

**Н.В. Андриевская, О.А. Билоус, Ю.С. Спешилова**

Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет

**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА *MATLAB***

*Рассмотрена методика синтеза САУ корневого годографа. Приведен сравнительный анализ применения корневого годографа для расчета типовых и модального регуляторов на примере звена 3-го порядка.*

Относительная устойчивость и качество переходного режима замкнутой системы управления непосредственно связаны с положением корней ее характеристического уравнения на  $p$ -плоскости. Поэтому имеет смысл исследовать, как перемещаются на  $p$ -плоскости корни характеристического уравнения при изменении параметров системы.

Метод корневого годографа является графическим, а сам годограф позволяет получить качественную информацию об устойчивости и динамических показателях системы по передаточной функции разомкнутой части [1]. Если положение корней характеристического уравнения почему-либо не устраивает проектировщика, то по корневному годографу он легко может определить, как необходимо изменить варьируемый параметр.

Для простой одноконтурной системы характеристическое уравнение имеет вид:

$$1 + K \cdot W(p) = 0, \quad (1)$$

где  $K$  – варьируемый параметр.

Корни характеристического уравнения системы в общем случае являются комплексными, поэтому предыдущую формулу можно записать в виде:

$$|K \cdot W(p)| e^{j \operatorname{arg} K \cdot W(p)} = -1 + j0. \quad (2)$$

Следовательно, необходимо выполнение условий:

$$\begin{aligned} |K \cdot W(p)| &= 1, \\ \arg K \cdot W(p) &= 180^\circ \pm k360^\circ, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Корневой годограф – это траектории корней характеристического уравнения системы на  $p$ -плоскости при изменении какого-либо параметра системы [1].

Для примера рассмотрим систему 3-го порядка с передаточной функцией следующего вида:

$$W_{\text{oy}}(p) = \frac{10}{p(0,25p + 1)(2p + 1)}. \quad (4)$$

Задачей синтеза является построение регулятора, обеспечивающего следующие показатели качества:  $\sigma \leq 20\%$ ;  $t_{\text{min}} \leq 3$  с.

Для системы (4) в качестве регулятора могут быть рассмотрены ПД, ПИД и модальный регуляторы.

Рассмотрим применение корневого годографа для расчета вышперечисленных регуляторов.

### **Расчет ПД-регулятора методом корневого годографа**

Процесс синтеза осуществляется в следующем порядке:

1. Определение передаточной функции разомкнутой системы с регулятором:

$$\begin{aligned} W_{\text{рег}}(p) &= K_{\text{п}} + K_{\text{д}}p, \\ W_{\text{рс}}(p) &= W_{\text{oy}}(p) \cdot W_{\text{рег}}(p) = \frac{10(K_{\text{п}} + K_{\text{д}}p)}{p(0,25p + 1)(2p + 1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Определение значений демпфирования и частоты среза, соответствующих заданным показателям качества:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ср}} &\approx \frac{0,38\sigma}{t_{\text{min}}} = \frac{0,38 \cdot 20}{3} = 2,5, \\ \zeta &\geq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Преобразование передаточной функции разомкнутой системы таким образом, чтобы варьируемый параметр входил множителем в ее числитель.

Метод корневого годографа предполагает, что варьируется один параметр системы. Чтобы исследовать влияние  $n$  параметров, потребуется повторить все действия, связанные с построением годографа  $n$  раз.

Для ПД-регулятора необходимо оценить влияние двух параметров  $K_d$  и  $K_n$ .

Оценим изменение параметра  $K_d$ . Тогда передаточная функция разомкнутой системы с регулятором примет вид:

$$W_{pc}(p) = \frac{10K_d(p+z)}{0,5p^3 + 2,25p^2 + p}, \quad (7)$$

где  $z = \frac{K_n}{K_d}$ .

При выбранном  $z = 1$  передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид:

$$W_{pc}(p) = \frac{10K_dp + 10}{0,5p^3 + 2,25p^2 + p}. \quad (8)$$

4. С использованием пакета *MatLab* [2] построим корневой годограф (рис. 1).

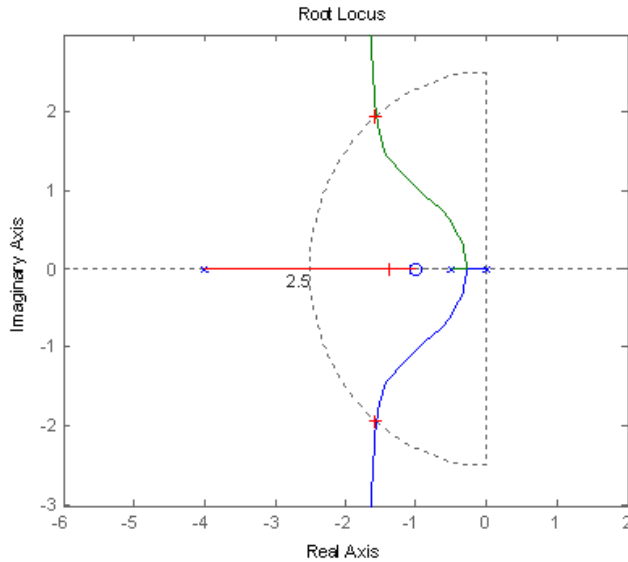


Рис. 1. Корневой годограф системы с ПД-регулятором для определения  $K_d$

5. Определяем область, в которой корни характеристического уравнения удовлетворяют заданным показателям качества (см. рис. 1). Область полуокружности обозначает расположение корней, для которых частота среза равна заданной, причем внутри области частота среза меньше заданной, а вне ее она больше.

6. Определяем значение варьируемого параметра в заданной точке:  $K_d = 0,43$ .

7. Пункты 3–6 повторяются для нахождения значений следующего параметра.

$$W_{pc}(p) = \frac{10K_{II}}{0,5p^3 + 2,25p^2 + 5,3p}$$

Для данной САУ построен корневой годограф, представленный на рис. 2.

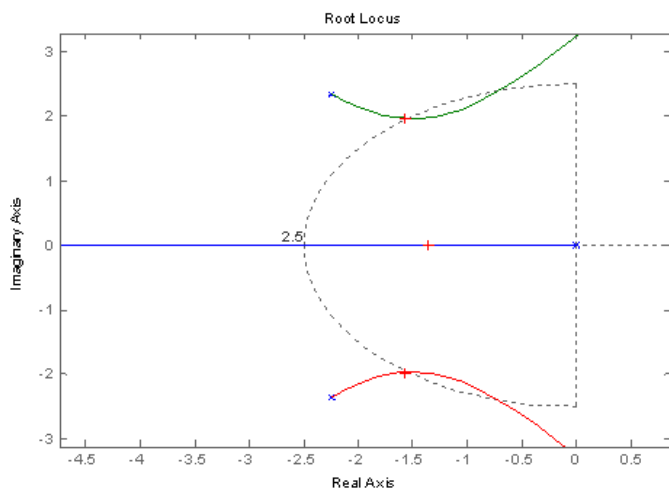


Рис. 2. Корневой годограф системы с ПД-регулятором для определения  $K_{II}$

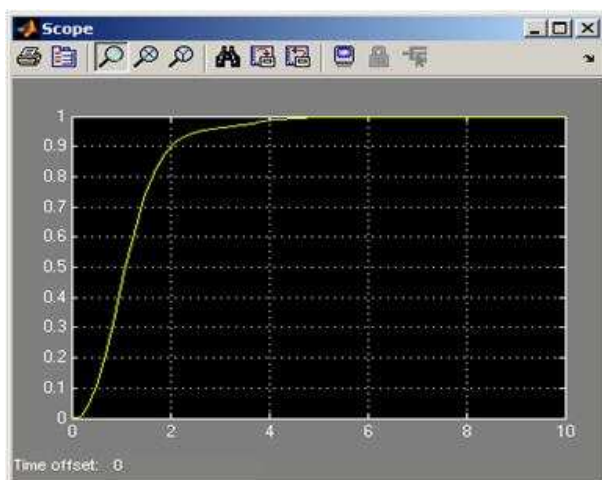


Рис. 3. Переходный процесс системы 3-го порядка с ПД-регулятором

8. Определяем значение варьируемого параметра в заданной точке:  $K_{\pi} = 0,43$ .

9. Определяем передаточную функцию системы с регулятором:

$$W_{pc}(p) = \frac{4,3p + 4,3}{0,5p^3 + 2,25p^2 + p}$$

Моделирование САУ с рассчитанным ПД-регулятором представлено на рис. 3.

Анализ переходного процесса показал, что система удовлетворяет заданным показателям качества:

$$\sigma = 0 \% \leq 20 \%, t_{\min} = 2,6 \text{ c} \leq 3 \text{ c}, e(\infty) = 0.$$

Аналогичным образом строится ПИД-регулятор. Для данной системы его передаточная функция имеет вид:

$$W_p = K_{\pi} + K_d p + \frac{K_u}{p} = 2,3 + p + \frac{0,35}{p}$$

Но он не обеспечивает заданные показатели качества даже при использовании предшествующего фильтра.

Метод корневого годографа может быть применен для построения модального регулятора.

Алгоритм синтеза:

1. Построение схемы переменных состояния (рис. 4).

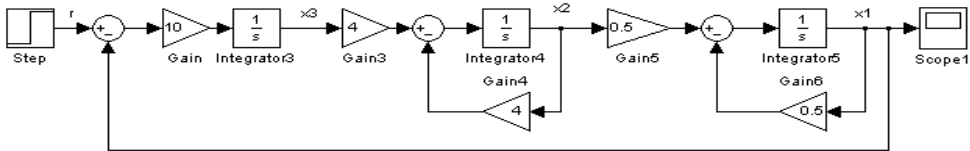


Рис. 4. Схема переменных состояния

2. Определение матриц **A**, **B**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3. Построение корневого годографа исходной системы (рис. 5).

4. Выбор расположения корней, удовлетворяющих требованиям синтеза.

Чтобы система была устойчива, расположим корни в точках:

$$p_1 = -0,0001 - 1,374j, p_2 = -0,0001 - 1,374j, p_3 = -4,5.$$

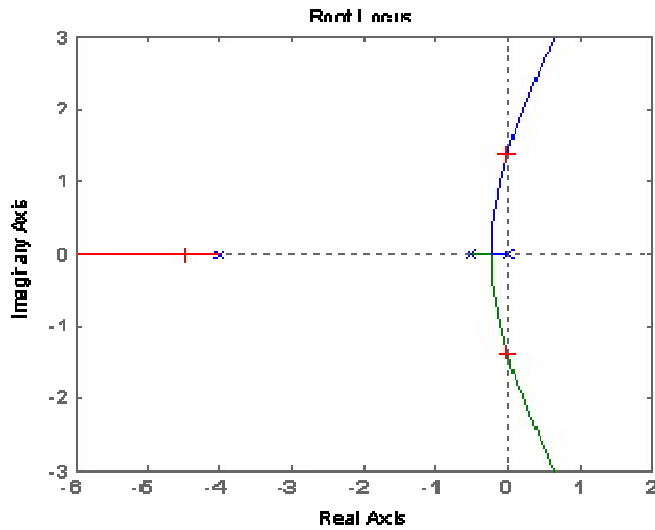


Рис. 5. Корневой годограф исходной системы

### 5. Определение коэффициентов обратной связи.

$$K_{oc1} = -0,0028, K_{oc2} = -0,4276, K_{oc3} = 0.$$

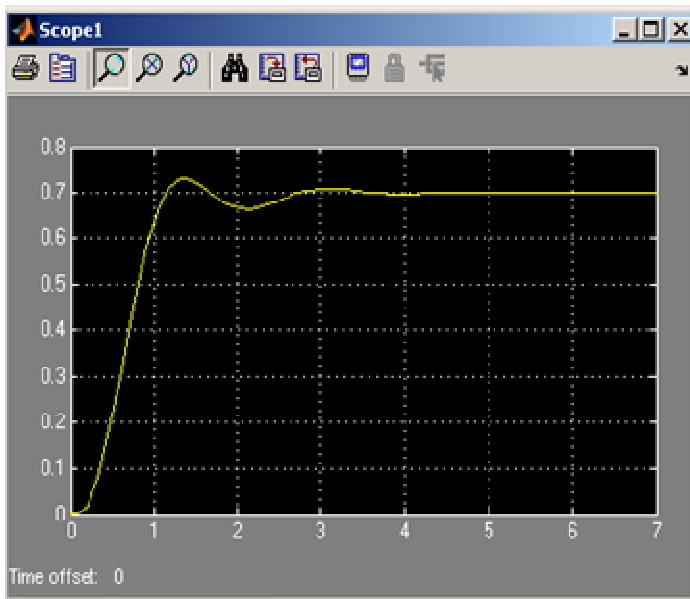


Рис. 6. Переходный процесс системы с модальным регулятором

Моделирование САУ с модальным регулятором представлено на рис. 6.

Анализ переходного процесса показал, что система удовлетворяет заданным показателям качества:

$$\sigma = 0 \% \leq 20 \%, t_{\text{пт}} = 1,1c \leq 3c, e(\infty) = 0,3.$$

Сравнительный анализ показал, что применение метода корневого годографа позволяет улучшить показатели качества САУ. При этом наилучший результат обеспечивается для алгоритма синтеза модального регулятора.

Таким образом, метод корневого годографа может быть использован как для коррекции параметров типовых регуляторов, так и для построения желаемого полинома модального регулятора.

#### **Библиографический список**

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического управления. – СПб: Профессия, 2003 – 752 с.
2. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

Получено 05.09.2012