

УДК 539.3

Н.А. Труфанов, Ю.С. Кузнецова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ
ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА КАСТИЛЬЯНО
ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Рассмотрен вариант метода геометрического погружения для плоских задач теории упругости, основанного на методе конечных элементов в напряжениях в рамках принципа минимума дополнительной работы упругой системы. Суть метода геометрического погружения заключается в сведении исходной задачи для линейно-упругого тела произвольной формы к итерационной последовательности задач теории упругости на некоторой канонической области. Сформулирована итерационная процедура для решения вариационного уравнения метода геометрического погружения, а также процедура построения его дискретного аналога с помощью метода конечных элементов в напряжениях для плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат. Использован вариант конечного элемента в терминах функции напряжений для удовлетворения аппроксимирующих выражений уравнениям равновесия. Продемонстрировано практическое применение метода на примере решения плоской задачи для упругой пластины с прямоугольным вырезом. Получено достаточно хорошее соответствие результатов определения полей напряжений в сравнении с традиционным методом конечных элементов в перемещениях. Установлена практическая сходимость итерационной процедуры метода геометрического погружения. Уделено внимание способам задания статических граничных условий, являющихся главными для данной вариационной формулировки. Использован способ модификации матрицы податливости системы конечных элементов и метод множителей Лагранжа.

Ключевые слова: метод конечных элементов, вариационный принцип Кастильяно, метод геометрического погружения, итерационная процедура, граничные условия, метод множителей Лагранжа.

N.A. Trufanov, Y.S. Kuznetsova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**FINITE ELEMENT REALIZATION OF GEOMETRICAL
IMMERSION METHOD ON THE BASIS OF KASTILYANO'S
VARIATION PRINCIPLE FOR TWO-DIMENSIONAL
PROBLEM THEORY ELASTICITY**

The alternative geometrical immersion method for plane problems theory elasticity, based on a finite elements method in term of stresses within the principle minimal additional work of elastic system is considered. The geometrical immersion method consists in reducing an initial problem for linearly elastic body of any form to iterative sequence of problems theory elasticity on some initial area. Iterative procedure for the solution of the variation equation of the geometrical immersion method and a procedure of formulation of its discrete analog by means of the finite elements method in term of stresses for plane problems theory elasticity in the Cartesian system of coordinates are formulated. The alternative finite element method in terms of stresses function for satisfaction of approximating expressions to the balance equations is used. Practical application of the method on the example of the plane problems solution for the elastic plate with rectangular hole is shown. Rather good compliance of results of stresses fields definition in comparison with a traditional finite elements method in movements is obtained. Practical convergence of iterative procedure of the geometrical immersion method is established. We focus our attention to the problem of the static boundary conditions that are the main for this variation formulation. The way of modification of a flexibility matrix of the system of finite elements and Lagrange's multipliers method is used.

Keywords: method of finite elements, Kastilyano's variation principle, method of geometrical immersion, iterative procedure, boundary conditions, method of multipliers Lagrange.

Метод конечных элементов (МКЭ) представляет собой широко известный численный метод решения задач механики деформируемого твердого тела. Наибольшее распространение получил вариант МКЭ для задач теории упругости в перемещениях, формулировка которого может быть получена на основе вариационного принципа Лагранжа (принципа минимума общей потенциальной энергии системы). Метод конечных элементов в напряжениях, основанный на вариационном принципе Кастильяно, также получил свое развитие, но в связи с рядом проблем имеет ограниченное применение [1]. В частности, имеются сложности в построении элементов с криволинейными границами при решении задач для областей произвольной, неканонической конфигурации. В данном случае может оказаться полезным использование идеологии метода геометрического погружения [2], позволяющего свести краевую задачу для тела сложной формы к итерационной последо-

вательности задач для тела канонической конфигурации, при этом возможно применение конечных элементов в напряжениях простой формы [3].

1. Рассмотрим вариационную постановку задачи теории упругости в рамках вариационного принципа Кастильяно. Функционал дополнительной энергии упругой системы имеет вид

$$\Pi_C(\hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u, \quad (1)$$

где V – область, в которой разыскивается решение; $\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций с компонентами $\sigma_{ij}(\vec{r}), \varepsilon_{ij}(\vec{r})$ соответственно; $\vec{r} = (x, y, z) \in V$; U_i – заданные перемещения на поверхности S_u ; t_i – усилия на поверхности, где заданы кинематические граничные условия.

Функционал (1) определен на множестве статически допустимых полей напряжений $\sigma_{ij}(\vec{r})$, удовлетворяющих в области V уравнениям равновесия и статическим граничным условиям на части поверхности тела S_σ ($S_\sigma \cup S_u = S$).

$$\sigma_{ij} \alpha_j = T_i, \quad \vec{r} \in S_\sigma,$$

где T_i – заданные усилия на поверхности S_σ ; α_j – компоненты вектора внешней единичной нормали к поверхности тела.

Условие минимума функционала (1)

$$\delta \Pi_C = 0$$

эквивалентно выполнению в области V уравнений совместности в напряжениях (уравнений Бельтрами–Митчела) и граничных условий в перемещениях на границе S_u

$$u_i = U_i, \quad \vec{r} \in S_u.$$

Введем в рассмотрение некоторую каноническую область V_0 , включающую исходную область V произвольной формы, так что $V_0 = V \cup V_\Delta$, где V_Δ – дополнение области V до области V_0 .

Выполним тождественное преобразование функционала (1) дополнительной энергии линейно-упругого тела:

$$\begin{aligned} \Pi_C(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV + \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV_\Delta - \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV_\Delta - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u, \\ \Pi_C(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV - \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV_\Delta - \int_{S_u} t_i(\hat{\sigma}) U_i dS_u. \end{aligned} \quad (2)$$

Можно показать, что поля напряжений, минимизирующие функционал (2), в области V доставляют минимальное значение функционалу (1).

Условие минимума функционала (2) примет вид

$$\delta \Pi_C(\hat{\sigma}) = \int_{V_0} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV - \int_{V_\Delta} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}) dV_\Delta - \int_{S_u} t_i(\delta \hat{\sigma}) U_i dS_u = 0. \quad (3)$$

Вариационное уравнение (3) будем решать, используя следующую итерационную процедуру:

$$\int_{V_0} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) dV - \int_{V_\Delta} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k)}) dV_\Delta - \int_{S_u} t_i(\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_i dS_u = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0, \quad k=1,2,3,\dots,n,$$

где k – номер итерации.

Таким образом, на каждой итерации в (4) необходимо решать вариационное уравнение в канонической области V_0 , что можно с успехом сделать, используя существующие для этих целей формулировки МКЭ в напряжениях, например прямоугольные элементы для прямоугольных канонических областей [4]. Приведенный далее пример показывает, что итерационная процедура (4) сходится.

2. Рассмотрим процедуру построения дискретного аналога вариационного уравнения (4) с помощью метода конечных элементов в напряжениях для плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат. Для дискретизации выберем прямоугольный конечный элемент с четырьмя узлами в углах (рис. 1).

Согласно вариационной постановке задачи решение ищется на множестве статически допустимых полей напряжений, удовлетворяющих статическим граничным условиям и уравнениям равновесия. Если в качестве узловых неизвестных при формулировке соотношений МКЭ выбрать компоненты тензора напряжений, удовлетворение уравнениям равновесия приведет к дополнительным условиям на неизвестные и

значительному усложнению конечных соотношений. В случае плоской задачи теории упругости удобна формулировка краевой задачи с использованием функции напряжений Эри, так как при этом автоматически удовлетворяются уравнения равновесия в каждой точке тела. В качестве неизвестных в узле элемента выберем значение функции Эри, ее первых производных и значение смешанной производной:

$$\{\delta_i\}^T = \left\{ \varphi_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_i, \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i \right\}.$$

Подробно использование данного элемента описано в статье [4].

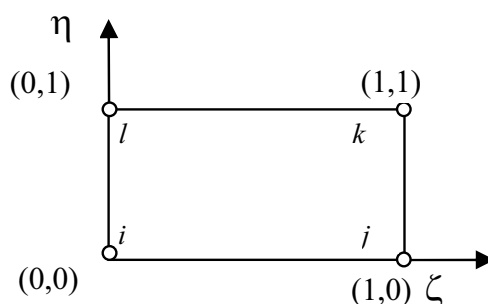


Рис. 1. Прямоугольный конечный элемент в локальной системе координат

Уделим особое внимание статическим граничным условиям, являющимся главными для данной вариационной формулировки. Для выполнения главных граничных условий можно использовать традиционный прием, заключающийся в модификации глобальной матрицы податливости, задавая значения функции напряжений и ее первых производных на границах. Такой подход вызывает затруднения, связанные с определением узловых неизвестных на границах, поэтому для удовлетворения статических граничных условий широко используется метод множителей Лагранжа [5, 6]. Применение данного метода иллюстрирует следующий пример: пусть на стороне элемента, параллельной оси Ox , действуют поверхностные силы T_y , как изображено на рис. 2.

Связь функции напряжений Эри и компонент тензора напряжений имеет вид

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

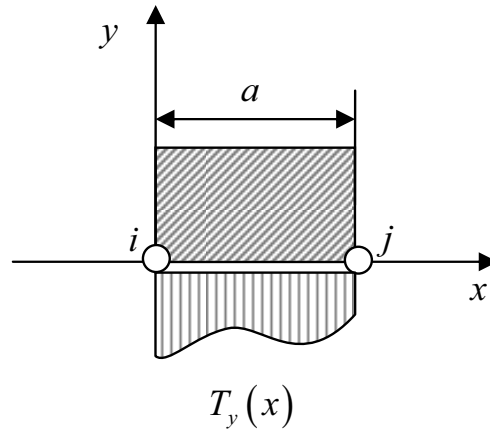


Рис. 2. Элемент, на сторону которого действуют поверхностные силы

Дважды проинтегрировав по переменной j на стороне элемента с узлами i и j выражение $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = T_y(x)$ и определив константы интегрирования через φ и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ в узловых точках $\left(\varphi_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i, \varphi_j, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_j\right)$, получим

вания через φ и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ в узловых точках $\left(\varphi_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i, \varphi_j, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_j\right)$, получим

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_j = \int_{x_i}^{x_j} T_y(x) dx, \quad (5)$$

$$-\varphi_i + \varphi_j - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i a = \int_{x_i}^{x_j} \int_{x_i}^x T_y(x) dx dx. \quad (6)$$

Так как функция T_y задана и зависит только от x , то можно вычислить интегралы в соотношениях (5) и (6). Таким образом, получим два уравнения, определяющих связь между узловыми неизвестными на границе элемента. Учитывая аналогично все остальные условия для напряжений, получим полную систему ограничений для элемента и запишем ее в виде

$$[g^e] \{\varphi^e\} = \{s^e\}. \quad (7)$$

Следует отметить, что так как в качестве узловых неизвестных у нас фигурируют касательные напряжения, то условия, накладываемые на τ_{xy} , можно учесть с помощью модификации глобальной матрицы податливости.

Согласно процедуре метода конечных элементов в напряжениях выражения, входящие в уравнение (4), можно представить для отдельного конечного элемента в матричном виде:

$$\begin{aligned} \int_{V_0^e} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) dV &= \delta \{ \varphi^{e(k+1)} \} [k^e]_0 \{ \varphi^{e(k+1)} \}, \\ \int_{V_\Delta^e} \delta \sigma_{ij}^{(k+1)} \varepsilon_{ij}(\hat{\sigma}^{(k)}) dV_\Delta &= \delta \{ \varphi^{e(k+1)} \} [k^e]_\Delta \{ \varphi^{e(k)} \}, \\ \int_{S_u} t_i (\delta \hat{\sigma}^{(k+1)}) U_i dS_u &= \delta \{ \varphi^{e(k+1)} \} \{ F_u^e \}, \end{aligned}$$

где $[k^e]_0$ – матрица податливости элемента, принадлежащего канонической области; $[k^e]_\Delta$ – матрица податливости элемента, принадлежащего области дополнения; $\{F_u^e\}$ – вектор обобщенных узловых перемещений элемента.

Проведя теперь типовую процедуру ансамблирования конечных элементов и учет статических граничных условий методом множителей Лагранжа, получим итерационную последовательность СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} [K]_0 & [G]^T \\ [G] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \varphi^{(k+1)} \} \\ \{ \lambda^{(k+1)} \} \end{Bmatrix} = [K_\Delta] \{ \varphi^{(k)} \} + \begin{Bmatrix} \{ F_u \} \\ \{ S \} \end{Bmatrix},$$

где $[K]_0 = \sum_e [k^e]_0$ – глобальная матрица податливости канонической области; $[K]_\Delta = \sum_e [k^e]_\Delta$ – глобальная матрица податливости дополнения; $\{F_u\} = \sum_e \{F_u^e\}$ – глобальный вектор обобщенных узловых перемещений; $\{\varphi\}$ – глобальный вектор узловых неизвестных; $\{\lambda\}$ – вектор множителей Лагранжа.

Условие остановки итерационной процедуры выбрано в виде

$$\frac{\| \{ \varphi^{(k+1)} \} - \{ \varphi^{(k)} \} \|}{\| \{ \varphi^{(k)} \} \|} \leq 0,001, \quad (8)$$

где в качестве нормы вектора $\{\varphi\}$ выбрана норма Чебышева.

3. Рассмотрим задачу о плосконапряженном состоянии прямоугольной упругой пластины с прямоугольным вырезом при продольном ее растяжении переменной распределенной нагрузкой и заданными на контуре выреза компонентами вектора перемещений (рис. 3). Так как задача симметрична относительно осей Ox и Oy , будем рассматривать четверть пластины.

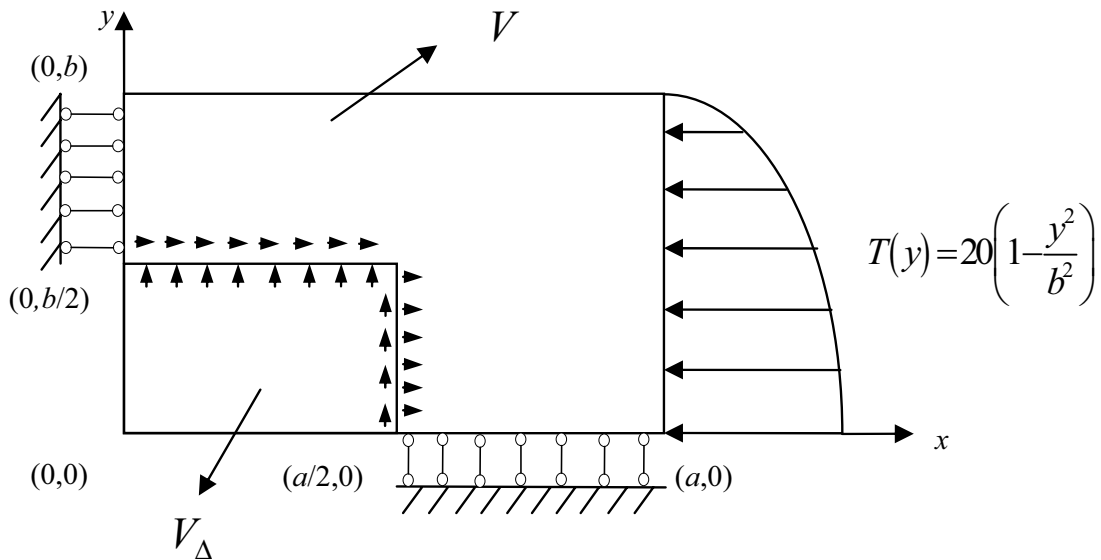


Рис. 3. Расчетная схема задачи

Граничные условия задачи:

$$U_x(0, y) = 0, \quad y \in [b/2, b],$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad x \in [a/2, a],$$

$$U_x(x, b/2) = 0,1E - 10 \cdot x, \quad U_y(x, b/2) = 0,1E - 10, \quad x \in [0, a/2],$$

$$U_x(a/2, y) = 0,4E - 10, \quad U_y(a/2, y) = 0,05E - 10 \cdot y, \quad y \in [0, b/2],$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(a, y) = T(y), \quad \tau_{xy}(a, y) = 0, \quad y \in [0, b], \\ \tau_{xy}(x, b) = \sigma_{yy}(x, b) = 0, \quad x \in [0, a], \\ \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad y \in [b/2, b], \\ \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad x \in [a/2, a]. \end{cases} \quad (9)$$

Для конкретизации зададим $a = 8$ м, $b = 4$ м, $E = 2E + 11$ Па – модуль Юнга, $\nu = 0,35$ – коэффициент Пуассона.

Согласно введенному выше условию $V_0 = V \cup V_\Delta$ каноническая область будет представлять собой прямоугольник с координатами

вершин $\{(0,0);(a,0);(a,b);(0,b)\}$. Следует отметить, что для канонической области граничные условия при $x = 0$ и $y = 0$ будут справедливы для всей стороны.

Построим итерационную процедуру для поставленной задачи в форме (4):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^b \int_0^a \left(\delta\sigma_{xx}^{(k+1)} \varepsilon_{xx}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) + \delta\sigma_{yy}^{(k+1)} \varepsilon_{yy}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) + \delta\tau_{xy}^{(k+1)} \gamma_{xy}(\hat{\sigma}^{(k+1)}) \right) dx dy = \\
 & = \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} \left(\delta\sigma_{xx}^{(k+1)} \varepsilon_{xx}(\hat{\sigma}^{(k)}) + \delta\sigma_{yy}^{(k+1)} \varepsilon_{yy}(\hat{\sigma}^{(k)}) + \delta\tau_{xy}^{(k+1)} \gamma_{xy}(\hat{\sigma}^{(k)}) \right) dx dy + \\
 & \quad + \int_0^{a/2} \left(t_x(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}) U_x(x, b/2) + t_y(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}) U_y(x, b/2) \right) dx + \\
 & \quad + \int_0^{b/2} \left(t_x(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}) U_x(a/2, y) + t_y(\delta\hat{\sigma}^{(k+1)}) U_y(a/2, y) \right) dy.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Реализация соотношения (10) произведена методом конечных элементов, описанным в п. 2. Статические граничные условия (9) удовлетворяются с помощью метода множителей Лагранжа, граничные значения касательных напряжений задаются путем модификации глобальной матрицы податливости.

Все вычисления произведены в среде MATLAB 7.0.1. Для выявления оптимальной сетки поставленная задача была решена методом конечных элементов в напряжениях. Исследование метода геометрического погружения, основанного на вариационном принципе Кастильяно, производилось при числе степеней свободы, равном 1284. Итерационная процедура сходится за 20 итераций при остановке по норме (8).

Поставленная задача также решена в программном комплексе ANSYS с использованием формулировки в перемещениях при аналогичном числе узловых неизвестных (рис. 4).

Решение, полученное методом геометрического погружения в напряжениях, достаточно близко к решению поставленной задачи методом конечных элементов в перемещениях (рис. 5).

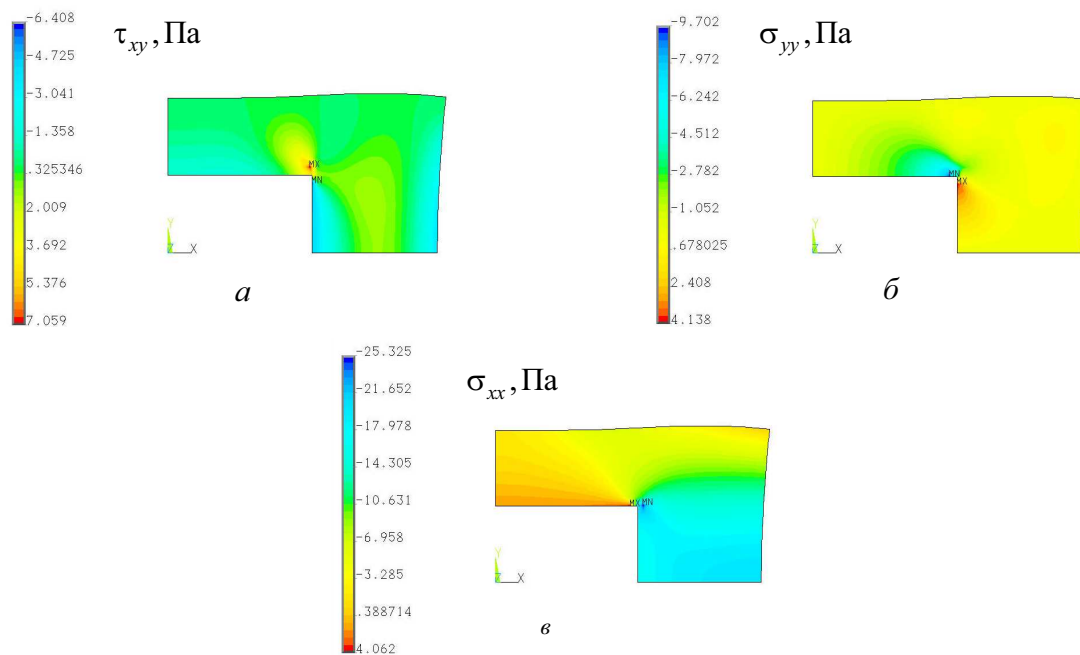


Рис. 4. Распределение компонент тензора напряжений, полученных методом конечных элементов (ANSYS) на основе вариационного принципа Лагранжа:

а – касательное напряжение τ_{xy} ; *б* – нормальное напряжение σ_{yy} ;

в – нормальное напряжение σ_{xx}

Исследуемая область содержит угловую точку (вершина выреза), напряжения в окрестности которой имеют сингулярный характер [7]. За исключением окрестности особой точки наблюдается хорошее соответствие результатов решения задачи двумя методами. Элементы в напряжениях имеют значительно более высокий порядок аппроксимации, вследствие чего при равном числе узловых неизвестных размер их больше, чем элементов в перемещениях, и влияние угловой точки распространяется на более значительное расстояние. Измельчение конечно-элементной сетки, используемой в методе геометрического погружения, сужает интервал влияния сингулярности и улучшает совпадение результатов.

Рис. 6 иллюстрирует характер сходимости итерационной процедуры метода геометрического погружения при выборе нулевого начального приближения для компонент тензора напряжений. Для сравнения приведены эпюры напряжений, найденные методом конечных элементов в перемещениях (кривые с крестиками). Результаты, представленные на рис. 6, соответствуют теоретическим представлениям, согласно которым решения, полученные на основе вариационных

принципов Лагранжа и Кастильяно, образуют вилку, внутри которой лежит точное решение задачи теории упругости.

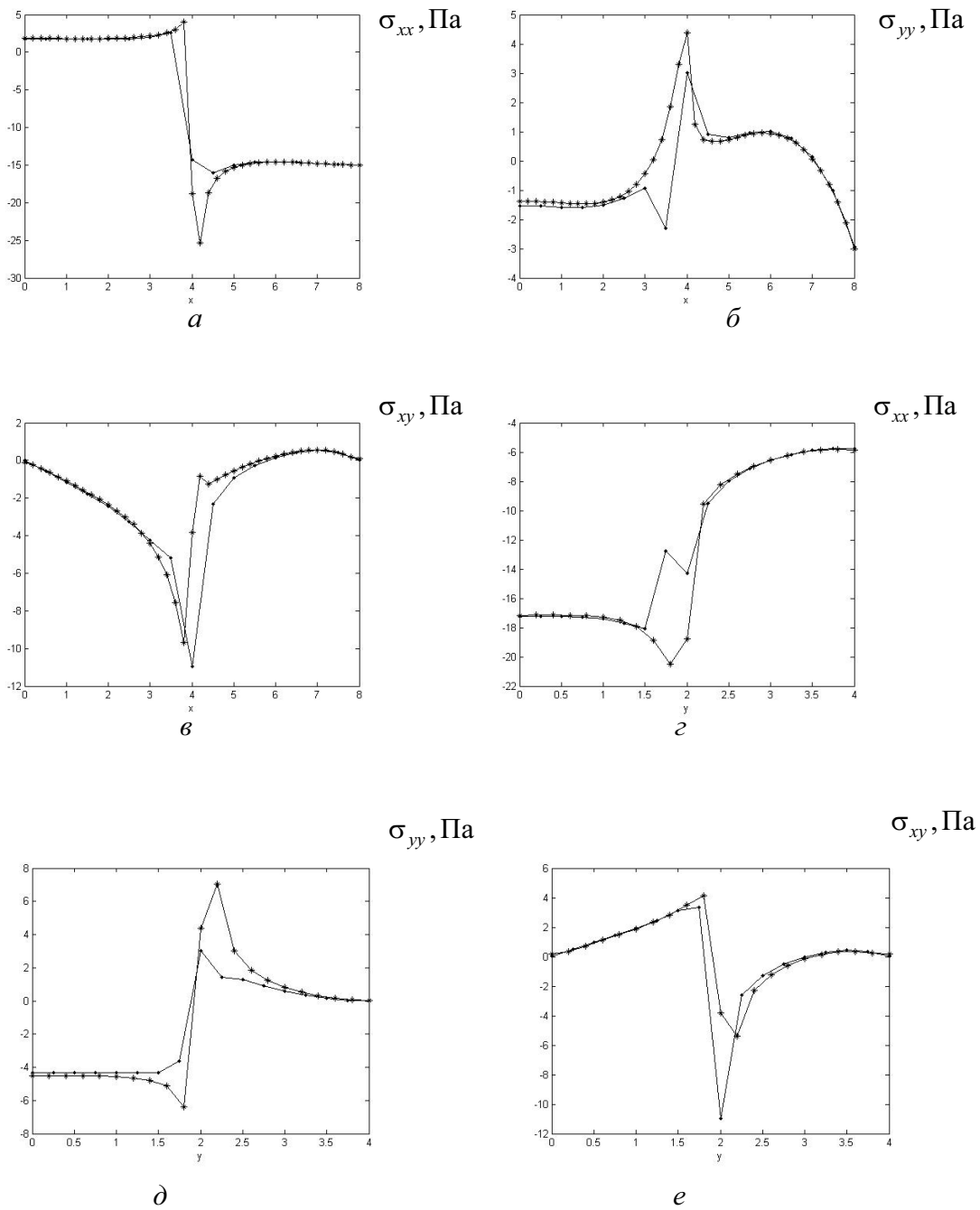


Рис. 5. Графики распределения компонент тензора напряжений: *a*, *б*, *в* – при $y = b/2$; *з*, *д*, *e* – при $x = a/2$; —*— метод геометрического погружения в напряжениях, —*— метод конечных элементов в перемещениях

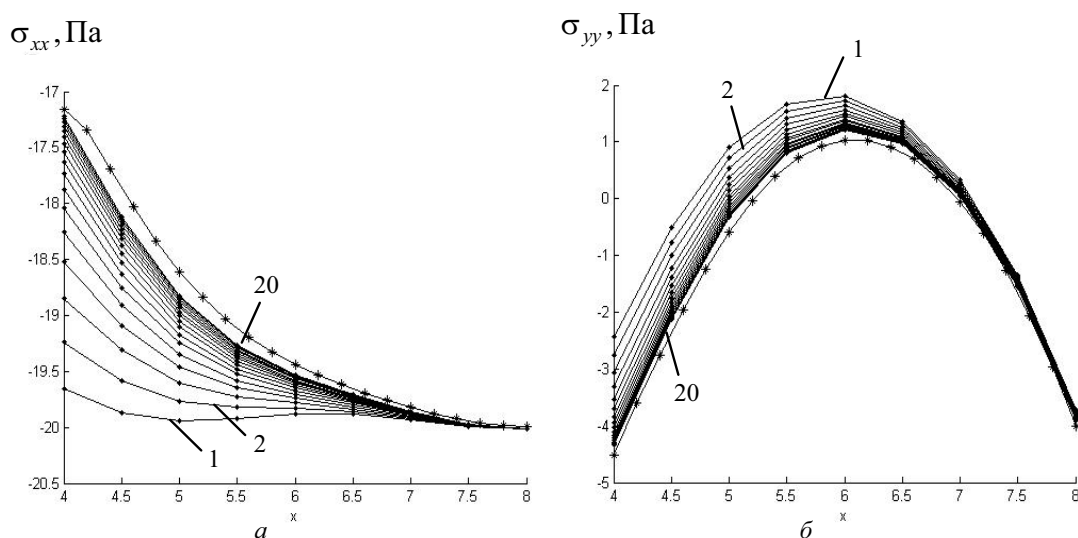


Рис. 6. Сходимость итерационной процедуры с увеличением числа итераций: *a* – на примере σ_{xx} , Па на границе $y = 0, x \in [4, 8]$; *b* – на примере σ_{yy} , Па на границе $y = 0, x \in [4, 8]$; —*— решение, полученное методом конечных элементов в перемещениях; —•— решение, полученное методом геометрического погружения на каждой итерации

Таким образом, продемонстрировано практическое применение метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно и его конечно-элементной реализации в напряжениях. Получено достаточно хорошее соответствие результатов определения полей напряжений в сравнении с традиционным МКЭ в перемещениях. Установлена практическая сходимость итерационной процедуры. Возможно развитие предлагаемого подхода на области с более сложной, в том числе криволинейной, геометрией.

Библиографический список

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
2. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости / УрО РАН. – Екатеринбург, 1999. – 298 с.
3. Каменских А.А., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Численная реализация метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно // Вестник ПГТУ. Механика. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – № 3. – С. 5–18.

4. Суходолова Ю.С., Труфанов Н.А. О конечном элементе на основе вариационного принципа Кастильяно для плоских задач теории упругости // Вестник ПНИПУ. Механика. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2012. – № 1. – С. 168–178.

5. Nesrin Sarigul, Richard H. Gallagher Assumed stress function finite element method: two-dimensional elasticity // International journal for numerical methods in engineering – 1989. – Vol. 18. – P. 1577–1598.

6. Girija C.V. Vallabhan, Azene Muluneh A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem // International journal for numerical methods in engineering. – 1982. – Vol. 18. – P. 291–309.

7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

References

1. Gallager R. Metod konechnykh elementov. Osnovy [Finite element analysis fundamentals]. Moscow: Mir, 1984. 428 p.

2. Shardakov I.N., Trufanov N.A., Matveenko V.P. Metod geometricheskogo pogruzheniya v teorii uprugosti [Method of geometrical immersion in the theory of elasticity]. Ekaterinburg: Ural'skoe otделение Rossiyskoy Akademii Nauk, 1999. 298 p.

3. Kamenskikh A.A., Trufanov N.A., Matveenko V.P. Chislennaya realizatsiya metoda geometricheskogo pogruzheniya na osnove variatsionnogo printsipa Kastilyano [Numerical realization of the geometrical immersion based on Castigliano variational principle]. *Vestnik permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2010, no. 3, pp. 5-18.

4. Sukhodolova Y.S., Trufanov N.A. O konechnom elemente na osnove variatsionnogo printsipa Kastilyano dlya ploskix zadach teorii uprugosti [About a finite element based on the castigliano variational principle for plane elasticity problems]. *Vestnik permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2012, no. 1, pp. 168-178.

5. Nesrin Sarigul, Richard H. Gallagher Assumed stress function finite element method: two-dimensional elasticity. *International journal for numerical methods in engineering*, 1989, vol. 18, pp. 1577-1598.

6. Girija Vallabhan C.V., Azene Muluneh. A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem. *International journal for numerical methods in engineering*, 1982, vol. 18, pp. 291-309.

7. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity] Moscow: Nauka, 1975. 576 p.

Об авторах

Труфанов Николай Александрович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: vmm@cpl.pstu.ac.ru).

Кузнецова Юлия Сергеевна (Пермь, Россия) – аспирант кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: Suhodolchik@mail.ru).

About the authors

Trufanov Nikolay Aleksandrovich (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: vmm@cpl.pstu.ac.ru).

Kuznetsova Yuliya Sergeevna (Perm, Russian Federation) – Post-graduate student of Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: Suhodolchik@mail.ru).

Получено 7.02.2013