УДК 539.3

С.А. Лычев[1], А.А. Барышев[2]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
[2]Саратовский государственный университет, Саратов, Россия

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНО ЕДИНООБРАЗНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОИСТОЙ СТРУКТУРОЙ

Построена математическая модель упругих слоистых оболочек в рамках кинематики типа Кирхгофа–Лява. Слоистые оболочки представляют собой соединение континуального множества мембран (материальных поверхностей) каждая из которых обладает своей индивидуальной отсчетной конфигурацией В силу того что деформации этих мембран в «сборке», за исключением специальных случаев, не являются совместными, такие оболочки не обладают натуральной конфигурацией. На основе прямых (бескоординатных) методов тензорного исчисления получена система уравнений равновесия в перемещениях. Записаны выражения для тензоров сил и моментов. В случае когда поверхность осреднения является срединной поверхностью оболочки при отсутствии предварительного натяжения слоев, уравнения равновесия совпадают с известными уравнениями статического равновесия упругих однородных оболочек. Для сферической оболочки предложена процедура построения решения, основанная на методе спектрального разложения, описывающего напряженно-деформированное состояние при осесимметричных силовых и моментных статических нагрузках.

Ключевые слова: слоистые оболочки, предварительно напряженные слои, кинематика Кирхгофа–Лява, материальное единообразие, спектральные методы, линейная упругость, уравнения равновесия.

S.A. Lychev[1], A.A. Baryshev[2]

[1]Institute for Problem in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation
[2]Saratov State University, Saratov, Russian Federation

EQUILIBRIUM EQUATIONS FOR MATERIAL UNIFORM AND INHOMOGENEOUS LAMINATED SHELLS

A mathematical model for elastic laminated shells with presteressed layers is proposed in the framework of Kirchhoff-Love theory. An equilibrium equations is derived in terms of displacements in arbitrary oblique curvelinear coordinates by means of direct (coordinateless) methods of the tensor calculus. The expressions for resultant stresses and couples are established. In the case when the surface of reduction is the middle surface of shell and the layers no prestressed the equilibrium equations are coinsides with known equations of static equilibrium elastic homogeneous shells. A represantation of solution in the form of spectral decomposition is obtained for a spherical laminated shells.

Keywords: laminated shells, material uniformity, Kirchhoff-Love shells, prestressed layers, linear elasticity, spectral decomposition, equilibrium equations.

Введение

Механика упругих многослойных оболочек является классическим разделом современной механики сплошной среды, ей посвящены многочисленные исследования [1–10]. Как правило, характерные особенности напряженно-деформированного состояния многослойных тонкостенных конструкций связываются с различием упругих модулей слоев и условиями их контакта. При этом предполагается существование некоторой глобальной конфигурации, в образе которой все слои оказываются в натуральном (т.е. свободном от остаточных напряжений) состоянии.

В настоящей работе рассматриваются упругие слоистые оболочки. Модели слоистых тонкостенных тел имеют ряд принципиальных отличий от моделей многослойных оболочек. Прежде всего отметим, что слоистость подразумевает выделение сколь угодно «тонкого слоя», который также обладает свойством слоистости. Таким образом, в слоистых телах нельзя указать число слоев. В нестрогом смысле можно лишь утверждать, что слоев бесконечно много, а толщина каждого слоя бесконечно мала. Формально же следует считать, что совокупность слоев образует непрерывное однопараметрическое семейство поверхностей, каждая из которых может деформироваться как упругая мембрана [11]. С точки зрения механики слоистые оболочки представляют собой соединения континуального множества мембран или, по терминологии [12], материальных поверхностей, каждая из которых обладает своей индивидуальной отсчетной конфигурацией. Образно слоистые оболочки можно представить как «сборки» очень большого количества очень тонких предварительно деформированных пленок. В силу того, что деформации этих мембран в «сборке», за исключением специальных случаев, не являются совместными, слоистые оболочки не обладают натуральной конфигурацией. Это означает, что никакая гладкая деформация не может освободить их от остаточных напряжений.

Резюмируя, можно утверждать, что слоистые оболочки представляют собой неоднородные тела, неоднородность которых искусственно вызвана различным натяжением составляющих их мембран при «сборке». В англоязычной литературе такая неоднородность называется термином «inhomogeneity» (неоднородность) и отличается от неоднородности, вызванной различием в физических свойствах материалов, для которой используется термин «material uniformity» (материальное единообразие). В настоящее время теория материально единообразных и неоднородных тел интенсивно развивается [13, 14].

Задачи математического моделирования слоистых тонкостенных тел возникают при исследовании очень широкого класса современных материалов и конструкций, получаемых, например, при электролитическом, газодинамическом, парофазном осаждениях, ионной имплантации, стереолитографии. Легко продолжить этот список, добавляя к нему технологические процессы, при которых объекты создаются послойно.

Следует отметить, что обсуждаемые здесь модели слоистых тонкостенных тел близки к моделям однородных оболочек, в которых учитываются поверхностные эффекты. Так, например, в работе [15] построены уравнения равновесия и определяющие соотношения линейной теории оболочек при учете поперечного сдвига и поверхностных напряжений. Укажем также, что не существует единой формулировки уравнений равновесия даже для однородных оболочек. В работе [16] обсуждаются некоторые возможные способы редукции и различия в итоговых соотношениях. В связи с этим при изучении новых эффектов, порождаемых предварительным натягом слоев, возникает необходимость изменения известных в настоящий момент систем уравнений.

Целью настоящего исследования является построение математических моделей слоистых оболочек в рамках наиболее простой кинематики типа Кирхгофа–Лява. В работе получена система уравнений равновесия на основе прямых (бескоординатных) методов тензорного исчисления. При отсутствии натяжения модель описывает известные задачи статического нагружения упругих оболочек, однако система уравнений равновесия в перемещениях, полученная в работе, приводится, по-видимому, впервые. Найдено решение, описывающее напряженно-деформированное состояние при потенциальных силовых и моментных статических нагрузках.

1. Аксиоматическое определение слоистых тел дано в [11]. Далее рассматриваются слоистые тела, которые можно классифицировать как оболочки[1].

---

[1] В рамках общей теории гладких тел [17], которая представляется авторам наиболее универсальной и завершенной, тела представляются гладкими многообразиями, оснащенными специальной материальной связностью. Тела представлены образами конфигураций, причем конфигурации являются гладкими вложениями тел в физическое пространство. Несмотря на то, что подобные построения существенно необходимы для анализа нелинейных задач механики, понятия тела, конфигурации и ее образа полезно различать и при исследовании линейных задач.

Приведем определения, которые позволят формально описать объект исследования. Тонкостенные тела интуитивно понимаются как тела, образы конфигураций которых определяются характерными размерами различных порядков: один их них можно трактовать как «малый параметр». Это определение можно сформулировать более строго, если рассмотреть в физическом пространстве две совокупности открытых шаров. Пусть элементы первой совокупности содержат все образы допустимых конфигураций, а элементы второй полностью содержатся в них. Тогда можно определить наибольший шар из второй совокупности и наименьший из первой. Отношение их радиусов дает параметр, определяющий отношение характерных размеров. Порядок малости этого параметра определяет «степень тонкостенности».

Оболочки определяются как подмножество класса тонкостенных тел, граница которых устроена специальным образом: она представляет собой объединение двух поверхностей, называемых лицевыми, и конечного множества (возможно пустого) линейчатых поверхностей. Последние задают так называемый опорный контур оболочки. Если лицевые поверхности эквидистантны, то оболочка классифицируется как оболочка постоянной толщины. Слоистая оболочка, как любое слоистое тело, обладает внутренней структурой, определяющей ее расслоение на непрерывное семейство двумерных поверхностей. С позиции теории гладких многообразий это – расслоение материального многообразия над интервалом, причем слои, соответствующие наибольшему и наименьшему значениям параметра расслоения (координаты базы расслоения) отвечают лицевым граничным поверхностям [18].

Центральной идеей теории оболочек является редукция задачи о деформировании трехмерного тела к задаче о некоторой специальной трансформации двумерного многообразия, представленного поверхностью осреднения. Здесь и далее поверхность осреднения будем обозначать символом. Ортогональная проекция средней линии линейчатых поверхностей на S определяет на ней совокупность (возможно, пустую) замкнутых кривых, которые определяют опорный контур Г.

Заметим, что в наиболее общем случае S можно рассматривать как ориентируемую поверхность лишь локально, а в целом S представляет собой двумерное гладкое многообразие, накрываемое совокупностью локальных карт, образующих атлас S. То же самое следует сказать и о лицевых поверхностях. Примеры подобных оболочек можно построить как обобщения известных примеров из топологии: лист Мебиуса, бутылка Клейна, яйцо Дунса [19]. Вместе с тем в рамках статьи ограничимся оболочками, для которых *S* представляет собой тривиальное многообразие, т.е. двумерное многообразие, атлас которого состоит из одной карты. Более того, будем полагать, что *S* может быть вложено в физическое (евклидово) пространство ε посредством отображения $\rho\colon D \to \varepsilon, D \subset \mathbf{R}^2$.

Предположение о возможности вложения достаточно сильное: из него вытекает вполне определенная связность, определяющая *S* глобально как риманово двумерное многообразие. Если дополнительно предположить, что ρ не имеет особых точек, а на *S* может быть построено непрерывное поле единичных нормалей, то *S* можно характеризовать как неособую ориентируемую поверхность[2].

Рассмотрим подробно необходимые для дальнейшего изло-жения геометрические структуры на *S*. Отображение ρ определяет на *S* поле реперов, которые принято в механике называть векторными базисами [22]:

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial q^\alpha} \quad \left(q^1, q^2\right) \in D \subset \mathbf{R}^2. \tag{1}$$

На языке геометрии это поле реперов (вернее, их линейные оболочки) задает касательное расслоение (*tangent bundle*) *TS*. В общем случае реперы представляют собой неортогональные пары векторов (скалярное произведение индуцируется скалярным произведением в физическом пространстве) и порождают дуальные реперы $\boldsymbol{\rho}^\alpha$:

$$\boldsymbol{\rho}^\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Поле дуальных реперов определяет кокасательное расслоение (*cotangent bundle*) T^*S.

Определим первый фундаметальный поверхности **A** (*metric tensor*)

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\alpha. \tag{2}$$

Отметим, что этот тензор является оператором ортогонального проектирования на касательное пространство, т.е.

---

[2] Из классификационной теоремы для двумерных многообразий вытекает, что продолжение *S* топологически эквивалентно либо плоскости, либо сфере, либо n-тору.

$$\forall \mathbf{u} \in TS \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{u}.$$

Определим, принимая нотацию Гиббса [20], двумерный оператор Гамильтона на многообразии S по формуле

$$\nabla_s = \boldsymbol{\rho}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha}. \tag{3}$$

Тогда градиент векторного поля нормалей $\mathbf{n} = \dfrac{\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2|}$ имеет следующий вид:

$$\nabla_s \mathbf{n} = -\mathbf{B}. \tag{4}$$

Он определяет второй фундаментальный тензор поверхности $\mathbf{B}$ (*curvature tensor*).

Таким образом, с каждой точкой поверхности S ассоциирована тройка векторов $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{n}$, которая в силу условий, указанных выше, образует базис в векторном простанстве, ассоциированным с ε.

В дальнейшем нам понадобятся следующие разложения градиента векторного поля и дивергенции тензорного поля, определенного на поверхности осреднения [27]:

$$\forall \mathbf{u} \in TS \quad \nabla_s \mathbf{u} = \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}, \tag{5}$$

$$\forall \mathbf{T} \in TS \otimes TS \quad \nabla_s \cdot \mathbf{T} = \left(\nabla_s \cdot \mathbf{T}\right) \cdot \mathbf{A} + \left(\mathbf{B} : \mathbf{T}\right)\mathbf{n}, \tag{6}$$

причем операции с поверхностным оператором Гамильтона могут быть выражены в терминах ковариантной производной ∇_α и соответствующих символов Кристоффеля 2-го рода на поверхности $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} = \nabla_\alpha u^\beta \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_\beta = \nabla_\alpha u_\beta \boldsymbol{\rho}^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}^\beta,$$

$$\nabla_\alpha u^\beta = \frac{\partial u^\beta}{\partial q^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} u^\gamma \quad \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial q^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} u_\gamma,$$

$$\left(\left(\nabla_s \cdot \mathbf{T}\right) \cdot \mathbf{A}\right)^\alpha = \frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial q^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} T^{\gamma\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} T^{\beta\gamma}.$$

Производные базисных векторов можно представить разложениями

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\alpha}{\partial q^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{\rho}_\gamma + b_{\alpha\beta}\mathbf{n} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\rho}^\alpha}{\partial q^\beta} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\boldsymbol{\rho}^\gamma + b^\alpha_\beta\mathbf{n}. \tag{7}$$

Координатное представление на поверхности S порождает криволинейные координаты в окрестности S. Фактически эти криволинейные координаты задают некоторую карту из атласа, накрывающего все физическое пространство:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + z\mathbf{n}, \tag{8}$$

где z – координата, отсчитываемая вдоль нормали, которую далее будем называть трансверсальной координатой. Эта карта является важным элементом теории, поскольку позволяет ввести согласованные координаты как на S, так и на всех слоях, образующих оболочку. Порождаемые этой картой поля реперов (основных и взаимных) имеют вид

$$\mathbf{R}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^\alpha}, \ \mathbf{R}^\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \delta^\alpha_\beta, \ \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}^3 = \mathbf{n}. \tag{9}$$

Из соотношений (1), (4) и формул (7), (9) следует, что

$$\mathbf{R}_\alpha = \left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_\alpha, \ \mathbf{R}^\alpha = \left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1}\cdot\boldsymbol{\rho}^\alpha. \tag{10}$$

Тогда пространственный оператор Гамильтона в окрестности поверхности можно представить в терминах поверхностного оператора ∇_s (3):

$$\nabla = \mathbf{R}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1}\cdot\nabla_s + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{11}$$

2. В классической теории оболочек принимаются следующие гипотезы [21]:

1. Нормальный элемент к поверхности осреднения до деформации остается нормальным к деформированной поверхности осреднения и не изменяет своей длины.

2. Напряжения обжатия по толщине $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$ малы, и ими можно принебречь.

Первую группу гипотез можно классифицировать как *кинематическую*, поскольку они задают ограничения на деформацию тела, а вторую – как *статическую* ввиду того, что в ней речь идет о специальном типе распределения напряжений. Очевидно, что постулирование кинематических гипотез эквивалентно введению дополнительных идеальных связей. По этой причине оболочки можно рассматривать как тела со связями [22]. Вместе с тем нет конкретной интерпретации кинематических и статической гипотез: некоторые авторы [23] не принимают во внимание неизменяемость длины нормального элемента, а некоторые не полагают что статическая гипотеза задает нулевое (а не пренебрежимо малые) напряжение обжатия.

В рамках работы будем полагать, что кинематические гипотезы выполнены точно. Тогда математическая формулировка кинематических ограничений определяется соотношением

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + w\mathbf{n} - z\boldsymbol{\vartheta}, \ \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, \ \ \boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{n} = 0, \tag{12}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}\left(q^1, q^2\right)$, $w = w\left(q^1, q^2\right)$ – вектор тангенциальных смещений (*tangential displacement*) и прогиб (*deflection*) точек поверхности осреднения, $\boldsymbol{\vartheta}$ – вектор поворота нормального элемента, который кинематически связан с $\mathbf{v}$ и w.

Далее рассматриваются оболочки, получаемые в результате соединения континуального множества (в физической интерпритации «пакета») мембран, каждая из которых имела в момент сборки свои индивидуальные натяжения. Кинематические гипотезы определяют деформирование всего пакета после «сборки». При этом в виду малости деформаций они могут быть представлены аддитивной декомпозицией $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_f$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – полные деформации, $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ – деформации в составе оболочки (подчиненные кинематическим гипотезам), $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ – «сборочные» деформации (мембранные). При этом, перемещения $\mathbf{u}$ можно трактовать как перемещения из напряженной конфигурации.

3. При заданных ограничениях на поле перемещений (12) его градиент (*deformation gradient*) может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{gathered}\nabla\mathbf{u} = \left(\left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1}\cdot\nabla_s + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\mathbf{v} + w\mathbf{n} - z\boldsymbol{\vartheta}\right) = \\ = \left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1}\cdot\left(\nabla_s\mathbf{v} - \mathbf{B}w + \nabla_s w\otimes\mathbf{n} - z\nabla_s\boldsymbol{\vartheta}\right) - \mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\vartheta}.\end{gathered} \tag{13}$$

Непосредственное использование выражения (13) в значительной степени затрудняется наличием множителя $\left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1}$. В различных вариантах теории оболочек используют разные формы его представления. Ряд авторов полагает его равным $\mathbf{A}$ (ввиду малости z и главных значений тензора кривизны) либо используют разнообразные аппроксимации. Это приводит к отличиям в окончательных уравнениях. В связи с этим представляется важным конкретизировать форму представления этого множителя. Далее используется асимптотическое разложение

$$\left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1} = \mathbf{A} + z\mathbf{B} + o(z), \tag{14}$$

которое отражает идею представления полей в виде формулы Тейлора первого порядка по отношению к трансверсальной координате z. Соответствующее представление для градиента перемещений (13) имеет вид

$$\begin{gathered}\nabla\mathbf{u} = \nabla_s\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{B}w + \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} + \nabla_s w\right)\otimes\mathbf{n} - \mathbf{n}\otimes\vartheta + \\ +z\left(-\nabla_s\vartheta\cdot\mathbf{A} + \underline{\underline{\mathbf{B}\cdot\left(\nabla_s\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{B}w\right) + \left(\mathbf{B}\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} + \nabla_s w - \vartheta\right)\right)\otimes\mathbf{n}}}\right).\end{gathered} \tag{15}$$

Заметим, что слагаемые подчеркнутые <u>двумя чертами</u>, как правило, не учитываются. Тензор, сопряженный к градиенту перемещений (15), может быть записан в форме

$$\begin{gathered}\left(\nabla\mathbf{u}\right)^* = \mathbf{A}\cdot\left(\nabla_s\mathbf{v}\right)^* - \mathbf{B}w + \mathbf{n}\otimes\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} + \nabla_s w\right) - \vartheta\otimes\mathbf{n} + \\ +z\left(-\mathbf{A}\cdot\left(\nabla_s\vartheta\right)^* + \underline{\underline{\left(\mathbf{A}\left(\nabla_s\vartheta\right)^* - \mathbf{B}w\right)\cdot\mathbf{B} + \mathbf{n}\otimes\left(\mathbf{B}\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} + \nabla_s w - \vartheta\right)\right)}}\right).\end{gathered}$$

Полученные соотношения позволяют записать выражение для тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_b = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \left(\nabla\mathbf{u}\right)^*\right)$ в следующей форме:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}_b = \left[\nabla_s\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right]^{sym} - \mathbf{B}w + \left[\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} + \nabla_s w - \vartheta\right)\otimes\boldsymbol{n}\right]^{sym} + \\ +z\left(-\left[\nabla_s\vartheta\cdot\mathbf{A}\right]^{sym} + \left[\mathbf{B}\cdot\left(\nabla_s\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - \boldsymbol{B}w\right)\right]^{sym} + \right. \\ \left. + \left[\mathbf{B}\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} + \nabla_s w - \vartheta\right)\otimes\boldsymbol{n}\right]^{sym}\right).\end{gathered} \tag{16}$$

Кинематическая гипотеза устанавливает явную связь между вектором поворота нормального элемента и смещениями точек поверхности осреднения в виде

$$\vartheta = \underline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}} + \nabla_s w. \tag{17}$$

Слагаемое, подчеркнутое одной чертой, не учитывается при построении теории пологих оболочек (*shallow shells*) [24] и, естественно, отсутствует в теории пластин (*plate theory*). Эти и все дальнейшие выражения могут записаны в компактном виде, если ввести так называемые меры мембранной ε (*membrane strain tensor*) и изгибной κ (*bending strain tensor*) деформации.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left[\nabla_s \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right]^{sym} - \mathbf{B}w,$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \left[\nabla_s\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} + \nabla_s w\right)\cdot\mathbf{A}\right]^{sym}. \tag{18}$$

Здесь $[\ldots]^{sym}$ означает операцию выделения симметричной части тензора, т.е. $[\mathbf{T}]^{sym} = \left(\mathbf{T}+\mathbf{T}^*\right)/2.$

В терминах мембранной и изгибной деформаций (18) тензор ε_b (16) записывается в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \boldsymbol{\epsilon} + z\left(\underline{\underline{\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}}} - \boldsymbol{\kappa}\right), \tag{19}$$

где $\mathbf{Z}$ определяется формулой $\mathbf{Z} = \left(\left(\nabla_s \mathbf{v}\right)^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\left(\nabla_s \mathbf{v}\right)^*\right)/2.$

Будем предполагать, что слои в окрестности лицевых поверхностей имеют предварительное натяжение. Следуя теории [12] и учитывая (14), примем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \left(\mathbf{A} + z\mathbf{B}\right)\cdot\boldsymbol{\epsilon}_f \quad \boldsymbol{\epsilon}_f = \left[\nabla_s \mathbf{d}\cdot\mathbf{A}\right]^{sym}, \tag{20}$$

где $\mathbf{d}\left(q^1, q^2, z\right)$ представляет собой гладкое векторное поле смещений, возникающее в слоях. Проекция градиента этого поля на касательное пространство *TS* представляет собой двумерное тензорное поле. Полная деформация будет складываться из двух частей [25]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_b + \mathbf{In}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_f\cdot\mathbf{In}.$$

Здесь $\mathbf{In}$ – оператор вложения, который вкладывает двумерное тензорное поле $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ в трехмерное. Заметим, что в этом случае полные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ не удовлетворяют условиям совместности, т.е.

$$\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}\right)^* \neq 0.$$

Для изотропного линейного упругого материала принимаем следующие определяющие соотношения:

$$\sigma = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\mathbf{A}tr\boldsymbol{\varepsilon} \;\; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \;\; \lambda = \frac{2\mu\nu}{1-\nu} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}. \tag{21}$$

Заметим, что в этом случае выполняется статическая гипотеза в «жестком» варианте [26], так как $tr\boldsymbol{\varepsilon}$ умножается на двумерный единичный оператор $\mathbf{A}$.

Тензор напряжений представим в форме следующего разложения:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + z\boldsymbol{\sigma}_1,$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = 2\mu\left(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}_f\right) + \lambda\mathbf{A}tr\left(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}_f\right)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = 2\mu\left(\underline{\underline{\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{Z}}} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_f - \boldsymbol{\kappa}\right) + \lambda\mathbf{A}\left(\underline{\underline{\mathbf{B}:\boldsymbol{\epsilon}}} + \mathbf{B}:\boldsymbol{\epsilon}_f - tr\boldsymbol{\kappa}\right).$$

Ниже приведем результат применения операции tr к тензорам деформаций:

$$tr\left(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}_f\right) = \nabla_s \cdot \left(\mathbf{v} + \mathbf{d}\right) - wtr\mathbf{B} \;\; tr\mathbf{Z} = 0,$$

$$tr\boldsymbol{\kappa} = \nabla_s \cdot \left(\underline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}} + \nabla_s w\right) \;\; tr\left(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\right) = \mathbf{B}:\boldsymbol{\epsilon}.$$

Следующий важный этап редукции трехмерных уравнений к двумерным связан с аппроксимацией выражения $G\left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1}$. Введение редуцированных напряжений – сил и моментов основано на интегрировании по трансверсальной координате относительно поверхности осреднения. Для выполнения операции интегрирования удобно предварительно ввести напряжения, приведенные к метрике поверхности осреднения S. Эти напряжения будем обозначать символом $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = G\left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \;\; G = G(z) = \mathbf{d}et\left(\mathbf{A} - z\mathbf{B}\right). \tag{22}$$

Из теоремы Гамильтона–Кэли, записанной для тензора, определенного на поверхности, которая может сформулирована как [27]

$$\mathbf{X}^2 - \mathbf{X}\mathbf{t}r\mathbf{X} + \mathbf{A}\, det(\mathbf{X}) = 0, \;\; \mathbf{X} = (\mathbf{A} - z\mathbf{B}) \;\; det(\mathbf{X}) = G \;\; tr\mathbf{A} = 2,$$

следует, что

$$G(\mathbf{A} - z\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A} + z\mathbf{C} \;\; \mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}tr\mathbf{B}.$$

Поэтому разложение в ряд Тейлора по трансверсальной координате тензорного поля $\hat{\sigma}$ дает

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 + z\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 + o(z), \tag{23}$$

а входящие в него компоненты определяются формулами

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 \;\; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = 2\mu\left(\underline{\underline{\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}}} + \mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_f - \boldsymbol{\kappa}\right) + \lambda\left(\mathbf{A}tr\left(\underline{\underline{\mathbf{D}:\boldsymbol{\epsilon}}} + \mathbf{D}:\boldsymbol{\epsilon}_f - \boldsymbol{\kappa}\right) + \underline{\underline{\mathbf{Y}:\boldsymbol{\epsilon}}}\right),$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\otimes\mathbf{A} - \mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$.

Наконец, определим, как это принято в теории простых оболочек [28], тензор мембранных усилий (*membrane resultant stress tensor*) $\mathcal{T}$ и тензор моментов (*coupled resultant stress tensor*) $\mathcal{M}$ по формулам

$$\mathcal{T} = \int_{-h_-}^{h_+} \hat{\boldsymbol{\sigma}} dz \;\; \mathcal{M} = -\int_{-h_-}^{h_+} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{n} z dz. \tag{24}$$

Учитывая (23) и выполняя интегрирование, приходим к следующим соотношениям:

$$\mathcal{T} = h(2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\mathbf{A}tr\boldsymbol{\epsilon}) - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}(2\mu\boldsymbol{\kappa} + \lambda\mathbf{A}tr\boldsymbol{\kappa}) + \mathcal{T}_c + \mathcal{T}_p,$$

$$\mathcal{T}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\left\{2\mu(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}) + \lambda\left(\mathbf{A}tr(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{Y}\right)\right\},$$

$$\mathcal{T}_p = \int_{-h_-}^{h_+}\left[2\mu\boldsymbol{\epsilon}_f + \lambda\mathbf{A}tr\boldsymbol{\epsilon}_f + z\left(2\mu\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_f + \lambda\mathbf{A}tr\left(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_f\right)\right)\right]dz,$$

$$-\mathcal{M} = \left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}(2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\mathbf{A}tr\boldsymbol{\epsilon}) - \frac{h_+^3 + h_-^3}{3}(2\mu\boldsymbol{\kappa} + \lambda\mathbf{A}tr\boldsymbol{\kappa})\right]\times\mathbf{n} + \mathcal{M}_c + \mathcal{M}_p, \tag{25}$$

$$-\mathcal{M}_c = \frac{h_+^3 - h_-^3}{3}\left\{2\mu(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}) + \lambda\left(\mathbf{A}tr(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}) + \mathbf{Y}\right)\right\}\times\mathbf{n},$$

$$
-\mathcal{M}_p = \int_{-h_-}^{h_+}\left[2\mu\boldsymbol{\epsilon}_f + \lambda\mathbf{A}tr\boldsymbol{\epsilon}_f + z\Big(2\mu\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_f + \lambda\mathbf{A}tr\Big(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_f\Big)\Big)\right]\times\mathbf{n}zdz\,.
$$

В этих формулах мы выделяем из общих выражений составляющие сил и моментов, подчеркнутые ранее двумя чертами, наделяя их индексом (c)urvature, и составляющие, связанные с учетом предварительного натяжения слоев, наделяя их индексом (p)resstressed.

Зависимость этих тензоров от перемещений точек поверхности осреднения приобретает вид

$$
\mathcal{T} = h\Big\{2\mu\big[\nabla_s\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \lambda\mathbf{A}\nabla_s\cdot\mathbf{v} - \big(\lambda\mathbf{A}tr\mathbf{B} + 2\mu\mathbf{B}\big)w\Big\} -
$$

$$
-\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\Big\{2\mu\Big[\nabla_s\big(\underline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}} + \nabla_s w\big)\cdot\mathbf{A}\Big]^{sym} + \lambda\mathbf{A}\nabla_S\cdot\big(\underline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}} + \nabla_s w\big)\Big\} + \mathcal{T}_c + \mathcal{T}_p
$$

$$
\mathcal{T}_c = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\Big\{2\mu\Big(\mathbf{C}\cdot\big[\nabla_S\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \big[\mathbf{B}\cdot\nabla_S\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym}\Big) + \lambda\Big(\mathbf{A}\big(\mathbf{C}:(\nabla_S\mathbf{v} - \mathbf{B}w\big) +
$$

$$
+\mathbf{B}\nabla_S\cdot\mathbf{v}\Big) - 2\mathbf{B}\cdot\big(\lambda\mathbf{A}tr\mathbf{B} + 2\mu\mathbf{B} + \mu\mathbf{C}\big)w\Big\},
$$

$$
\mathcal{T}_p = \int_{h_-}^{h_+}\Big[\Big\{2\mu\big[\nabla_S\mathbf{d}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \lambda\mathbf{A}\nabla_S\cdot\mathbf{d}\Big\} + z\Big\{2\mu\mathbf{D}\cdot\big[\nabla_S\mathbf{d}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \lambda\mathbf{D}:\nabla_S\mathbf{d}\Big\}\Big]dz\,, \quad (26)
$$

$$
-\mathcal{M} = \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\Big\{2\mu\big[\nabla_S\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \lambda\mathbf{A}\nabla_S\cdot\mathbf{v} - \big(\lambda\mathbf{A}tr\mathbf{B} + 2\mu\mathbf{B}\big)w\Big\}\times\mathbf{n} -
$$

$$
-\frac{h_+^3 - h_-^3}{3}\Big\{2\mu\Big[\nabla_S\big(\underline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}} + \nabla_S w\big)\cdot\mathbf{A}\Big]^{sym} + \lambda\mathbf{A}\nabla_S\cdot\big(\underline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}} + \nabla_S w\big)\Big\}\times\mathbf{n} + \mathcal{M}_c + \mathcal{M}_p\,,
$$

$$
\mathcal{M}_c = \frac{h_+^3 - h_-^3}{3}\Big\{2\mu\Big(\mathbf{C}\cdot\big[\nabla_S\mathrm{v}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \big[\mathbf{B}\cdot\nabla_S\mathrm{v}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym}\Big) +
$$

$$
+\lambda\Big(\mathbf{A}\big(\mathbf{C}\mathbf{:}(\nabla_S\mathrm{v} - \mathbf{B}w)\big) + \mathbf{B}\nabla_S\cdot\mathrm{v}\Big) - 2\mathbf{B}\cdot\big(\lambda\mathbf{A}tr\mathbf{B} + 2\mu\mathbf{B} + \mu\mathbf{C}\big)w\Big\}\times\mathbf{n},
$$

$$
\mathcal{M}_p = \int_{h_-}^{h_+}\mathbf{n}\times\Big[2\mu\big[\nabla_s\mathbf{d}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \lambda\mathbf{A}\nabla_S\cdot\mathbf{d} + z\Big\{2\mu\mathbf{D}\cdot\big[\nabla_s\mathbf{d}\cdot\mathbf{A}\big]^{sym} + \lambda\mathbf{D}\mathbf{:}\nabla_s\mathbf{d}\Big\}\Big]zdz\,.
$$

4. Для решения краевых задач часто эффективны методы разложения по собственным функциям дифференциального оператора, порождаемого уравнениями равновесия, записанными в терминах перемещений. Как правило, такие системы уравнений приведены для оболочек канонической формы в традиционных ортогональных системах координат либо в случаях, когда $h\|\mathbf{B}\|\leq 1$.

Получим уравнения равновесия теории оболочек в перемещениях. Как известно [23], в терминах тензоров сил и моментов они имеют вид

$$\nabla_S \cdot \mathbf{T} + \mathbf{p} = 0 \qquad \nabla_S \cdot \mathcal{M} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{m} = 0, \tag{27}$$

где векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{m}$ определяются формулами

$$\mathbf{p} = G_+ \mathbf{T}_+^0 - G_- \mathbf{T}_-^0 + \int_{h_-}^{h_+} \rho \mathbf{f} dz,$$

$$\mathbf{m} = h_+ G_+ \mathbf{n} \times \mathbf{T}_+^0 + h_- G_- \mathbf{n} \times \mathbf{T}_-^0 + \int_{-h_-}^{h_+} \rho z \mathbf{n} \times \mathbf{f} dz$$

и имеют смысл внешних поверхностных сил и моментов, а вектор $\mathbf{f}$ – плотность распределения объемных сил; $G_+ = G(h_+)$, $G_- = G(h_-)$; $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ – Гиббсов крест; векторы $\mathbf{T}_-^0$ и $\mathbf{T}_+^0$ определяются условиями нагружения лицевых поверхностей

$$\boldsymbol{\sigma}^3\Big|_{z=-h_-} = \mathbf{T}_-^0 \qquad \boldsymbol{\sigma}^3\Big|_{z=h_+} = \mathbf{T}_+^0.$$

Учитывая соотношение (6) приходим к следующей системе уравнений:

$$\nabla_S \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{A} - \underline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla_S \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{Q} \times \mathbf{n} + \mathbf{m} = 0,$$
$$\nabla_S \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{B} : \mathcal{T} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad \mathbf{B} : \mathcal{M} + \mathcal{T}_\times \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Следует отметить, что тензор сил, вообще говоря, состоит из двух слагаемых $\mathbf{T} = \mathcal{T} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{n}$, однако третье уравнение в классической теории рассматривается как определяющее для вектора перерезывающих сил $\mathbf{Q}$. Исключая его, приходим к уравнениям равновесия в форме

$$\begin{gathered}\nabla_s \cdot \mathcal{T} \times \mathbf{n} + \underline{\mathbf{B} \cdot \nabla_s \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{A}} + \mathbf{p} \times \mathbf{n} + \underline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}} = 0, \\ \nabla_s \cdot (\nabla_s \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{B} : \mathcal{T} + \nabla_s \cdot \mathbf{m} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}, \\ \mathbf{B} : \mathcal{M} + \mathcal{T}_\times \cdot \mathbf{n} = 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Заметим, что последнее уравнение в системе является алгебраическим.

Подставляя в (28) выражения (26), ограничиваясь случаем, когда поверхность осреднения совпадает со срединной поверхностью, т.е. $h_- = h_+ = \dfrac{h}{2}$, приходим к уравнениям

$$h\left\{\mu\nabla_s^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}+(\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\mathbf{v}-\nabla_s\cdot\left(\tilde{\mathbf{B}}w\right)\right\}\times\mathbf{n}+\underline{\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}}+\nabla_S\cdot\mathcal{T}_p\times\mathbf{n}+\underline{\mathbf{B}\cdot\nabla_s\cdot\mathcal{M}_p}+$$
$$+\underline{\frac{h^3}{12}\mathbf{B}\cdot\left\{\mu\nabla_s^2\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}+\nabla_S w\right)\cdot\mathbf{A}+(\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}+\nabla_s w\right)\right\}\times\mathbf{n}}+\mathbf{p}_{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}=0,$$
$$\frac{h^3}{12}(\lambda+2\mu)\nabla_s^2\nabla_s^2 w-h\left\{2\mu\mathbf{B}:\nabla_s\mathbf{v}+\lambda\mathbf{t}r\mathbf{B}\nabla_s\cdot\mathbf{v}-\left(2\mu\mathbf{t}r\mathbf{B}^2+\lambda\mathbf{t}r^2\mathbf{B}\right)w\right\}-\mathbf{B}:\mathcal{T}_p+\qquad(29)$$
$$+\underline{\frac{h^3}{12}(\lambda+2\mu)\nabla_s^2}\nabla_s\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla_s\cdot\left(\nabla_s\cdot\mathcal{M}_p\cdot\mathbf{A}\right)+\nabla_s\cdot\mathbf{m}=q.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{B}}=2\mu\mathbf{B}+\lambda\mathbf{A}tr\mathbf{B}$, $\mathbf{p}_{\mathbf{A}}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}$, $q=\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}$, а оператор ∇_s^2 следует определять как $\nabla_s^2\mathbf{f}=\nabla_s\cdot\left(\nabla_s\mathbf{f}\cdot\mathbf{A}\right)$.

Построенная система уравнений (29) описывает равновесие оболочки с учетом предварительного натяжения слоев в окрестности лицевых поверхностей в произвольной системе координат. Конечно же, решение конкретной задачи требует задания граничных условий в соответствии со способами закрепления или нагружения краев.

5. Несмотря на сложность уравнений (29), в ряде случаев удается построить аналитические решения порождаемых ими краевых задач. Конечно, это возможно для специальных форм граничных условий, однако такие «модельные» решения позволяют изучить качественные особенности напряженно-деформированного состояния исследуемых тонкостенных конструкций. Наиболее удобной в этом смысле является сферическая оболочка, т.е. оболочка, поверхность осреднения которой представляет собой связанную часть сферы.

Пусть (θ,ψ,z) – сферические координаты, которые связаны с декартовыми следующими формулами

$$X=(R+z)\sin\theta\cos\psi,\quad Y=(R+z)\sin\theta\sin\psi,\quad Z=(R+z)\cos\theta.$$

Здесь R – радиус поверхности осреднения. Связь базиса (1) с декартовым базисом и другие соотношения приведены в приложении. Сфера выгодно отличается от других поверхностей тем, что тензор $\mathbf{B}$ на ней является шаровым, т.е. $\mathbf{B}=-\mathbf{A}/R$. Это приводит к существенным упрощениям в уравнениях (29), поскольку

$$\nabla_s\cdot\mathbf{B}=0,\quad \mathbf{B}:\nabla_s\cdot\mathbf{v}=-\frac{1}{R}\nabla_s\cdot\mathbf{v},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}=-\frac{2}{R}(\lambda+\mu)\mathbf{A},\quad \mathbf{C}=-\mathbf{B}\quad \mathbf{D}=\mathbf{Y}=\mathbf{Z}=\mathbf{0}.$$

С учетом этих соотношений система уравнений (29) примет вид

$$\begin{gathered}
h\left\{\mu\nabla_s^2\mathbf{v}+(\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\mathbf{v}+\frac{2(\lambda+\mu)}{R}\nabla_s w\right\}\times\mathbf{n}-\underline{\frac{1}{R}\left(\mathbf{m}+\nabla_s\cdot\mathcal{M}_p\right)}+\nabla_s\cdot\mathcal{T}_p\times\mathbf{n}-\\
\underline{-\frac{h^3}{12R}\left\{-\frac{1}{R}\left(\mu\nabla_s^2\mathbf{v}+(\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\mathbf{v}\right)+(\lambda+2\mu)\nabla_s^2\nabla_s w\right\}\times\mathbf{n}}+\mathbf{p_A}\times\mathbf{n}=0,\\
\frac{h^3}{12}(\lambda+2\mu)\left(\nabla_s^2\nabla_s^2 w-\underline{\frac{1}{R}\nabla_s^2\nabla_s\cdot\mathbf{v}}\right)+(\lambda+\mu)\frac{2h}{R}\left\{\nabla_s\cdot\mathbf{v}+\frac{2}{R}w\right\}+tr\mathcal{T}_p+\\
+\nabla_s\cdot\left(\nabla_s\cdot\mathcal{M}_p\cdot\mathbf{A}\right)+\nabla_s\cdot\mathbf{m}=q.
\end{gathered}\tag{30}$$

Принимая дополнительно допущение о пологости оболочки, т.е. опуская подчеркнутые слагаемые, запишем (30) в более простой форме:

$$\begin{gathered}
h\left\{\mu\nabla_s^2\mathbf{v}+(\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\cdot\mathbf{v}+\frac{2(\lambda+\mu)}{R}\nabla_s w\right\}\times\mathbf{n}+\nabla_s\cdot\mathcal{T}_p\times\mathbf{n}+\mathbf{p_A}\times\mathbf{n}=0,\\
\frac{h^3}{12}(\lambda+2\mu)\nabla_s^2\nabla_s^2 w+(\lambda+\mu)\frac{2h}{R}\left\{\nabla_s\cdot\mathbf{v}+\frac{2}{R}w\right\}+tr\mathcal{T}_p+\nabla_s\cdot\left(\nabla_s\cdot\mathcal{M}_p\cdot\mathbf{A}\right)+\nabla_s\cdot\mathbf{m}=q.
\end{gathered}\tag{31}$$

6. Пусть опорный контур Г сферической оболочки представляет собой окружность $\theta=\theta_1$. Будем полагать, что края оболочки на опорном контуре жестко закреплены:

$$\mathbf{u}\big|_\Gamma=0,\ w\big|_\Gamma=0.$$

Рассмотрим частный случай нагружения, когда внешние поля являются потенциальными и осесимметричными, т.е. $\mathbf{p_A}=\nabla_S\mathrm{B}$ $\mathbf{m}=\nabla_S\mathrm{M}$. Кроме того, считаем, что поле $\mathbf{d}$ может быть представлено как градиент некоторой скалярной функции D (потенциала «сборочных» перемещений)

$$\boldsymbol{d}=\nabla_S\mathrm{D}.$$

В этом случае решения краевых задач для систем как (30), так и (31) могут быть выражены через известные специальные функции. Будем искать вектор тангенциального смещения в форме градиента скалярного потенциала φ, т.е. $\mathbf{v}=\nabla_s\varphi$.

Если подействовать на первое уравнение (30) оператором дивергенции, то система принимает вид линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования ∇_s^2:

$$\begin{gathered} h\left\{\mu\nabla_s^2\varphi+(\lambda+2\mu)\nabla_s^2\nabla_s^2\varphi+\frac{2(\lambda+\mu)}{R}\nabla_s^2 w\right\}-\underline{\frac{h^3}{12}\frac{(\lambda+2\mu)}{R}\nabla_s^2\nabla_s^2 w}- \\ \underline{+\frac{h^3}{12R^2}\left(\mu\nabla_s^2\varphi+(\lambda+2\mu)\nabla_s^2\nabla_s^2\varphi\right)}-\underline{\frac{\mathbb{M}+\tilde{\mathcal{M}}_p}{R}}+\tilde{\mathcal{T}}_p=0, \\ \frac{h^3}{12}(\lambda+2\mu)\nabla_s^2\nabla_s^2\left(w-\frac{\varphi}{\underline{R}}\right)+\frac{2}{R}(\lambda+\mu)\left\{\nabla_s^2\varphi+\frac{2w}{R}\right\}+ \\ +\frac{1}{R}\nabla_s^2\mathbb{M}+\nabla_s\cdot\left(\nabla_s\cdot\mathcal{M}_p\cdot\mathbf{A}\right)=q. \end{gathered} \tag{32}$$

Это свойство позволяет представить решение рассматриваемой краевой задачи в форме разложения по базисным функциям, определяемыми хорошо изученными решениями уравнения Гельмгольца $\nabla_s^2\zeta=\Lambda\zeta$. Решение $\mathbf{U}=(\nabla_s\varphi,w)$ будем отыскивать в виде спектрального разложения

$$\mathbf{U}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\xi_k}\mathbf{U}_k,$$

где $\mathbf{U}_k$ – собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}_k]=\zeta_k\mathbf{U}_k,\quad \mathcal{B}[\mathbf{U}_k]=0,$$

$$\mathcal{L}=\begin{pmatrix} -\left(h+\dfrac{h^3}{12R^2}\right)\left(\mu\nabla_s^2\cdot\mathbf{A}+(\lambda+\mu)\nabla_s\nabla_s\right) & \underline{\dfrac{h^3}{12}\dfrac{\lambda+2\mu}{R}\nabla_s^2\nabla_s}-\dfrac{2h}{R}(\lambda+\mu)\nabla_s \\ -\underline{\dfrac{h^3}{12}\dfrac{\lambda+2\mu}{R}\nabla_s^2\nabla_s}+\dfrac{2h}{R}(\lambda+\mu)\nabla_s & \dfrac{h^3}{12}(\lambda+2\mu)\nabla_s^2\nabla_s^2+\dfrac{4h}{R^2}(\lambda+\mu) \end{pmatrix}$$

а α_k – коэффициенты Фурье, определяемые заданными внешними силовыми полями и потенциалом «сборочных» перемещений D

$$\alpha_k = \langle \mathbf{U}_k, g \rangle, \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \int_\Omega \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} d\omega, \quad -g = \left(\mathsf{B} - \frac{1}{R}\left(\mathsf{M} + \tilde{\mathcal{M}}_p\right) + \tau_p, \frac{1}{R} \nabla_S^2 \mathsf{M} + \nabla_S^2 \mathcal{M}_p - q \right).$$

В силу матричной структуры оператора $\mathcal{L}$ векторы $\mathbf{U}_k$ можно представить как $\mathbf{U}_k = (a_k, b_k)\zeta$, где функция $\zeta = \zeta(\theta, \psi)$ является решением порождающего уравнения $\nabla_s^2 \zeta = \Lambda \zeta$. Характеристические числа Λ являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} -\left(h(\lambda + 2\mu) - \frac{h^3}{12} \frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \right)\left(\Lambda + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) - \xi & \frac{h^3}{12} \frac{\lambda + 2\mu}{R} \Lambda - \frac{2h}{R}(\lambda + \mu) \\ -\frac{h^3}{12} \frac{(\lambda + 2\mu)}{R} \Lambda^2 + \frac{2h}{R}(\lambda + \mu)\Lambda & \frac{h^3}{12}(\lambda + 2\mu)\Lambda^2 + \frac{4h}{R^2}(\lambda + \mu) - \xi \end{vmatrix} = 0,$$

а собственные значения ξ_k находятся путем удовлетворения граничных условий.

Авторы выражают благодарность профессору А.В. Манжирову за плодотворные дискуссии по теме исследования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11–01–00669–а, 12–08–01119–а, 12–08–01260–а, 12–08–90806) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН 12.

Библиографический список

1. Расчет трехслойных панелей / А.Я. Александров, Л.Э. Брюккер, Л.М. Куршин, А.П. Прусаков. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.

2. Александров А.Я., Куршин Л.М. Многослойные пластины и оболочки // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1969.

3. Амбарцумян С.А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки // ДАН Арм. ССР. – 1948. – № 5.

4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Физматгиз, 1974. – 448 с.

5. Баев Л.В., Чулков П.П. К расчету слоистых пластин. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1969.

6. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

7. Ворович И.И., Кадомцев И.Г. Качественное исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойной плиты // ПММ. – 1970. – Т. 34. – Вып. 5. – С. 870–876.

8. Григолюк Э.И., Корнев В.М. К формулировке уравнений трехслойных пластин и оболочек // Прочность и пластичность. – М.: Наука, 1971.

9. Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А. Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек. Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. – М.: Наука, 1998. – 464 с.

10. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001 – 288 с.

11. Cohen H., Wang C.-C. Some Equilibrium Problems for Compressible, Anisotropic, Laminated Nonlinearly Elastic Bodies // Arch. Rational Mech. Anal. – 1992. – Vol. 119, no. 9. – Pp. 1–34.

12. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A Continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rational Mech. Anal. – 1975. – No. 27. – P. 291–323.

13. Maugin, G.A. Material Inhomogeneities in Elasticity Chapman & Hall. Hardcover // Book Condition. – Brand New, 1993. – 280 p.

14. Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. – Cambridge Univ. Press, 2010.

15. Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // Докл. Акад. наук. – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 472–746.

16. Leissa A. Vibration of Shells Published for the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics. 1993.

17. Noll W. Materially Uniform Simple Bodies with Inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1956. – No. 27(1). – P. 1–32.

18. Манжиров А.В., Лычев С.А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // Докл. Акад. наук. – 2012. – Т. 443, № 4. – С. 438–441.

19. Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. – М.: Мир, 1991. – 240 с.

20. Gibbs J.W. Elements of vector analysis. – New Haven, 1884.

21. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки: пер. с англ. / под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 568 с.

22. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

23. Lebedev L.P., Cloud M.J, Eremeyev V.A. Advanced engineering analysis: calculus of variations and functional analysis with applications in mechanics. New Jersey: World Scientific, 2012. – 499 p.

24. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.

25. Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 199–208.

26. Михайловский Е.И. Классическая теория оболочек // Вестн. Сыкт. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Инф. – 2006. – Вып. 6. – С. 123–164.

27. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. – М.: Наука, 2008. – 280 с.

28. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2006. – 167 с.

References

1. Alexandrov A.J., Bryukker L.E., Kurshin L.M., Prusakov A.P. Raschet trekhsloynykh paneley [Calculation sandwich panels]. Moscow: Oborongiz, 1960, 271 p.

2. Alexandrov A.J., Kurshin L.M. Mnogosl’nie plastiny i obolochki [Laminated plates and shells]. Moscow: Nauka, 1969.

3. Ambartsumian S.A. Nekotorye osnovnye uravnenija teorii tonkoj sloistoj obolochki [Some of the basic equations of the theory of thin layered shell]. *Doklady akademii nauk Armyanskoy sovetskoy sotsialisticheskoy respubliki*, 1948, vol. 6, no. 5.

4. Ambartsumian S.A. Obschaja teorija anizotropnyh obolochek [The general theory of anisotropic shells]. Moscow: Fizmatgiz, 1974, 448 p.

5. Baev L.V., Chulkov P.P. K raschetu sloistyh plastin [On the analysis of laminated plates]. Novosibirsk: Sibirskoe otdelenie Akademii nauk USSR, 1969.

6. Bolotin V.V., Novichkov J.N. Mekhanika mnogoslojnykh konstrukciy [Mechanics of sandwich structures]. Moscow: Mashinostroenie, 1980, 375 p.

7. Vorovich I.I., Kadomtsev I.G. Kachestvennoe issledovanie naprya-zhenno-deformiruemogo sostojanija trehslojnoj plity [A qualitative study of the stress-deformed state of sandwich plate]. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, iss. 5, pp. 870–876.

8. Grigolyuk E.I., Kornev V.M. K formulirovke uravneniy trekhsloy-nykh plastin i obolochek [Formulation of the equations of sandwich plates and shells]. *Prochnost' i plastichnost'*. Moscow: Nauka, 1971.

9. Bakulin V.N., Obraztsov I.F., Potopachin V.A. Dinamicheskie zad-achi nelinejnoj teorii mnogosloynykh obolochek. Deystvie intensivnykh termosilovykh nagruzok, kontsentrirovannykh potokov energii [Dynamic problems of the nonlinear theory of multilayer shells. The intense thermo load, concentrated energy flows]. Moscow: Nauka, 1998, 464 p.

10. Andreev A., Nemirovsky Y. Mnogosloynye anizotropnye obo-lochki i plastiny: Izgib, ustoychivost', kolebaniya [Multilayered anisotropic shells and plates: bending, stability, vibration]. Novosibirsk: Nauka, 2001, 288 p.

11. Cohen H., Wang C.-C. Some equilibrium problems for compres-sible, anisotropic, laminated nonlinearly elastic bodies. *Arch. Rational Mech. Anal*, 1992, vol. 119, no. 9, pp. 1–34.

12. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A Continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal*, 1975, no. 27, pp. 291–323.

13. Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity Chapman & Hall, 1993. Hardcover. *Book Condition. – Brand New*, 280 p.

14. Epstein M. The geometrical language of continuum mechanics. – Cambridge Univ. Press, 2010.

15. Altenbach H., Eremeyev V.A., Morozov N.F. Linear theory of shells taking into account surface stresses. *Doklady Physics*, 2009, vol. 54, no. 12. pp. 531–535.

16. Leissa A. Vibration of Shells Published for the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics. 1993.

17. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Arch. Rat. Mech. Anal*, 1956, vol. 27(1), pp. 1–32.

18. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Mathematical Theory of Growing Solids. Finite Deformation. *Doklady Physics*, 2012, 57(4), 160–163.

19. Fransis Dzh. Knizhka s kartinkami po topologii [A picture book in topology]. Moscow: Academic Press, 1991, 240 p.

20. Gibbs J.W. Elements of vector analysis. New Haven, 1884.

21. Donnell L.G. Beams, plates and shells [Balki, plastiny i obolochki]. Pod red. Je.I. Grigoljuka. Moscow: Nauka. Home edition physical and mathematical literature, 1982, 568 p.

22. Lurie A.I. Nelinejnaja teorija uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1980, 512 p.

23. Lebedev L.P., Cloud M.J, Eremeyev V.A. Advanced engineering analysis: calculus of variations and functional analysis with applications in mechanics. New Jersey: World Scientific, 2012, 499 p.

24. Vlasov V.Z. General theory of shells and its applications in engineering [General theory of shells and its applications in engineering]. Moscow: RI, 1949, 784 p.

25. Lychev S.A., Lycheva T.N., Manzhirov A.V. Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mech. Solids*, 2011, 46(2), pp. 325–333.

26. Mihajlovskij E.I. Klassicheskaja teorija obolochek [The classical theory of shells]. *Vestnik Syktyvkarskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika, mekhanika, informatika*, 2006, no. 6, pp. 123–164.

27. Eremeyev V.A., Zubov L.M. Mehanika uprugih obolochek [Mechanics of Elastic Shells]. Moscow: Nauka, 2008

28. Zhilin P.A. Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek [Foundations of the Theory of Shells]. St. Petersburg: Polytechnicheskiy Universitet, 2006.

Приложение

1. Базисные векторы и дифференциальные операторы

Базисные векторы (1) на поверхности:

$$\rho_\theta = R\cos\theta\cos\psi\boldsymbol{i} + R\cos\theta\sin\psi\boldsymbol{j} - R\sin\theta\boldsymbol{k},$$
$$\rho_\psi = -R\sin\theta\sin\psi\boldsymbol{i} + R\sin\theta\cos\psi\boldsymbol{j},$$
$$\mathbf{n} = \sin\theta\cos\psi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\psi\boldsymbol{j} - \cos\theta k.$$

Базисные векторы в окрестности поверхности (9)

$$\mathbf{R}_\theta = (R+z)\cos\theta\cos\psi\mathbf{i} + (R+z)\cos\theta\sin\psi\mathbf{j} - (R+z)\sin\theta\boldsymbol{k},$$
$$\mathbf{R}_\psi = -(R+z)\sin\theta\sin\psi\mathbf{i} + (R+z)\sin\theta\cos\psi\mathbf{j},$$
$$\mathbf{n} = \sin\theta\cos\psi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\psi\mathbf{j} - \cos\theta k.$$

Дифференциальные операторы:

поверхностный градиент скалярного поля

$$\nabla_S \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_\psi}{\partial \psi}\mathbf{e}_\psi\right),$$

поверхностная дивергенция векторного поля

$$\nabla_S \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_\psi}{\partial \psi} + \cot\theta f_\theta\right),$$

поверхностный градиент дивергенции векторного поля

$$R\nabla_S\nabla_S \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f_\psi}{\partial\theta\partial\psi} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f_\psi}{\partial\psi} + \cot\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_\psi}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}f_\theta\right)\mathbf{e}_\theta +$$

$$+\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial\theta\partial\psi} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f_\psi}{\partial\psi^2} + \frac{\cot\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\psi.$$

оператор Лапласа:

– для скалярного поля

$$R^2\nabla_S^2\mathbf{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2};$$

– для векторного поля

$$R^2\nabla_S^2\mathbf{f} = \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\psi^2} - \cot^2\theta u_\theta\right)\mathbf{e}_\theta +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u_\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\psi}{\partial\psi^2} + \cot\theta\frac{\partial u_\psi}{\partial\theta} + 2\frac{\cot\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\psi} - \cot^2\theta u_\psi\right)\mathbf{e}_\psi.$$

2. Физические компоненты тензоров деформаций:

Мембранной деформации

$$\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon\frac{1}{R}\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial\theta} + \frac{w}{R} \qquad \varepsilon_{\psi\psi} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\upsilon_\psi}{\partial\psi} + \cot\theta\upsilon_\theta\right) + \frac{w}{R},$$

$$\varepsilon_{\theta\psi} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\upsilon_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\upsilon_\psi}{\partial\psi} + \cot\theta\upsilon_\psi\right);$$

Изгибной деформации

$$\kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right),$$

$$\kappa_{\psi\psi} = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \upsilon_\psi}{\partial \psi} + \cot\theta\,\upsilon_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \cot\theta\frac{\partial w}{\partial \theta}\right),$$

$$2\kappa_{\theta\psi} = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \upsilon_\psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \psi} - \cot\theta\,\upsilon_\psi - \frac{2}{\sin\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial\psi} - \cot\theta\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)\right).$$

Об авторах

Лычев Сергей Александрович (Москва, Россия) – старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, доктор физ.-мат. наук Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (119526, г.Москва, проспект Вернадского, 101, корп. 1, e-mail: lychevsa@mail.ru).

Барышев Андрей Алексеевич (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, доцент Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, e-mail: BaryshevAA@gmail.com).

About the authors

Lychev Sergey Alexandrovich (Moscow, Russian Federation) – Senior Research Scientist of the Laboratory for Modelling in Solid Mechanics, Doctor in Physics and Mathematics Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy (101, Vernadskogo, block 1, Moscow, 119526, Russian Federation, prosp. e-mail: lychevsa@mail.ru).

Baryshev Andrey Alexeevich (Moscow, Russian Federation) – Associate Professor of the Department of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Ph.D. in Physics and Mathematics Saratov State University (83, Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russian Federation, e-mail: BaryshevAA@gmail.com).

Получено 20.11.2012