

УДК 539.3

**А.В. Новосёлов, В.Э. Вильдеман**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ НА БАЗЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Рассмотрена модель разрушения ортотропного материала по совокупности критериев в плоском напряженном состоянии. Составлен алгоритм численной реализации процесса разрушения с учетом стадийности. Представлены результаты численного моделирования процессов разрушения ортотропных пластин в виде расчетных диаграмм деформирования, содержащих ниспадающую ветвь. Рассмотрены случаи реализации различных механизмов разрушения на основе использования совокупности критериев. Показано влияние стохастического характера прочностных свойств материала на процесс разрушения.

**Ключевые слова:** закритическое деформирование, численное моделирование, ортотропные пластины, структурное разрушение.

**A.V. Novoselov, V.E. Vildeman**

Perm National Research Politechnic University, Perm, Russian Federation

## **STRUCTURAL FAILURE BEHAVIOR RESEARCH FOR THE PLANAR STRESSED PLATES BASED ON NUMERICAL MODELING**

The multiple criteria failure model for the orthotropic material in plane stress is discussed. Numerical modeling algorithm of structural failure with account of multiple phases is presented. This work contains results for numerical failure modeling of the orthotropic plates in the form of calculating strain curves containing dependent branch. The cases of different failure mechanism realizations based on totality of failure criteria are considered. The influence of stochastic nature of material strength parameters on failure process is shown.

**Keywords:** post critical deformation, numerical modeling, orthotropic plates, structural failure.

Закритическая стадия деформирования является одной из характерных особенностей нелинейного поведения материалов, связанного с накоплением структурных повреждений. Вопросы изучения закономерностей закритического деформирования привлекают внимание исследователей в связи с необходимостью использования деформационных резервов материалов для повышения живучести и несущей способности конструкций [1, 2]. Для развития методов расчета ответственных сооружений и конструкций, включающих, в частности, оценку живучести, необходимо получение большого объема данных о характере поведения материалов на закритической стадии деформирования [3, 4]. В частности, для случая перфорированных пластин данные вопросы рассматривались в работе [5].

Одним из инструментов получения данных о закономерностях процессов неупругого деформирования и разрушения является вычислительный эксперимент [6–8]. Так, с помощью вычислительного эксперимента была показана многостадийность процесса накопления повреждений, установлена зависимость ниспадающей ветви диаграммы деформирования от вида напряженного состояния [9, 10].

Для исследования процесса накопления повреждений в нагруженной ортотропной пластине в данной работе используется подход, в соответствии с которым материал заменяется совокупностью структурных элементов с одинаковыми или различными прочностными характеристиками, а процесс накопления повреждений сводится к последовательному изменению жесткостных свойств этих элементов. В данной постановке при определении состояния того или иного структурного элемента в расчет принимаются напряжения, усредненные по элементу.

Вычисление полей напряжений  $\sigma_{ij}(r)$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}(r)$  осуществляется с помощью замкнутой системы уравнений, в которую входят уравнения равновесия, записанные без учета массовых сил, геометрические соотношения Коши и определяющие соотношения, предусматривающие скачкообразное изменение свойств при разрушении по тому или иному механизму. Для ортотропных материалов в плоском напряженном состоянии определяющие соотношения принимают вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1(1-\lambda_1)}\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}(1-\lambda_4)}{E_1(1-\lambda_1)}\sigma_{22},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1(1-\lambda_2)}\sigma_{22} - \frac{\nu_{12}(1-\lambda_4)}{E_1(1-\lambda_1)}\sigma_{11}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{G_{12}(1-\lambda_3)}\tau_{11},$$

где  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$  – упругие характеристики ортотропного материала,  $\lambda_n$  – функции поврежденности, которые в случае хрупкого разрушения могут принимать значения 0 или 1 в зависимости от типа разрушения материала. Воспользуемся моделью разрушения материала по совокупности критериев, которая позволяет различать механизмы разрушения [1]. Для случая ортотропного материала в плоском напряженном состоянии учитываются три различных вида разрушения (отрывы в направлении двух осей ортотропии и сдвиг). Рассмотренные критерии разрушения представляются в виде неравенств, сведенных в таблицу. Здесь  $x_1$  и  $x_2$  – направления осей ортотропии материала,  $\varepsilon_{ij}^{cr}$  – прочностные константы материала.

Совокупность критериев разрушения и схема изменения характеристик ортотропной среды в плоском напряженном состоянии

№ п/п	Механизм разрушения материала	Критерий разрушения	Поврежденность			
			$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
1	Отрыв при растяжении в направлении $x_1$	$\varepsilon_{11} > \varepsilon_{11}^{cr}$	1	0	1	1
2	Отрыв при растяжении в направлении $x_2$	$\varepsilon_{22} > \varepsilon_{22}^{cr}$	0	1	1	1
3	Сдвиг в плоскости $x_1x_2$	$\varepsilon_{12} > \varepsilon_{12}^{cr}$	1	1	1	1
4	Отрыв при растяжении в направлении $x_1$ после отрыва в направлении $x_2$	$\lambda_2 = 1; \varepsilon_{11} > \varepsilon_{11}^{cr}$	1	1	1	1
5	Отрыв при растяжении в направлении $x_2$ после отрыва в направлении $x_1$	$\lambda_1 = 1; \varepsilon_{22} > \varepsilon_{22}^{cr}$	1	1	1	1

Алгоритм описания процесса деформирования и разрушения с использованием вышеизложенной математической модели включает в себя на первом этапе построение конечно-элементной модели расчетной области, приложение начальных граничных условий в перемещениях и расчет напряженно-деформированного состояния пластины. Причем устанавливаемая на данном этапе величина перемещений выбирается настолько малой, чтобы под ее действием заведомо не произошло разрушения ни одного элемента.

После расчета напряженно-деформированного состояния пластины происходит проверка выполнения критериев разрушения в каждом конечном элементе и заданная величина перемещений масштабируется таким образом, чтобы критерий разрушения выполнялся в единственном структурном элементе расчетной области, напряженно-деформированное состояние которого наиболее близко к моменту разрушения.

Жесткостные характеристики материала разрушившегося конечного элемента в зависимости от сработавшего в нем критерия разрушения изменяются согласно таблице. Далее, в итерационном режиме происходит пересчет полей напряжений и деформаций в расчетной области без изменения граничных условий с последующей проверкой выполнения критериев разрушения элементов и изменением жесткостных характеристик материалов элементов, для которых выполняется тот или иной критерий разрушения.

Описанная процедура повторяется до тех пор, пока при очередном пересчете полей напряжений и деформаций не окажется ни одного конечного элемента, для которого выполнялся бы тот или иной критерий разрушения. В этом случае последовательность действий повторяется с этапа масштабирования величины перемещений. В качестве условия окончания работы алгоритма выбирается достижение некоторого предельного уровня перемещений либо некоторого минимального значения суммарного усилия, действующего на нижней грани пластины. На основе вычислений строятся диаграммы деформирования расчетной области в координатах усилие–перемещение и картины зон разрушения.

Важной особенностью приведенного выше алгоритма является возможность моделирования стадийности процесса разрушения материала расчетной области: конечный элемент, претерпевший разрушение по одному из механизмов, сохраняет часть своей несущей способ-

ности и может быть разрушен по другому механизму. Состояния конечного элемента в процессе многостадийного разрушения отражены на рис. 1. Цифрами обозначены механизмы разрушения, соответствующие приведенным в таблице.

Для пластины, представленной на рис. 2, проведено численное моделирование процессов структурного разрушения в условиях одноосного деформирования. Пластина представляет собой квадрат со стороной 10 см и круглым отверстием диаметром 2 см в центре. В качестве граничных условий для расчетной области задавалось жесткое перемещение  $u_0$  на верхнем краю пластины и закрепление нижнего края пластины по оси  $x_1$ . Остальные границы пластины считались свободными от нагрузок.

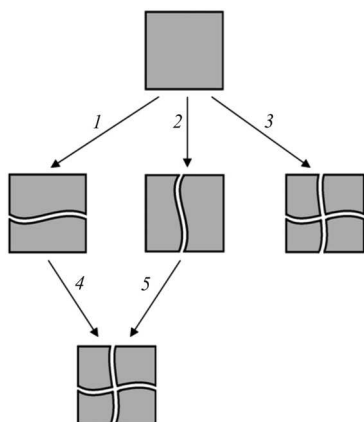


Рис. 1. Схема процесса разрушения по совокупности критериев

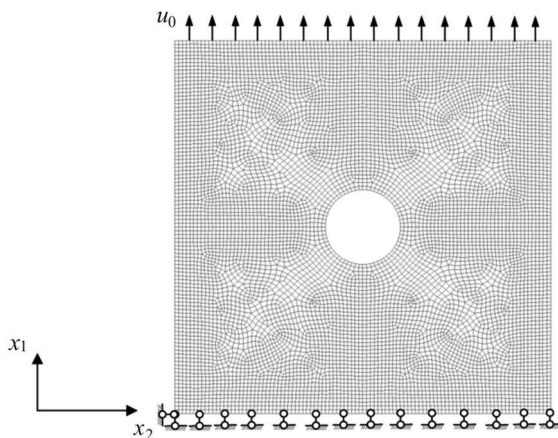


Рис. 2. Дискретизация на конечные элементы и граничные условия в расчетной области

Расчетная область разбивалась на четырехугольные конечные элементы таким образом, чтобы конечно-элементная сетка обладала горизонтальной и вертикальной симметрией с целью снижения влияния эффектов неоднородности дискретизации. Для проведения численных экспериментов по анализу возможностей представленной в данной работе математической модели был выбран упруго-хрупкий материал со следующими параметрами:  $E_1 = 142,8$  ГПа,  $E_2 = 9,13$  ГПа,  $G_{12} = 5,49$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,3$ .

В первой серии экспериментов принималась гипотеза о том, что материал пластины разрушается только по одному из трех представленных в модели механизмов с одинаковыми прочностными константами для всех элементов.

На рис. 3–5 приведены полученные зависимости суммарного усилия реакции от перемещения верхней грани пластины, отражающие влияние выбранного критерия разрушения на механическое поведение области деформирования.

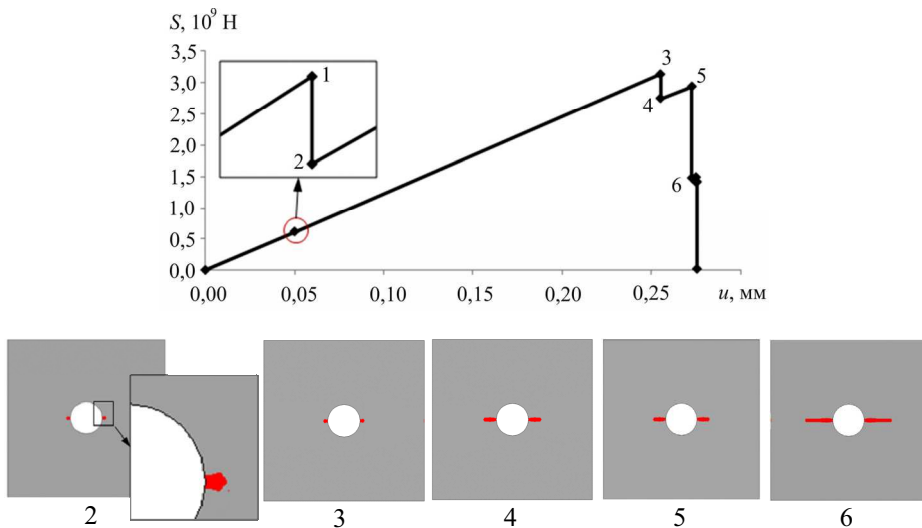


Рис. 3. Диаграмма деформирования и картины зон разрушения, построенные для процесса одноосного «жесткого» нагружения ортотропной пластины при действии механизма разрушения «1» (отрыв в направлении  $x_1$ )

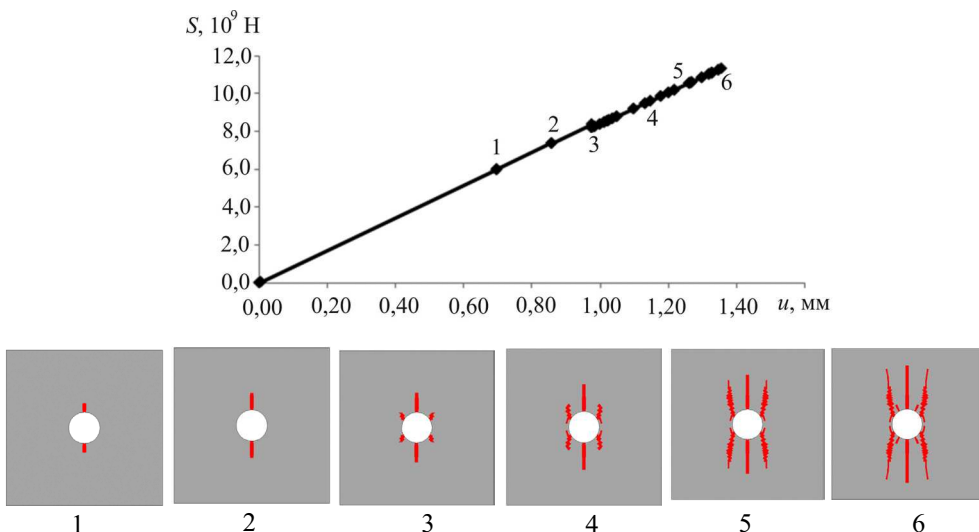


Рис. 4. Диаграмма деформирования и картины зон разрушения, построенные для процесса одноосного «жесткого» нагружения ортотропной пластины при действии механизма разрушения «2» (отрыв в направлении  $x_2$ )

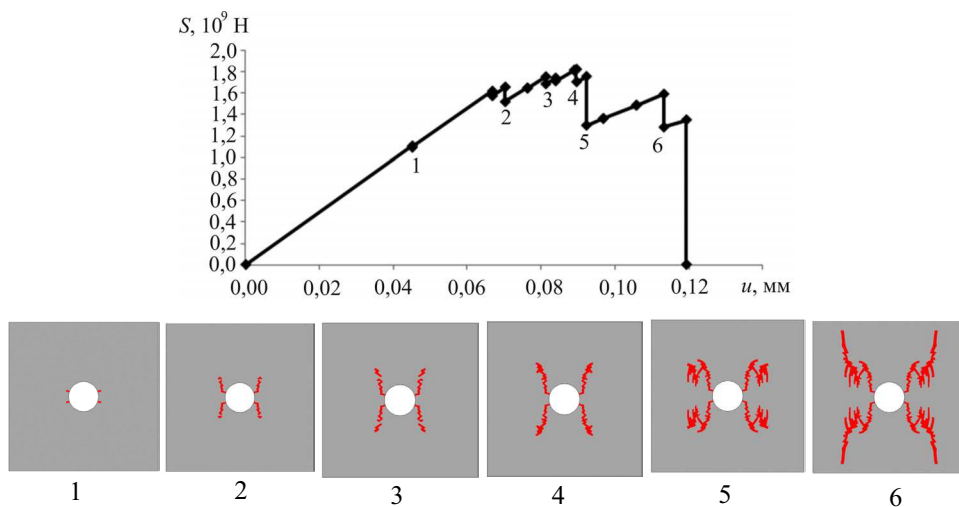


Рис. 5. Диаграмма деформирования и картины зон разрушения, построенные для процесса одноосного «жесткого» нагружения ортотропной пластины при действии механизма разрушения «3» (сдвиг в плоскости  $x_1 x_2$ )

Видно, что выбор действующего критерия разрушения в значительной степени влияет на вид диаграммы деформирования и эволюцию зон разрушения в расчетной области. Так, картина зон разрушения пластины по механизму отрыва в направлении  $x_1$  представляет собой трещину, симметрично прорастающую из концентраторов напряжения по обеим сторонам перфорации к сторонам пластины. Диаграмма деформирования пластины, разрушающейся по механизму отрыва в направлении  $x_2$ , остается линейной, так как структурные элементы, разрушенные по данному механизму, сохраняют способность сопротивляться нагрузкам в направлении  $x_1$ .

Для дальнейшего исследования возможностей модели был проведен численный эксперимент, в котором предусмотрена возможность реализации всех рассмотренных механизмов разрушения. На рис. 6 показана диаграмма деформирования и картины эволюции зон разрушения для ортотропной пластины при одноосном «жестком» нагружении при разрушении по механизмам «1» и «3» (отрыв в направлении  $x_1$  и сдвиг в плоскости  $x_1 x_2$ ) с соотношением предельных прочностных характеристик для данных механизмов разрушения  $\varepsilon_{11}^{cr} / \varepsilon_{12}^{cr} = 15/1$ .

Из картин разрушения материала в расчетной области по совокупности вышеприведенных механизмов видно, что в зависимости от того, как перераспределяются напряжения, на определенном шаге нагружения может преобладать тот или иной механизм разрушения.

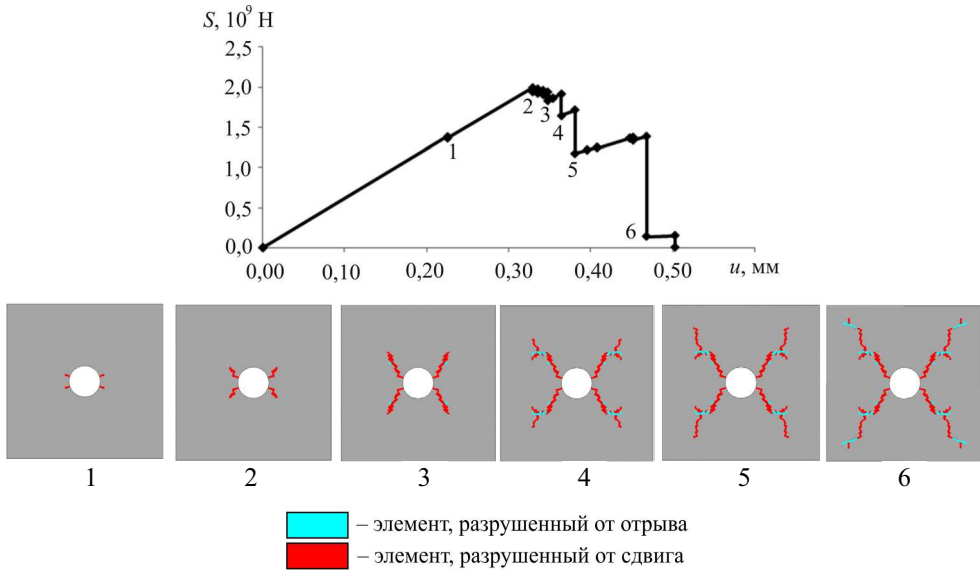


Рис. 6. Диаграмма деформирования и картины зон разрушения, построенные для процесса одноосного «жесткого» нагружения ортотропной пластины при действии механизмов разрушения «3» и «1» (сдвиг в плоскости  $x_1 x_2$  и отрыв в направлении  $x_1$ )

Важную роль при моделировании процессов разрушения играет учет стохастического разброса прочностных свойств структурных элементов расчетной области. Положим, что предельные прочностные характеристики элементов соответствуют трехпараметрическому закону распределения Вейбулла, функция распределения которого

$$F(\varepsilon) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0^{cr}}{\varepsilon_a^{cr} - \varepsilon_0^{cr}} \right)^b \right], \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0^{cr} \geq 0$  – параметр минимальной прочности,  $\varepsilon_a^{cr}$  – параметр характерной прочности,  $b > 0$  – параметр формы. Параметры распределения связаны с коэффициентом вариации  $k_v$  и математическим ожиданием  $\langle \varepsilon^{cr} \rangle$  случайной величины следующими соотношениями:

$$\varepsilon_0^{cr} = \langle \varepsilon^{cr} \rangle \left[ 1 - \frac{k_v \cdot C_1}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} \right], \quad \varepsilon_a^{cr} = \frac{k_v \langle \varepsilon^{cr} \rangle}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} + \varepsilon_0^{cr},$$

где  $C_1 = \Gamma \left( 1 + \frac{1}{b} \right)$ ,  $C_2 = \Gamma \left( 1 + \frac{2}{b} \right)$ , а  $\Gamma(z)$  – гамма-функция.



На рис. 7 представлена диаграмма деформирования и картины зон разрушения расчетной области под действием одноосного растяжения по совокупности механизмов разрушения «1» и «3» с коэффициентом вариации предельных прочностных характеристик структурных элементов  $k_v = 0,3$ . Для данного случая параметр минимальной прочности  $\varepsilon_0^{cr} = 0,001$ , параметр формы  $b = 1,3$ .

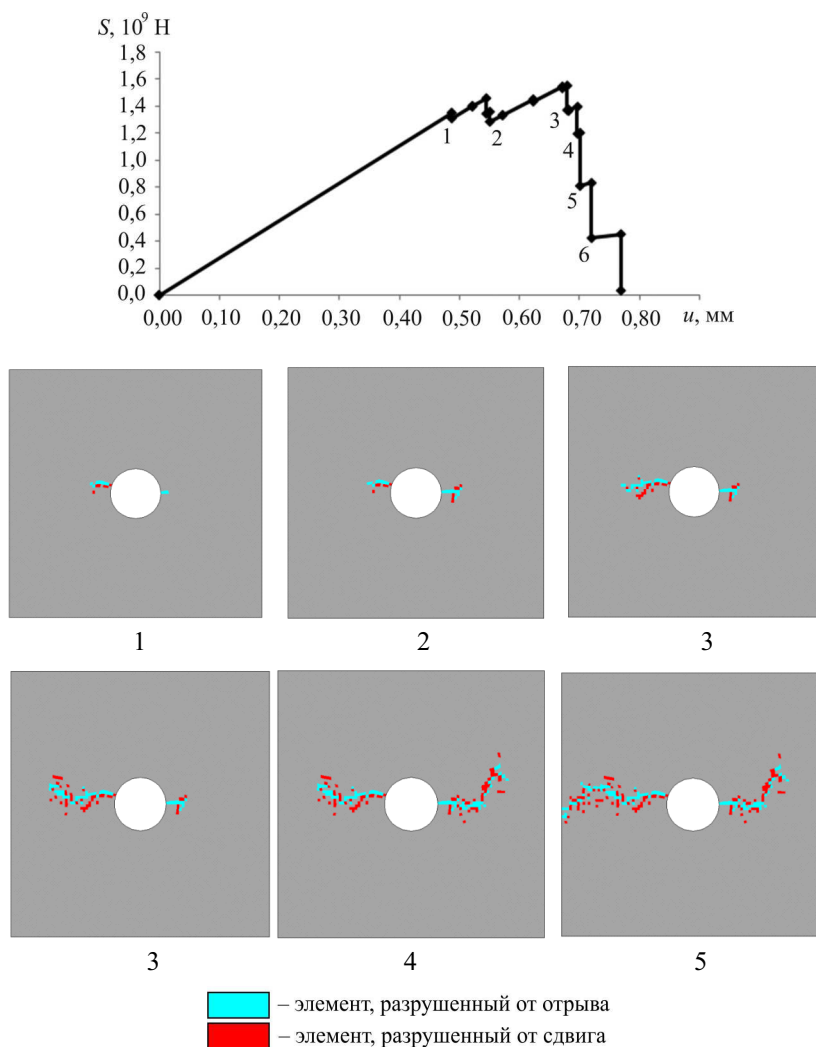


Рис. 7. Диаграмма деформирования и картины зон разрушения, построенные для процесса одноосного «жесткого» нагружения ортотропной пластины при действии механизмов разрушения «3» и «1» (сдвиг в плоскости  $x_1 x_2$  и отрыв в направлении  $x_1$ ) с коэффициентом вариации прочностных свойств  $k_v = 0,3$

Из приведенных на рисунке картин эволюции повреждений видно, что стохастический характер прочностных свойств конечных элементов значительно влияет на протекание процесса разрушения ортотропной пластины, в частности, картина зон разрушения теряет свойство симметрии, процесс в меньшей степени зависит от расположения концентраторов напряжения.

Таким образом, приведенные данные демонстрируют возможность математического моделирования многоэтапного процесса повреждения деформируемого тела на основе использования совокупности критериев и схемы изменения свойств материала с учетом различных механизмов разрушения.

### **Библиографический список**

1. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1997. – 288 с.

2. Вильдеман В.Э., Ильиных А.В. Закономерности механического поведения зернистых композитов, связанные с формой и размерами элементов структуры // Вестник ПНИПУ. Механика. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. – № 4. – С. 49–61.

3. Вильдеман В.Э., Зайцев А.В., Горбунов А.Н. Закономерности и механизмы повреждения неоднородных тел на закритической стадии // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2, № 4. – С. 41–53.

4. Вильдеман В.Э., Ильиных А.В. Моделирование процессов структурного разрушения и масштабных эффектов разупрочнения на закритической стадии деформирования неоднородных сред // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10, № 4. – С. 23–31.

5. Вильдеман В.Э., Поляков М.В., Цыплаков А.М. Численное моделирование процессов разрушения перфорированных пластин // Механика и процессы управления. Т. 1 / УрО РАН. – Екатеринбург, 2004. – С. 281–290.

6. Бурого Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1, № 4. – С. 5–20.

7. Балахонов Р.Р., Романова В.А. Механизмы разрушения угольного композита. Иерархическое численное моделирование // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т. 11, № 5. – С. 83–88.

8. Ашихмин В.Н., Трусов П.В. Прямое моделирование упруго-пластического поведения поликристаллов на мезоуровне // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 37–51.

9. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Зайцев А.В. Эволюция структурных повреждений и макроразрушение неоднородной среды на закритической стадии деформирования // Механика композитных материалов. – 1997. – Т. 33, № 3. – С. 329–339.

10. Накопление структурных повреждений и устойчивое закритическое деформирование композитных материалов / Ю.В. Соколкин, В.Э. Вильдеман, А.В. Зайцев, И.Н. Рочев // Механика композитных материалов. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 234–264.

### References

1. Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materyalov [Mechanics of inelastic deformation and failure of composite materials]. Moscow: Nauka, 1997.

2. Vildeman V.E., Ilinykh A.V. Zakonomernosti mekhanicheskogo povedeniya zernistykh kompozitov, svyazannye s formoi i razmerami elementov strukturi [Principles of mechanical behavior of granular composites, connected with shape and size of structure elements]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo polytekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2011, no 4, pp. 49–61.

3. Vildeman V.E., Zaitsev A.V., Gorbunov A.N. Zakonomernosti i mekhanizmy povrezhdeniya neodnorodnykh tel na zakritichestoi stadii [Mechanisms and regularities of heterogeneous-solid damage-accumulation at the supercritical stage]. *Physical Mesomechanics*. 1999, vol. 2, no. 4, pp. 41–53.

4. Vildeman V.E., Ilinykh A.V. Modelirovanie protsessov strukturnogo razrusheniya i masshtabnykh effektov razuprochneniya na zakriticheskoi stadii deformirovaniya neodnorodnykh sred [Simulation of structural damage accumulation and scale effects of strain-softening at the post-critical deformation stage in heterogeneous media]. *Physical Mesomechanic*, 2007, 10, no. 4, pp. 23–31.

5. Vildeman V.E., Polyakov M.V., Ziplakov A.M. Chislennoe modelirovanie protsessov razrusheniya perforirivannykh plastin [Numerical modeling of damage accumulation in perforated plates]. *Mechanics and control processes*. Yekaterinburg: RAS, 2004.

6. Burago N.G. Modelirovanie razrusheniya uprugoplasticheskikh tel [Failure modeling for elastoplastic bodies]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2008, vol. 1, no 4, pp. 5–20.

7. Balachonov R.R., Romanova V.A. Mekhanizmi razrusheniya ugol'nogo kompozita. Ierarkhicheskoe chislennoe modelirovanie [Carbon composite failure mechanics. Hierarchical numerical modeling]. *Physical Mesomechanics*, 2008, vol. 11, no. 5, pp. 83–88.

8. Ashihmin V.N., Trusov P.V. Pryamoe modelirovanie uprugoplasticheskogo povedeniya polikristallov na mezourovne [Direct polycrystals elastoplastic mesoscale behavior modeling]. *Physical Mesomechanics*, 2002, vol. 5, no. 3, pp. 37 – 51.

9. Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Zaitsev A.V. Evolutsiya strukturnykh povrezhdeniy i makrorazrushenie neodnorodnoi sredy na zakriticheskoj stadii deformirovaniya [Damage structure evolution of heterogeneous media at supercritical deformation stage]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1997, vol. 33, no. 3, pp. 231–238.

10. Sokolkin Yu.V., Vildeman V.E., Zaitsev A.V., Rochev I.N. Nakoplenie strukturnykh povrezhdeniy i ustoychivoe zakriticheskoe deformirovanie kompozitnykh materialov [Structural damage accumulation and stable post-critical deformation of composite materials]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 1998, vol. 34, no. 2, pp. 171–183.

### Об авторах

**Новоселов Артем Витальевич** (Пермь, Россия) – аспирант кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: mildfire@gmail.com).

**Вильдеман Валерий Эрвинович** (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, директор Центра экспериментальной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета, профессор кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: wildeman@pstu.ru).

### **About the authors**

**Novoselov Artem Vitalievich** (Perm, Russian Federation) – graduate student of Department of Mechanics of Composite Materials and Structures, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, Russian Federation, 614990, e-mail: mildfire@gmail.com).

**Vildeman Valeriy Ervinovich** (Perm, Russian Federation) – Doctor in Physics and Mathematics, Director of The Center of Experimental Mechanics PNRPU, Professor of Department of Mechanics of Composite Materials and Structures, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, Russian Federation, 614990, e-mail: wiledemann@pstu.com).

Получено 20.11.2012