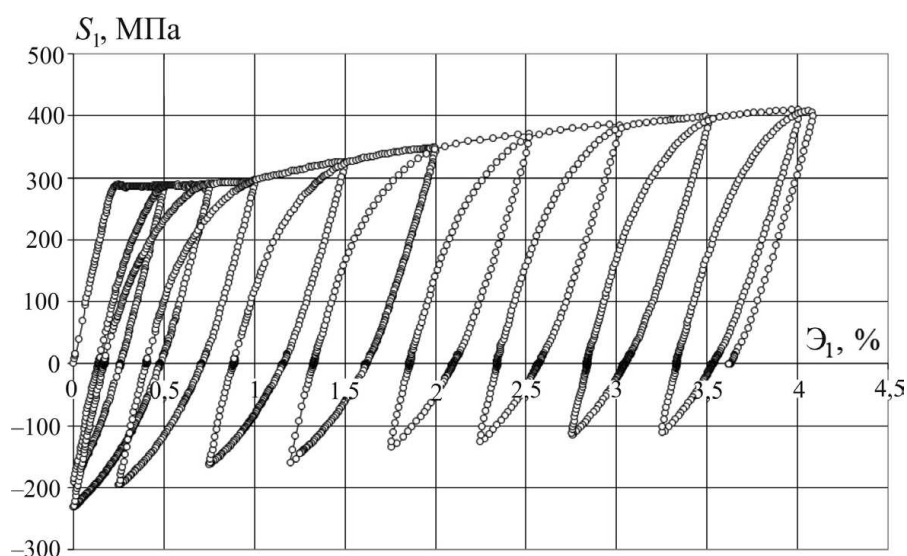


Рис. 2. Локальная диаграмма знакопеременного нагружения  $S_1 - \mathcal{E}_1$

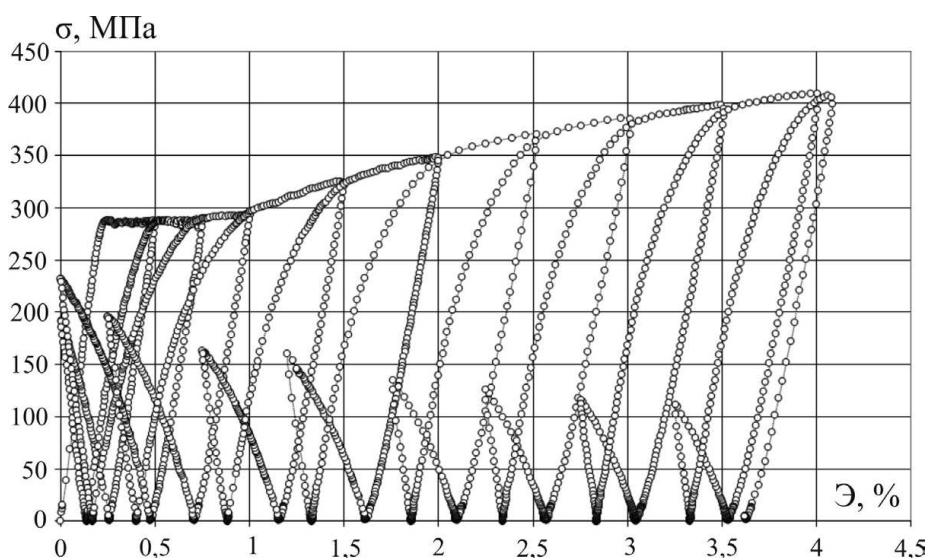


Рис. 3. Глобальная диаграмма деформирования  $\sigma - \mathcal{E}$

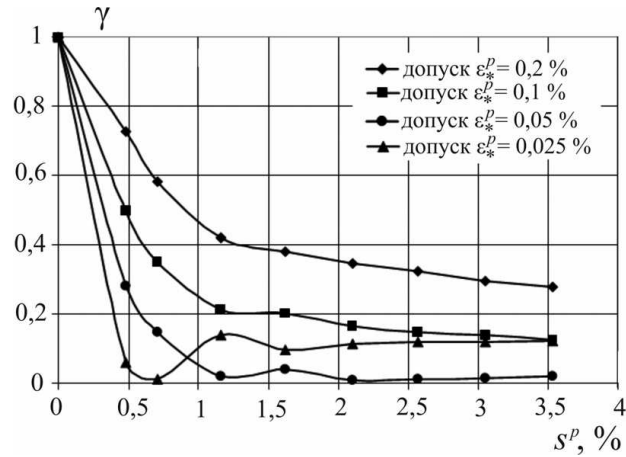


Рис. 4. Эффект относительного изменения предела текучести по Баушингеру

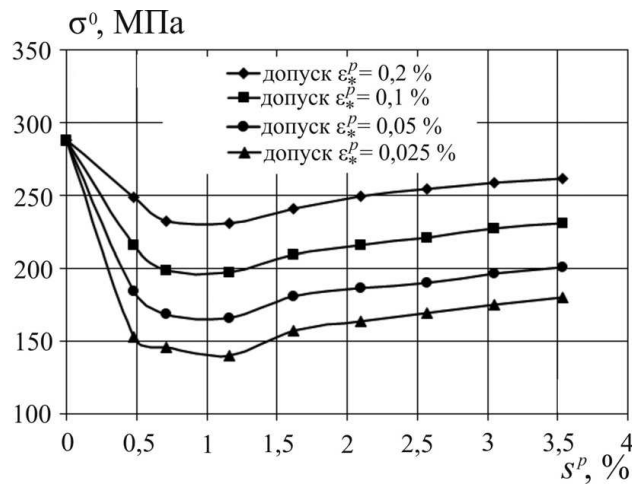


Рис. 5. Изменение радиуса гипотетической поверхности текучести

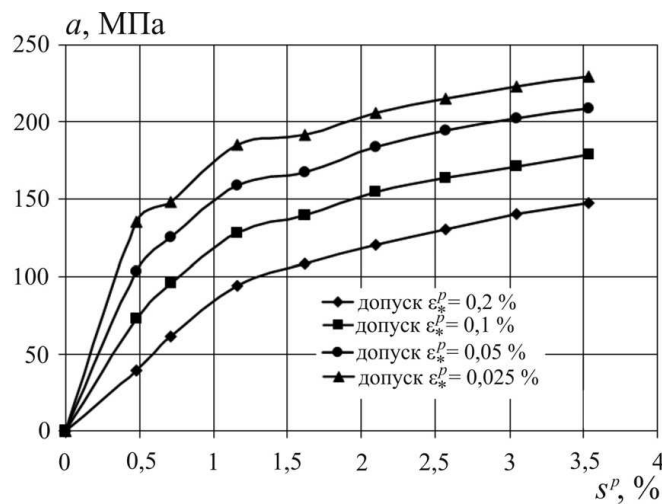


Рис. 6. Смещение центра гипотетической поверхности текучести

С ростом допуска на остаточную деформацию радиус поверхности текучести  $\sigma^0$  увеличивается, а смещение ее центра  $a$  уменьшается. Максимальное отклонение для рассмотренных крайних допусков на остаточную деформацию  $\varepsilon_*^p = 0,2\%$  и  $\varepsilon_*^p = 0,025\%$  для радиуса  $\sigma^0$  гипотетической поверхности текучести составляет примерно 45 % (см. рис. 5), а для смещения ее центра – примерно 55 % (см. рис. 6). При максимально достигнутом уровне пластической деформации  $s^p$  значения параметра  $a$  при различных допусках на остаточную деформацию не превысили значения начальных пределов текучести  $\sigma^T$ , следовательно, центр текущей поверхности находится внутри начальной поверхности текучести.

За технический предел текучести  $\sigma_T$  в теории пластичности принимается такое напряжение при растяжении, при котором остаточные деформации становятся одного порядка с упругими ( $\varepsilon \approx 10^{-3}$ ). За такую остаточную деформацию, как правило, принимают  $\varepsilon_*^p = 0,2\% = 2 \cdot 10^{-3}$  ( $\varepsilon_*^p = 0,245\%$ ). Начальная поверхность текучести в девиаторном пространстве А.А. Ильюшина при данном допуске на остаточную деформацию описывается сферой Мизеса для начально изотропных тел. При меньших допусках очертание сферы Мизеса искажается и теряет свою форму [8]. На девиаторной плоскости окружность Мизеса и вписанный в нее шестиугольник Сен-Венана приобретают тройную симметрию [11]. При этом начальные условия текучести Мизеса и Сен-Венана определяются формулами [3–5]

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma^T, \quad (16)$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} = k \quad (m < n; m, n = 1, 2, 3),$$

где  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – главные нормальные напряжения;  $k$  – предел текучести при плоском чистом сдвиге. Уже при  $\varepsilon_*^p = 0,1\%$  классическая теория пластичности лежит за пределами ее инженерного контроля [3, 6, 8]. К сожалению, в некоторых математических моделях теории течения величине допуска на остаточную деформацию не придают значения и не связывают их с определением предела текучести. В про-



цессе нагружения при трансляции предельной поверхности она вытягивается в направлении развития процесса вследствие развития деформационной анизотропии [3, 6].

По результатам экспериментально проведенного исследования можно сделать выводы.

1. Эффект Баушингера для стали 45 с площадкой выражается уменьшением по модулю вторичного предела текучести  $\sigma_M^T$  и параметра  $\gamma$  с ростом длины дуги пластического деформирования  $s^P$ . Параметр  $\gamma$  при различных допусках на остаточную деформацию стремится к некоторому стационарному значению при  $s^P > 3\%$ .

2. С ростом допуска на остаточную деформацию  $\mathcal{E}_*^P$  параметр  $\gamma$  увеличивается и при максимально достигнутом значении  $s^P$  для общепринятого допуска  $\varepsilon_*^P = 0,2\%$  ( $\mathcal{E}_*^P = 0,245\%$ ) составляет примерно 0,3.

3. Радиус гипотетической сферической поверхности  $\sigma^0 = C_p(s^P)$  совершает временное понижение типа «нырка», а затем увеличивается. При повышении допуска  $\mathcal{E}_*^P$  примерно до технического и более очертание поверхности стремится к сферической. При этом отклонение радиуса при крайних значениях допуска на остаточную деформацию достигает 45%.

4. Отклонения параметра смещения центра предельной поверхности  $a(s^P)$  для рассмотренных различных допусков на остаточную деформацию при определении пределов текучести достигают 55%.

5. В некоторых математических моделях теории течения временное убывание функции  $\sigma^0 = C_p(s^P)$  в начале процесса пластического деформирования не связывают с определением пределов текучести по допуску на остаточные деформации и искажением гипотетической сферической поверхности текучести, что абсолютно нереально и не вызывает доверия к ним.

### Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 273 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

3. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.
4. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности. – Тверь: Изд-во Твер. гос. техн. ун-та, 2002. – 300 с.
5. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Пластичность. – М.: Физматлит, 2008. – Т. 2. – 336 с.
6. Зубчанинов В.Г. О соотношениях между напряжениями и деформациями в теории пластичности при сложном нагружении // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. ННГУ. – Н. Новгород, 2011. – № 73. – С. 120–131.
7. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т.2.: Математические основы теории разрушения / под ред. Г. Либовица. – М. : Мир, 1975. – С. 336–520.
8. Новожилов В.В. Вопросы механики сплошных сред. – Л.: Судостроение, 1989. – 397 с.
9. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 264 с.
10. Зубчанинов В.Г., Гультяев В.И., Алексеев А.А. Об эффекте Баушингера и поверхности текучести при пластическом деформировании металлов // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – Йошкар-Ола, 2012. – № 3 (13). – С. 3–8.
11. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.

### **References**

1. Ilyushin A.A. Plastichnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii [Plasticity. Bases of the General Mathematical Theory]. Moscow: Akademiya nauk USSR, 1963. 273 p.
2. Ilyushin A.A. Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum Mechanics]. Moscow: Moskowskiy gosudarstvenniy universitet, 1990, 310 p.
3. Zubchaninov V.G. Mekhanika protsessov plasticheskikh sred [Mechanics of processes in plastic environments]. Moscow: Fizmatlit, 2010, 352 p.
4. Zubchaninov V.G. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [The mathematical theory of plasticity]. Tver: Tverskoy gosudarstvenniy tekhnicheskij universitet, 2002. 300 p.
5. Zubchaninov V.G. Ustoychivost i plastichnost. Tom 2. Plastichnost [Stability and plasticity. Vol. 2: Plasticity]. Moscow: Fizmatlit, 2008, 336 p.

6. Zubchaninov V.G. O sootnosheniyakh mezhdru napryazheniyami i deformatsiyami v teorii plastichnosti pri slozhnom nagruzhenii [About relations between stress and strain in the plasticity theory at complex loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti: mezhvuzovskiy sbornik Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, no. 73, pp. 120-131.

7. Paul B. Makroskopicheskiye kriterii plasticheskogo techeniya i khrupkogo razrusheniya [Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture]. *Razrusheniye. Tom 2. Matematicheskiye osnovy teorii razrusheniya* / ed. H. Liebowitz. Moscow: Mir, 1975, pp. 336-520.

8. Novozhilov V.V. Voprosy mekhaniki sploshnykh sred [Questions of continuum mechanics]. St. Petersburg: Sudostroyeniye, 1989, 397 p.

9. Moskvitin V.V. Plastichnost pri peremennykh nagruzheniyakh [Plasticity under alternating loadings]. Moscow: Moskovskiy gosudarstvenniy universitet, 1965, 264 p.

10. Zubchaninov V.G., Gultyayev V.I., Alekseev A.A. Ob effekte Baushingera i poverkhnosti tekuchesti pri plasticheskom deformirovanii metallov [About Baushinger's effect and the yield surface at plastic deformation of metals]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Mekhanika predelnogo sostoyaniya*, Cheboksary, 2012, no. 3 (13), pp. 3-8.

11. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [The mathematical theory of plasticity]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 704 p.

### **Об авторах**

**Зубчанинов Владимир Георгиевич** (Тверь, Россия) – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета (170026, г. Тверь, Наб. А. Никитина, 22, e-mail: [vgz@rambler.ru](mailto:vgz@rambler.ru)).

**Алексеев Андрей Алексеевич** (Тверь, Россия) – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета (170026, г. Тверь, Наб. А. Никитина, 22, e-mail: [alexeew@bk.ru](mailto:alexeew@bk.ru)).

**Гультяев Вадим Иванович** (Тверь, Россия) – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой строительства и энергетики Тверского государственного технического университета (170026, г. Тверь, Наб. А. Никитина, 22, e-mail: vig0@mail.ru).

#### **About the authors**

**Zubchaninov Vladimir Georgievich** (Tver, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of the Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University (22, Nab. A.Nikitina, 170026, Tver, Russian Federation, e-mail: vgz@rambler.ru).

**Alekseev Andrey Alekseevich** (Tver, Russian Federation) – Ph. D. in Technical Sciences, Ass. Professor, Department of the Resistance of Materials, Elasticity and Plasticity Theories, Tver State Technical University (22, Nab. A.Nikitina, 170026, Tver, Russian Federation, e-mail: alexeev@bk.ru).

**Gulyaev Vadim Ivanovich** (Tver, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Ass. Professor, Head of the Department of the Building and Energy, Tver State Technical University (22, Nab. A.Nikitina, 170026, Tver, Russian Federation, e-mail: vig0@mail.ru).

Получено 15.02.2013