

УДК 539.3

К.Б. Устинов, П.С. Шушпанников

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ
СФЕРОИДАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

Рассматривается задача о неоднородности в форме эллипсоида вращения в бесконечно протяженной однородной изотропной упругой среде. На основе метода эквивалентных включений Эшелби выписаны выражения для концентрации напряжений внутри и на границе неоднородностей, отличающейся от вмещающего тела упругими константами (модулем сдвига и коэффициентом Пуассона). Путем предельных переходов и асимптотических разложений общего решения получены выражения для концентрации напряжений внутри и на границе неоднородностей для ряда практически важных частных случаев. Параметрами, определяющими тип асимптотического поведения, являются отношение полуосей включения и отношение сдвиговых модулей включения и матрицы, или их обратные величины. Коэффициенты Пуассона матрицы и включения оказывают существенно меньшее влияние. При одновременном сильном отклонении указанных параметров от единицы выделены семь непересекающихся областей, соответствующие различным последовательным предельным переходам по этим параметрам к нулю, либо к бесконечности. Выделенные семь областей соответствуют различным физическим ситуациям, соответствующим очень жестким или очень мягким включениям в форме сильно сплюснутых дисков или сильно вытянутых иголок. Хотя рассмотренные в статье решения были либо получены ранее, либо могли бы быть получены из известных частных решений алгебраическими манипуляциями, достоинством использованного метода является получение не только самих решений для ряда частных случаев, но и оценки области их применимости. В работе также даны численные оценки области применимости асимптотик, полученные путем их сравнения с точными решениями и подтверждающие правильность теоретических оценок.

Ключевые слова: включение, неоднородность, концентрация напряжений, тензор Эшелби, малый параметр.

K.B. Ustinov, P.S. Shushpannikov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

**ON STRESS CONCENTRATIONS CAUSED BY SPHEROIDAL
INHOMOGENEITIES**

The problem of spheroidal inclusion in an infinite homogeneous isotropic elastic media is considered. On the base of Eshelby's method of equivalent inclusions the stress concentrations inside and at the inclusion boundary are written down for the inclusions, which elastic constants (shear moduli and Poisson's ratios) are different from the elastic constants of the media (matrix). Expressions for stress concentrations both inside and at the boundary were obtained by asymptotic expansions and limit transitions of the general solution for the number of particular important cases. Parameters determining the

type of asymptotical behavior are the ratio of the inclusion semi-axes and ratios of the shear moduli of the matrix and inclusion (or the inversed values). The Poisson's ratios of matrix and inclusion have less effect. For simultaneous high deviation of these parameters from unity seven non-overlapping regions are distinguished corresponding to various successive limit transitions of these parameters to zero either to infinity. These seven regions correspond to various physical situations corresponding to penny-shaped and needle-like inclusions of high and low rigidity. Although the obtained solutions were either known before, or might be obtained from the known particular solutions by algebraic manipulations, the advantage of the used method is in simultaneous estimation of the applicability ranges of the obtained solutions rather than obtaining the solution themselves. The applicability ranges of the obtained asymptotics were also obtained by numerical comparison with the exact solutions, which confirm the theoretical estimations.

Keywords: inclusion, inhomogeneity, stress concentration, Eshelby tensor, small parameter.

Введение и общие положения

При разработке новых материалов и при выполнении расчетов на прочность важным является вопрос определения концентраций напряжений, вызываемых наличием в материале неоднородностей, свойства которых отличаются от свойств основного материала.

Концентрации напряжений как внутри, так и на внешней границе неоднородностей могут быть посчитаны на основе метода эквивалентных включений Эшелби [1]. В случае эллипсоидальной (в частности, сфероидальной) неоднородности напряжения $\hat{\sigma}^{in}$ внутри нее однородны и полностью определяются напряжениями $\hat{\sigma}^{\infty}$, приложенными на бесконечности

$$\hat{\sigma}^{in} = \hat{B}^{in} \cdot \hat{\sigma}^{\infty}. \quad (1)$$

Здесь \hat{B}^{in} – искомый тензор концентрации напряжений 4-го ранга. Здесь и далее, если не оговорено обратное, применяется прямая, безындексная форма записи. Предполагается, что внутри и вне неоднородности выполняется обобщенный закон Гука:

$$\hat{\sigma}^{\infty} = \hat{\Lambda}_0 \cdot \hat{\varepsilon}^{\infty}, \hat{\sigma}^{in} = \hat{\Lambda}_* \cdot \hat{\varepsilon}^{in}, \quad (2)$$

где $\hat{\Lambda}_0$ и $\hat{\Lambda}_*$ – тензоры упругости матрицы и неоднородности соответственно; $\hat{\varepsilon}^{\infty}$ – тензор деформации на бесконечности; $\hat{\varepsilon}^{in}$ – тензор деформации внутри неоднородности. Неоднородность предполагается свободной от собственных деформаций.

Упругие поля внутри сфероидальной неоднородности могут быть найдены следующим образом [1, 2]. Вводя понятие эквивалентного включения из материала матрицы, получаем систему уравнений, соот-

ветствующую равенству напряжений в истинном и эквивалентном включениях, для определения соответствующих эквивалентных собственных деформаций $\hat{\varepsilon}^*$, которые имели бы место в таком включении:

$$\hat{\Lambda}_* \cdot \hat{\varepsilon}^{in} = \hat{\Lambda}_0 \cdot (\hat{\varepsilon}^{in} - \hat{\varepsilon}^*), \hat{\varepsilon}^{in} = \hat{\varepsilon}^\infty + \hat{\varepsilon}^{add}, \quad (3)$$

где $\hat{\varepsilon}^{add}$ – тензор стесненной деформации эквивалентного включения, связанный с эквивалентными собственными деформациями посредством тензора Эшелби \hat{S} [1]:

$$\hat{\varepsilon}^{add} = \hat{S} \cdot \hat{\varepsilon}^*. \quad (4)$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эшелби для рассматриваемого случая изотропной матрицы и неоднородностей в форме эллипсоидов вращения (сфероидов) с полуосями $a_1 = a_2 \leq a_3$ известны. В системе координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре неоднородности O и осями, направленными вдоль осей эллипсоида, имеем [1, 2]

$$\begin{aligned} S_{1111} = S_{2222} &= \left(\frac{3P}{4} + R \right) I - \pi P \rho^2, S_{1122} = S_{2211} = \left(\frac{P}{4} - R \right) I - \frac{\pi}{3} P \rho^2, \\ S_{1133} = S_{2233} &= \frac{4\pi}{3} P \rho^2 - (P \rho^2 + R) I, S_{3311} = S_{3322} = 4\pi \left(\frac{P}{3} - R \right) - (P - 2R) I, \\ S_{3333} &= 4\pi \left(\frac{P}{3} (1 - 3\rho^2) + R \right) + 2(P \rho^2 - R) I, \\ S_{1313} = S_{2323} &= 2\pi \left(\frac{P}{3} (1 + \rho^2) + R \right) - (P(1 + \rho^2) + R) I / 2, S_{1212} = (S_{1111} - S_{1122}) / 2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{8\pi(1-\nu_0)} \frac{1}{(1-\rho^2)}, R = \frac{1}{8\pi(1-\nu_0)} \frac{1-2\nu_0}{1-\rho^2}, \\ I &= \frac{2\pi\rho}{(\rho^2-1)^{3/2}} \left[\rho\sqrt{\rho^2-1} - \cosh^{-1}\rho \right], \rho = \frac{a_3}{a_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и далее μ_0 и ν_0 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона матрицы соответственно. Оставшиеся отличные от нуля компоненты мо-

гут быть получены с использованием следующих свойств симметрии тензора Эшелби:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}. \quad (7)$$

Решение системы (1)–(4) имеет вид

$$\hat{\varepsilon}^{in} = \left[\hat{E} + \hat{S} \cdot \hat{\Lambda}_0^{-1} \cdot (\hat{\Lambda}_* - \hat{\Lambda}_0) \right]^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}^\infty. \quad (8)$$

Здесь $E_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ – единичный тензор 4-го ранга, δ_{ij} – символ Кронекера, $\hat{\Lambda}_0 \cdot \hat{\Lambda}_0^{-1} = E$.

Подставляя (8) в (2) и учитывая (1), получим следующее выражение для тензора концентрации напряжений внутри неоднородности:

$$\hat{B}^{in} = \left[\hat{\Lambda}_0 \cdot \hat{\Lambda}_*^{-1} + \hat{\Lambda}_0 \cdot \hat{S} \cdot (\hat{\Lambda}_0^{-1} - \hat{\Lambda}_*^{-1}) \right]^{-1} \quad (9)$$

Для рассматриваемых случаев характер решения определяется двумя основными параметрами: отношением модулей матрицы и неоднородности μ_*/μ_0 и отношением полуосей эллипсоида $\rho = a_3/a_1$. Асимптотическое поведение решений для концентрации напряжений при одновременном увеличении или уменьшении данных параметров неочевидно и существенно зависит от последовательности осуществляемых предельных переходов. Подобно тому как это отмечалось для случая вычисления эффективных упругих характеристик [3, 4] и энергии включения [5, 6], различные последовательности предельных переходов соответствуют различным физическим ситуациям.

Далее, принимая во внимание симметрию рассматриваемой задачи, для удобства введем следующие обозначения для отличных от нуля компонент тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} :

$$\begin{aligned} B_{1111}^{in} = B_{2222}^{in} = B'_{11}, B_{1122}^{in} = B_{2211}^{in} = B'_{12}, B_{1133}^{in} = B_{2233}^{in} = B'_{13}, B_{3333}^{in} = B'_{33}, \\ B_{3311}^{in} = B_{3322}^{in} = B'_{31}, B_{1313}^{in} = B_{2323}^{in} = B'_{44}/2, B_{1212}^{in} = B'_{66}/2. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом для компонент тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} справедливы следующие условия симметрии:

$$B_{ijkl}^{in} = B_{jikl}^{in} = B_{ijlk}^{in}. \quad (11)$$

Зная тензор напряжений внутри неоднородности $\hat{\sigma}^{in}$, компоненты тензора напряжений на ее границе $\hat{\sigma}^{out}$ могут быть найдены следующим образом [2]:

$$\sigma_{ij}^{out} = \Lambda_{ijkl}^0 \left[\Lambda_{klab}^{*-1} + N_{kp} D^{-1} n_l n_q \left(\Lambda_{pqmn}^* - \Lambda_{pqmn}^0 \right) \Lambda_{mnab}^{*-1} \right] \sigma_{ab}^{in}, \quad (12)$$

где n_i – компоненты внешней единичной нормали к поверхности неоднородности. В рассматриваемом случае изотропной матрицы величины N_{ij} и D , входящие в выражение (12), имеют вид [2]

$$N_{ij} = \frac{\mu_0^2}{1-2\nu_0} \left[2(1-\nu_0)\delta_{ij} - n_i n_j \right], D = \frac{2\mu_0^3(1-\nu_0)}{1-2\nu_0}. \quad (13)$$

Введем тензор 4-го ранга \hat{A} , имеющий следующие компоненты:

$$A_{ijab} = \Lambda_{ijkl}^0 \left[\Lambda_{klab}^{*-1} + N_{kp} D^{-1} n_q n_l \left(\Lambda_{pqmn}^* - \Lambda_{pqmn}^0 \right) \Lambda_{mnab}^{*-1} \right]. \quad (14)$$

Тензор \hat{A} зависит от отношения упругих констант матрицы и неоднородности, направления нормали к поверхности неоднородности, но не зависит от соотношения полуосей эллипсоида. Используя (1), (9), (12), (14), тензор напряжений $\hat{\sigma}^{out}$ на внешней границе неоднородности запишем в виде

$$\hat{\sigma}^{out} = \hat{A} \cdot \hat{B}^{in} \cdot \hat{\sigma}^{\infty}. \quad (15)$$

Используя выражение (15), определим тензор концентрации напряжений \hat{B}^{out} на внешней границе неоднородности:

$$\hat{B}^{out} = \hat{A} \cdot \hat{B}^{in}. \quad (16)$$

1. Асимптотические разложения тензоров концентрации напряжений

1.1. Жесткая уплощенная неоднородность

Подстановка (5) в (9) с последующим выполнением последовательных предельных переходов $\mu_0/\mu_* \rightarrow 0$ и $a_3/a_1 \rightarrow 0$ дает компоненты тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} в случае жесткой плоской неоднородности. Ненулевые компоненты главного члена тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} в данном случае имеют вид (здесь и далее ис-

пользуется глобальная декартова система координат с осью x_3 , совпадающей с осью симметрии неоднородности)

$$B'_{11} = \frac{a_1}{a_3} \frac{4(1-\nu_0)(13-17\nu_0)}{\pi(1+\nu_0)(3-4\nu_0)(7-8\nu_0)}; B'_{12} = \frac{a_1}{a_3} \frac{4(1-\nu_0)(1-13\nu_0+16\nu_0^2)}{\pi(1+\nu_0)(3-4\nu_0)(7-8\nu_0)};$$

$$B'_{13} = -\frac{a_1}{a_3} \frac{8\nu_0(1-\nu_0)}{\pi(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}; B'_{66} = \frac{a_1}{a_3} \frac{16(1-\nu_0)}{\pi(7-8\nu_0)}. \quad (17)$$

Поскольку переход $\mu_0/\mu_* \rightarrow 0$, выполненный первым, неявно предполагает, что данное отношение меньше любого параметра, включая и соотношения полуосей a_3/a_1 , полученные формулы не обязаны (хотя и могут) оставаться справедливыми при выходе параметрами за пределы диапазона

$$\frac{\mu_*}{\mu_0} \gg \frac{a_1}{a_3} \gg 1. \quad (18)$$

Напряжения на контуре включения получаются согласно (15), где \hat{B}^{in} разложено в ряд по малым μ_0/μ_* с удержанием лишь главного члена. После выполнения указанного преобразования вид тензора A_{ijab} остается все еще достаточно громоздким, чтобы быть приведенным, однако существенным оказывается его независимость от отношения модулей μ_0/μ_* :

$$A_{ijab} = O(\mu_0/\mu_*)^0. \quad (19)$$

Подчеркнем еще раз, что оценка (19) справедлива для любого вида формы включения, определяется только соотношением модулей матрицы и неоднородности и не зависит от соотношения данного параметра малости с другими параметрами. Таким образом, при выполнении условий (18) напряжения на контуре, так же как и напряжения внутри неоднородности, возрастают пропорционально отношению полуосей неоднородности и не зависят (в главном члене) от отношения модулей: $\hat{\sigma}^{out} = O(a_1/a_3)$.

Для иного по сравнению с (18) соотношения параметров при одновременном их возрастании решение может быть получено путем

предельных переходов, выполненных в обратном порядке. Роль последовательности выполнения предельных переходов при решении аналогичных задач (вычисления эффективных упругих свойств неоднородных тел) подчеркивалась в работах [3, 7], и в дальнейшем анализировалась в [4–6].

Подстановка (5) в (9) с последующим предельным переходом $a_3/a_1 \rightarrow 0$ дает следующие ненулевые компоненты тензора \hat{B}^{in} :

$$B'_{11} = \frac{\mu_*}{\mu_0} \frac{1 - v_0 v_*}{(1 + v_0)(1 - v_*)}; \quad B'_{12} = \frac{\mu_*}{\mu_0} \frac{v_* - v_0}{(1 + v_0)(1 - v_*)};$$

$$B'_{13} = -\frac{\mu_*}{\mu_0} \frac{v_0(1 + v_*)}{(1 + v_0)(1 - v_*)} + \frac{v_*}{(1 - v_*)}; \quad B'_{66} = \frac{\mu_*}{\mu_0}; \quad B'_{33} = B'_{44} = 1. \quad (20)$$

Способ получения формул (20) не гарантирует их справедливость при неограниченном возрастании или убывании упругого модуля неоднородности. Действительно, выполнив предельный переход $a_3/a_1 \rightarrow 0$ уже непозволительно предполагать, что другие параметры могут быть меньше данного соотношения. Следовательно, формулы (20) не обязательно остаются справедливыми (хотя и могли бы быть таковыми в случае наличия полного предела по двум указанным параметрам) при выходе параметров за пределы следующих областей:

$$\frac{a_3}{a_1} \ll \frac{\mu_*}{\mu_0} \ll \frac{a_1}{a_3}; \quad \frac{a_3}{a_1} \ll 1. \quad (21)$$

Внутри данной области могут быть выделены частные случаи жестких и мягких неоднородностей. Решения при этом получаются разложением (20) в ряды для больших и малых μ_*/μ_0 соответственно и удерживанием лишь главных членов. Так, для жестких неоднородностей выполненный первым предельный переход $a_3/a_1 \rightarrow 0$ означает, что хотя отношение μ_0/μ_* может быть мало, оно не может быть меньше a_3/a_1 . Следовательно, область применимости имеет вид

$$\frac{a_3}{a_1} \ll \frac{\mu_0}{\mu_*} \ll 1 \quad (22)$$

Выражения для главных членов асимптотики компонент тензора \hat{B}^{in} получаются отбрасыванием в (20) членов, не содержащих отношения модулей:

$$B'_{11} = \frac{\mu_*}{\mu_0} \frac{1 - \nu_0 \nu_*}{(1 + \nu_0)(1 - \nu_*)}; \quad B'_{12} = \frac{\mu_*}{\mu_0} \frac{\nu_* - \nu_0}{(1 + \nu_0)(1 - \nu_*)};$$

$$B'_{13} = -\frac{\mu_*}{\mu_0} \frac{\nu_0(1 + \nu_*)}{(1 + \nu_0)(1 - \nu_*)}; \quad B'_{66} = \frac{\mu_*}{\mu_0}. \quad (23)$$

Как видно, тензор концентрации напряжений на контуре отличается от определяемого выражениями (20).

Напряжения на контуре включения при выполнении условий (22) согласно (15), (19) возрастают пропорционально отношению модулей и не зависят (в главном члене) от отношения полуосей неоднородности $\hat{\sigma}^{out} = O(\mu_*/\mu_0)$, т.е. согласно (1), (23) имеют тот же порядок, что и напряжения внутри неоднородности (23).

1.2. Жесткая вытянутая неоднородность

Аналогично подстановка (5) в (9) с последующим выполнением последовательных предельных переходов $\mu_0/\mu_* \rightarrow 0$ и $a_1/a_3 \rightarrow 0$ дает компоненты тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} в случае жесткой вытянутой неоднородности, а именно для случая

$$\frac{\mu_0}{\mu_*} \ll \frac{a_1}{a_3} \ll 1. \quad (24)$$

Ненулевые компоненты главного члена тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} в данном случае имеют вид

$$B'_{33} = \frac{2(1 - \nu_0)}{4(1 + \nu_0)(\ln 2a_3/a_1 - 1) - 1} \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2; \quad B'_{31} = -\nu_0 B'_{33}. \quad (25)$$

Напряжения внутри неоднородности, а также, согласно (15), (19), напряжения на контуре неоднородности возрастают пропорционально квадрату отношения полуосей неоднородности и не зависят (в главном члене) от отношения модулей: $\hat{\sigma}^{out} = O(a_3/a_1)^2$.

Выполнение предельных переходов в обратном порядке дает следующие ненулевые компоненты тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} :

$$B'_{33} = \frac{\mu_* (1 + \nu_*)}{\mu_0 (1 + \nu_0)}; \quad B'_{31} = -\nu_0 B_{33}. \quad (26)$$

Область применимости получаемых выражений ограничена по крайней мере следующим диапазоном:

$$\frac{a_1}{a_3} \ll \frac{\mu_0}{\mu_*} \ll 1. \quad (27)$$

Напряжения внутри неоднородности, а также согласно (15), (19) напряжения на контуре неоднородности возрастают пропорционально отношению модулей и не зависят (в главном члене) от отношения полуосей неоднородности: $\hat{\sigma}^{out} = O(\mu_*/\mu_0)$.

1.3. Мягкая уплотненная неоднородность

Выполнение последовательных предельных переходов $\mu_*/\mu_0 \rightarrow 0$ и $a_3/a_1 \rightarrow 0$ дает компоненты тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} в случае мягкой плоской неоднородности, а именно для случая

$$\frac{\mu_*}{\mu_0} \ll \frac{a_3}{a_1} \ll 1. \quad (28)$$

Ненулевые компоненты главного члена тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} при этом имеют вид

$$B'_{13} = \frac{a_1 \mu_* 4\nu_* (1 - \nu_0)}{a_3 \mu_0 \pi (1 - 2\nu_*)}; \quad B'_{33} = \frac{a_1 \mu_* 4(1 - \nu_0)(1 - \nu_*)}{a_3 \mu_0 \pi (1 - 2\nu_*)}; \quad B'_{44} = \frac{a_1 \mu_* 4(1 - \nu_0)}{a_3 \mu_0 \pi (2 - \nu_0)}. \quad (29)$$

Напряжения на контуре включения получаются согласно (15), где \hat{B}^{in} разложено в ряд по малым μ_*/μ_0 с удержанием лишь главного члена. После выполнения указанного преобразования вид тензора A_{ijab} остается все еще достаточно громоздким, чтобы быть приведенным, однако существенным оказывается его зависимость от отношения модулей:

$$A_{ijab} = O(\mu_0/\mu_*). \quad (30)$$

Аналогично оценке (19) оценка (30) справедлива для любого вида формы включения, определяется только соотношением модулей мат-

рицы и неоднородности и не зависит от соотношения данного параметра малости с другими параметрами. Таким образом, при выполнении условий (28), напряжения на контуре неоднородности возрастают пропорционально отношению полуосей неоднородности и не зависят (в главном члене) от отношения модулей $\hat{\sigma}^{out} = O(a_1/a_3)$.

Выполнение предельных переходов в обратном порядке $\mu_*/\mu_0 \rightarrow 0$ и $a_3/a_1 \rightarrow 0$ дает компоненты тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} для случая

$$\frac{a_3}{a_1} \ll \frac{\mu_*}{\mu_0} \ll 1. \quad (31)$$

Ненулевые компоненты главного члена тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} в данном случае суть

$$B'_{13} = \frac{v_*}{(1-v_*)}; \quad B'_{33} = B'_{44} = 1. \quad (32)$$

Напряжения на контуре включения находятся из формул (32) для \hat{B}^{in} и согласно (30) имеют порядок $\hat{\sigma}^{out} = O(\mu_0/\mu_*)$.

1.4. Мягкая вытянутая неоднородность

Подстановка (5) в (9) с последующим выполнением последовательных предельных переходов $\mu_*/\mu_0 \rightarrow 0$ и $a_1/a_3 \rightarrow 0$ дает компоненты тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} для мягкой вытянутой неоднородности. Ненулевые компоненты тензора концентрации напряжений \hat{B}^{in} в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} B'_{11} &= \frac{\mu_* (3 - 2v_0^2 - 4v_* - v_0 v_* + 4v_0^2 v_*)}{\mu_0 (1+v_0)(1-2v_*)}; & B'_{12} &= -\frac{\mu_* (1 - 2v_0^2 - 4v_* + v_0 v_* + 4v_0^2 v_*)}{\mu_0 (1+v_0)(1-2v_*)}; \\ B'_{31} &= \frac{\mu_* (2v_* - v_0 + v_0 v_*)}{\mu_0 (1+v_0)(1-2v_*)}; & B'_{13} &= \frac{\mu_* (v_* - v_0)}{\mu_0 (1+v_0)(1-2v_*)}; \\ B'_{33} &= \frac{\mu_* (1 - v_* - 2v_0 v_*)}{\mu_0 (1+v_0)(1-2v_*)}; & B'_{66} &= 4\frac{\mu_*}{\mu_0}(1-v_0); & B'_{44} &= 2\frac{\mu_*}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (33)$$

Полученный результат совпадает с результатом, полученным выполнением предельных переходов в обратном порядке. Это связано с тем, что в данном случае существует предельный переход по двум параметрам и область применимости (33) шире, чем это было для предыдущих рассмотренных случаев, а именно:

$$\frac{\mu_*}{\mu_0} \ll 1; \frac{a_3}{a_1} \gg 1. \quad (34)$$

Напряжения на контуре включения находятся из формул (33) для \hat{B}^{in} и согласно (30) имеют вид $\hat{\sigma}^{out} = O(1)$.

2. Численные оценки областей применимости полученных асимптотик

Выше были получены асимптотические формулы для тензора концентрации напряжений внутри и на контуре включения для практически важных случаев. Оценим степень малости введенных параметров, то есть найдем, для каких численных значений параметров μ_*/μ_0 и a_3/a_1 асимптотические формулы дают приемлемые результаты. Для необходимой оценки были построены диаграммы изолиний относительных ошибок, даваемых асимптотиками для тензоров B по сравнению с точными решениями, аналогично тому, как это делалось в [4–6]. Диаграммы представлены (рисунок) для различных компонент тензора \hat{B}^{in} , расчеты проводились для $\nu_0 = \nu_* = 1/4$.

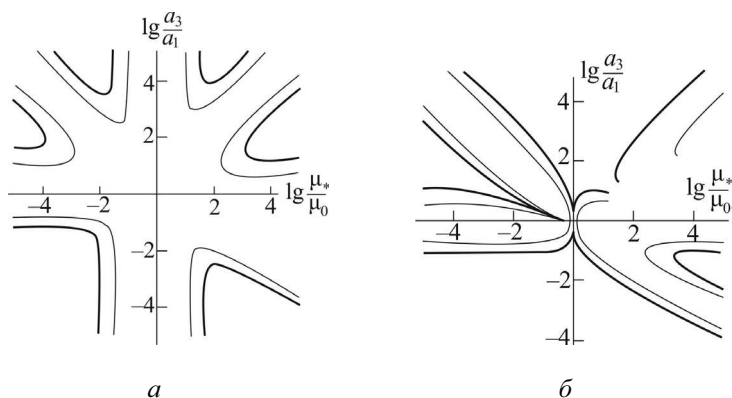


Рис. Области применимости решений для $\nu_0 = \nu_* = 1/4$: $a - B'_{13}$ (верхняя полуплоскость) and B'_{31} (нижняя полуплоскость); $b - B'_{33}$

Абсциссы соответствуют (десятичному) логарифму отношения сдвиговых модулей включения и матрицы, ординаты – логарифму отношения полуосей сфероида, моделирующего включение. Жирные линии ограничивают области, в которых соответствующие асимптотики действительны с точностью 3 %, тонкие – 10 %. Данные графики дают достаточно наглядное представление об областях применимости полученных асимптотик и подтверждают теоретические оценки. Из приведенных диаграмм видно, что существует семь областей параметров, соответствующих различным физическим ситуациям. Однако ни одна из компонент тензора концентрации напряжений не обладает неисчезающим главным членом для всех семи областей. С другой стороны, для некоторых компонент (рис., б) асимптотики совпадают.

Абсцисса соответствует десятичному логарифму отношения упругих модулей включения и матрицы. Ордината – десятичному логарифму отношения полуосей включения. Жирные линии ограничивают области, в которых соответствующие асимптотики действительны с точностью 3 %, тонкие линии – 10 %

Выводы и обсуждение результатов

Путем последовательных разложений по малым параметрам получен ряд точных асимптотических формул для концентрации напряжений внутри и на границе сфероидальной неоднородности. Параметрами, определяющими тип асимптотического поведения, являются отношение полуосей включения a_3/a_1 и отношение сдвиговых модулей включения и матрицы μ_*/μ_0 или их обратные величины. Коэффициенты Пуассона матрицы и включения оказывают существенно меньшее влияние (за исключением отдельно не исследованного случая их стремления к $1/2$) на поведение решения. При одновременном сильном отклонении параметров a_3/a_1 и μ_*/μ_0 от единицы выделены семь непересекающихся областей, соответствующих различным последовательным предельным переходам по параметрам a_3/a_1 и μ_*/μ_0 к нулю (либо бесконечности). Данный результат аналогичен результату [4–6] для эффективных модулей и энергии неоднородности.

Следует заметить, что для концентрации напряжения на внешнем контуре включения полученные формулы могут быть переписаны

в терминах минимального радиуса кривизны $\rho_c = a_3^2 / a_1$ или $\rho_c = a_1^2 / a_3$ для уплощенного и вытянутого сфероидов соответственно.

Полученные результаты позволяют вычислить локальные поля напряжений и деформаций вблизи неоднородностей, и, следовательно, являться основой для поиска критерия разрушения. Из полученных результатов видно, что выбор подходящего критерия определяется теми же двумя параметрами: отношением полуосей включения a_3 / a_1 и отношением модулей (например, сдвиговых) включения и матрицы μ_* / μ_0 .

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы П24 Президиума РАН.

Библиографический список

1. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // Proc. R. Soc. – London. – 1957. – Vol. 241. – P. 376–396.
2. Mura T. Micromechanics of defects in solids // Martinus Nijhoff Publishers, 1987. – 588 p.
3. Коваленко Ю.Ф. Салганик Р.Л. Трещиноватые неоднородности и их влияние на эффективные механические характеристики // Изв. АН СССР. МТТ. – 1977. – № 5. – С. 76–86.
4. Ustinov K.B., Goldstein R.V. On application of classical Eshelby approach to calculating effective elastic moduli of dispersed composites // Int. J. Fract. – 2007. – Vol. 147. – No. 1–4. – P. 55–66.
5. Устинов К.Б. О вычислении энергии неоднородности; асимптотики и область их применения // Изв. РАН МТТ. – 2010. – № 2. – С. 103–113.
6. Семенова Д.В., Устинов К.Б. Асимптотическое вычисление энергии неоднородности в теле, находящемся во внешнем поле напряжений // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 3. – С. 83–101.
7. Салганик Р.Л. Процессы переноса в телах с большим числом трещин // Инж.-физ. ж-л. – 1974. – Т. 27, № 6. – С. 1069–1075.

References

1. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. London*, 1957, vol. 241, pp. 376–396.
2. Mura T. Micromechanics of defects in solids. *Martinus Nijhoff Publishers*, 1987, 588 p.
3. Kovalenko Yu.F., Salganik R.L. Fractured inhomogeneities and their influence on effective mechanical characteristics. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1977, no. 5, pp. 76–86.
4. Ustinov K.B., Goldstein R.V. On application of classical Eshelby approach to calculating effective elastic moduli of dispersed composites. *Int. J. Fract.*, 2007, vol. 147, no. 1–4, pp. 55–66.
5. Ustinov K.B. Computation of the energy of an inhomogeneity: asymptotics and their scope. *Mech. Solids*, 2010, 45 (2), pp. 238–246.
6. Semenova D.V., Ustinov K.B. Asymptotic computation of the inhomogeneity energy in a body in an external stress field. *Mech. Solids*, 2011, 46 (3), p. 400–415.
7. Salganik R.L. Transport processes in bodies with a large number of cracks. *J. Engn. Phys. Thermophys.*, 1974, 27 (6), p. 1534–1538.

Сведения об авторах

Устинов Константин Борисович (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории геомеханики Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (119526, Россия, Москва, просп. Вернадского, 101-1, e-mail: ustinov@ipmnet.ru Автор для переписки).

Шушпанников Павел Сергеевич (Москва, Россия) – младший научный сотрудник лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (119526, Россия, Москва, просп. Вернадского, 101-1, e-mail: shushpan@ipmnet.ru).

About the authors

Ustinov Konstantin Borisovich (Moscow, Russian Federation) – CSc in Physics and Mathematics, ass. prof., Senior Researcher of Geomechanics Laboratory, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics

RAS (101–1, Vernadskoro av., Moscow, 119526, Russian Federation, e-mail: ustinov@ipmnet.ru).

Shushpannikov Pavel Sergeevich (Moscow, Russian Federation) – Junior Researcher of Mechanics of Strength and Fracture of Materials and Structures Laboratory, A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS (101-1, Vernadskoro ave., Moscow, 119526, Russian Federation, e-mail: shushpan@ipmnet.ru).

Получено 20.11.2012