

УДК 378.14.015.62:378.147.227:539.3

**Ю.С. Холодняк, А.В. Периг, И.А. Матвеев**  
**Yu.S. Holodnyak, A.V. Perig, I.A. Matveev**

Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск, Украина  
Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk, Ukraine

## **СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ ПРОЧНОСТНОГО РАСЧЕТА ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ И ЕЕ ИЗЛОЖЕНИЯ В КУРСАХ ТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН**

### **I-BAR STRENGTH COMPUTATION METHODOLOGY PERFECTION FOR TEACHING OF ENGINEERING DISCIPLINES**

Исследован характер изменения эквивалентных напряжений по высоте сечения двутавровой балки, установлены места их максимума во взаимосвязи с параметрами двутавра и внутренними силовыми факторами, действующими в сечении. Проанализированы условия, при которых наибольшие эквивалентные напряжения в сечении двутавровой балки не превышают их допустимой величины. Предложена упрощенная графическая методика комплексной оценки прочности двутавровой балки по нормальным, касательным и эквивалентным напряжениям, которая рекомендуется студентам и преподавателям технических вузов, а также производственным специалистам в области прочностных расчетов.

**Ключевые слова:** двутавровая балка, эквивалентные напряжения, прочность, методика расчета, факторное пространство.

The equivalent stress distribution along the height of an I-bar cross-section has been studied. The zones of maximum equivalent stress in conjunction with the I-bar geometric parameters and power load at the section have been found. The conditions for maximum equivalent stresses have been specified to not exceed the allowable values. An improved method for the comprehensive assessment of I-bar strength against the normal, tangential and equivalent stresses has been proposed. This computational approach may be recommended to lecturers and students of technical universities as well as engineering specialists in the field of strength computations.

**Keywords:** I-bar, equivalent stresses, strength, design procedure, quotient space.

В нынешнюю эпоху стремительного развития техники особое значение приобретает подготовка вузами высокообразованных специалистов, владеющих солидным комплексом теоретических знаний и практических навыков, позволяющих создавать все более сложные образцы новой техники. Немаловажную роль в этом призвано сыграть совершенствование методик изложе-

ния базовых дисциплин инженерной подготовки, наполнение их новыми знаниями, углубляющими существующие теоретические представления.

Одними из основных в курсе сопротивления материалов, закладывающим фундамент инженерных расчетов, и ряде других смежных дисциплин являются вопросы прочности массово используемых в машиностроении, строительстве и ряде других отраслей промышленности конструктивных элементов стержневой формы, работающих в условиях плоского изгиба и именуемых балками.

Указанные вопросы давно уже относятся к классическим, казалось бы, полностью исчерпанным в теоретическом плане и не нуждающимся в дополнительном изучении. Однако, как показывает практика прочностных расчетов, неясные вопросы здесь все же остаются.

Считается общепризнанным [1–4 и др.], что для обеспечения надежной эксплуатации балки должны соблюдаться условия ее прочности по нормальным (1), касательным (2) и эквивалентным (3) напряжениям:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (1)$$

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\max} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

Методики нахождения максимальных нормальных  $\sigma_{\max}$  и максимальных касательных  $\tau_{\max}$  напряжений, а также определения соответствующих допускаемых напряжений  $[\sigma]$  и  $[\tau]$  достаточно полно и подробно изложены в учебной литературе и в дополнительном анализе не нуждаются, чего нельзя сказать о методике нахождения максимальных эквивалентных напряжений в балках –  $\sigma_{\text{экв}}^{\max}$ , прежде всего потому, что места их действия в большинстве случаев неизвестны. Так, авторы упомянутых и многих других источников, приводя примеры полной проверки балок на прочность, рассматривают двутавровые балки и отмечают, без убедительных доказательств, что наибольшие эквивалентные напряжения в их поперечных сечениях действуют на стыках ребра с полками. По другим формам поперечных сечений подобных сведений практически нет.

В ходе исследований по данному вопросу [5, 6], ранее проведенных с участием авторов применительно к балкам прямоугольного и круглого поперечных сечений, было установлено, что наибольшие эквивалентные напряжения в зависимости от соотношения величин изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ , действующих в сечении, имеют место либо в крайних верхних и нижних слоях волокон балки, либо в волокнах нейтрального слоя, т.е. в местах действия  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$ . Их величины при соблюдении условий прочности (1) и (2) никогда не превышают  $[\sigma]$ , т.е. условие прочности по эквива-

лентным напряжениям (3) в балках названных сечений выполняется автоматически.

Настоящая работа является логическим продолжением упомянутых исследований. Цель работы – изучить характер изменения эквивалентных напряжений по высоте сечения двутавровой балки, увязать положение и величины их максимумов с внутренними силовыми факторами, действующими в сечении, и на этой основе внести соответствующие коррективы в методику силового расчета указанных балок.

На рис. 1 показана форма сечения двутавровой балки (со стандартными обозначениями) и эпюры нормальных  $\sigma$  и касательных  $\tau$  напряжений по высоте этого сечения [7].

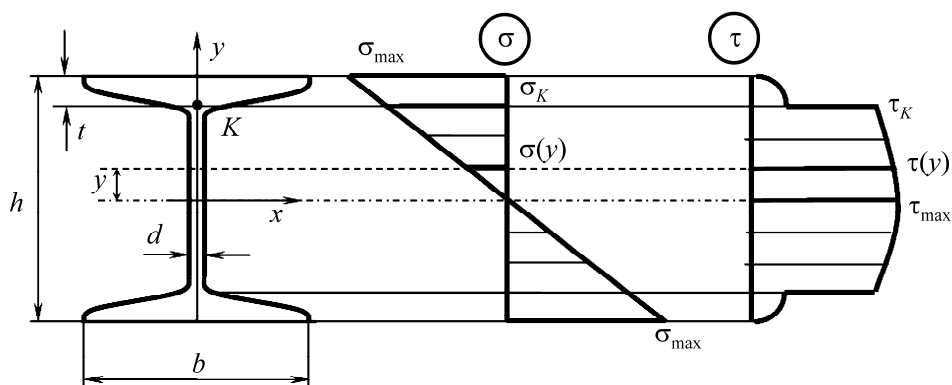


Рис. 1. Распределение нормальных и касательных напряжений по высоте сечения двутавровой балки

Как известно, нормальные напряжения изменяются по линейному закону:

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y, \quad (4)$$

а касательные – по квадратичному:

$$\tau = \frac{QS_x^{(y)}}{dJ_x} \left( \text{при } 0 \leq y \leq \frac{h}{2} - t \right), \quad (5)$$

или

$$\tau = \frac{QS_x^{(y)}}{bJ_x} \left( \text{при } \frac{h}{2} - t < y \leq \frac{h}{2} \right),$$

где  $M$  и  $Q$  – соответственно изгибающий момент и поперечная сила, действующие в сечении;  $J_x$  – момент инерции сечения относительно оси  $x$  (перпендикулярной силовой плоскости);  $S_x^{(y)}$  – статический момент относительно оси  $x$  части сечения, лежащей выше уровня  $y$ .

Эквивалентные напряжения в точках сечения балки определяются по третьей или четвертой теориям прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha\tau^2}, \quad (6)$$

где  $\alpha = 4$  – по третьей теории прочности и  $\alpha = 3$  – по четвертой.

Принимая во внимание скачкообразное уменьшение  $\tau$  при переходе от ребра к полке (см. рис. 1), нетрудно сделать вывод о том, что наибольшие эквивалентные напряжения возникают в пределах ребра двутавра, но не в его полках.

Подставив в формулу (6) выражения (4) и (5), получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{M}{J_x} y\right)^2 + \alpha \left(\frac{QS_x^{(y)}}{dJ_x}\right)^2}. \quad (7)$$

Выразим теперь  $S_x^{(y)}$  через статический момент половины сечения двутавра  $S_x$ :

$$S_x^{(y)} = S_x - \frac{1}{2} \cdot dy^2. \quad (8)$$

Подставив (8) в (7), получим закон изменения  $\sigma_{\text{экв}}$  по высоте ребра двутавра:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{M}{J_x} y\right)^2 + \alpha \left[\frac{Q}{dJ_x} \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot dy^2\right)\right]^2}. \quad (9)$$

С применением открытой системы компьютерной алгебры GNU CAS Махіта исследуем функцию (9) на экстремум. Возьмем первую производную от  $\sigma_{\text{экв}}$  по  $y$  и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d\sigma_{\text{экв}}}{dy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2 \cdot M^2 y}{J_x^2} - \frac{2 \cdot \alpha Q^2 (S_x - 0,5 \cdot dy^2) y}{dI_x^2}}{\sqrt{\frac{M^2 y^2}{J_x^2} + \frac{\alpha Q^2 (S_x - 0,5 \cdot dy^2)^2}{d^2 I_x^2}}} = 0. \quad (10)$$

Решив уравнение (10), найдем значения  $y$ , при которых функция (9) может иметь экстремумы:

$$y_{\text{extr}} = 0, \pm \frac{1}{\alpha d Q} \sqrt{2 \cdot \alpha d (\alpha Q^2 S_x - M^2 d)}. \quad (11)$$

Как видно из (11), число действительных корней уравнения (10) может быть различным в зависимости от знака подкоренного выражения. При  $\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x > M^2 \cdot d$ , или  $(M/Q) < (\alpha \cdot S_x/d)^{0,5}$ , подкоренное выражение в (11) положительно и число корней – три (один – на нулевом уровне и два симметричных относительно оси  $x$ ). При  $\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x \leq M^2 \cdot d$ , или  $(M/Q) \geq (\alpha \cdot S_x/d)^{0,5}$ , подкоренное выражение в (11) или отрицательно, или равно нулю; в этом случае имеем один действительный корень:  $y_{\text{extr}} = 0$ .

Таким образом, у каждого из номеров двутавра существует свое отношение  $M/Q$ , при достижении и превышении которого зависимость (9) имеет только одну возможную точку экстремума. Назовем это отношение критическим:

$$\left( \frac{M}{Q} \right)_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\alpha S_x}{d}}.$$

Так, при  $\alpha = 3$  указанное отношение для двутавра № 10 равно 123,8 мм, для двутавра № 30 – 351,7 мм, для двутавра № 60 – 610,5 мм.

Чтобы выяснить, действительно ли является нулевой уровень местом экстремума и какой именно экстремум здесь имеет место (максимум или минимум), вычислим значение второй производной в этой точке от  $\sigma_{\text{экр}} по у:$

$$\frac{d^2 \sigma_{\text{экр}}}{dy^2}(0) = \frac{(M^2 d - \alpha Q^2 S_x)}{Q J_x S_x \sqrt{\alpha}}. \quad (12)$$

Из (12) явствует, что при  $M^2 \cdot d > \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x$ , или при  $(M/Q) > (M/Q)_{\text{кр}}$ , на нулевом уровне – минимум, так как выражение (12) положительно.

При  $M^2 \cdot d < \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x$ , или при  $(M/Q) < (M/Q)_{\text{кр}}$ , выражение (12) отрицательно и в этом месте – максимум.

При  $M^2 \cdot d = \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x$ , или при  $(M/Q) = (M/Q)_{\text{кр}}$ , выражение (12) равно нулю, поэтому для установления вида экстремума в данном случае прибегнем к помощи производных более высоких порядков.

Дальнейшие расчеты показывают, что третья производная от  $\sigma_{\text{экр}} по у$ , как и вторая, при критическом отношении  $M/Q$  на нулевом уровне равна нулю, а четвертая – положительна:

$$\frac{d^4 \sigma_{\text{экр}}}{d\sigma^4}(0) = \frac{3 \cdot \sqrt{\alpha} Q d}{S_x J_x} > 0,$$

поэтому и в данном случае здесь – минимум [8].

Таким образом, при  $(M/Q) \geq (M/Q)_{\text{кр}}$  функция (9) имеет на нулевом уровне минимум, а при  $(M/Q) < (M/Q)_{\text{кр}}$  – максимум.

Выясним теперь вид экстремумов в точках с координатами

$$y_{\text{extr}} = \pm \frac{1}{\alpha d Q} \sqrt{2 \cdot \alpha d (\alpha Q^2 S_x - M^2 d)}. \quad (13)$$

Взяв вторую производную от  $\sigma_{\text{экв}}$  по  $y$  и подставив в нее значения выражения (13), получим

$$\frac{d^2 \sigma_{\text{экв}}}{dy^2} (y_{\text{extr}}) = \frac{2 \cdot (\alpha Q^2 S_x - M^2 d) Q \sqrt{\alpha d}}{d J_x \sqrt{M^2 (2 \cdot \alpha Q^2 S_x - M^2 d)}}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что при  $\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x > M^2 \cdot d$ , или при  $(M/Q) < (M/Q)_{\text{кр}}$ , это выражение положительно. Следовательно, на указанных уровнях функция (9) имеет минимумы.

Таким образом, при  $(M/Q) < (M/Q)_{\text{кр}}$  функция (9) имеет максимум на нулевом уровне и два минимума на уровнях с координатами, определяемыми по формулам (13). Необходимо отметить, что эти координаты зависят как от параметров профиля, так и от отношения  $M/Q$  в его сечении, в чем легко убедиться, преобразовав (13) к следующему виду:

$$y_{\text{extr}} = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha d} \left( \alpha S_x - \frac{M^2}{Q^2} d \right)}.$$

При  $(M/Q) = 0$  (т.е. при  $M = 0$  и  $Q \neq 0$ ) точки минимума  $\sigma_{\text{экв}}$  максимально удалены от оси  $x$ :

$$|y_{\text{extr}}^{\text{max}}| = \sqrt{\frac{2 \cdot S_x}{d}}.$$

Для двутавра № 10 это удаление составляет 101,1 мм, для двутавра № 30 – 287,2 мм, для двутавра № 60 – 498,5 мм, что во всех случаях значительно больше половины высоты профиля ( $h/2$ ).

При увеличении отношения  $M/Q$  места минимума  $\sigma_{\text{экв}}$  приближаются к оси  $x$  и при  $(M/Q) \rightarrow (M/Q)_{\text{кр}}$  сливаются с местом максимума ( $y = 0$ ):

$$\lim |y_{\text{extr}}| = \sqrt{\frac{2}{\alpha d} \left( \alpha S_x - \left( \frac{M}{Q} \right)_{\text{кр}}^2 d \right)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha d} \left( \alpha S_x - \frac{\alpha S_x}{d} d \right)} = 0.$$

Учитывая изложенное, можно констатировать, что в случае, когда  $(M/Q) < (M/Q)_{\text{кр}}$ , опасными по эквивалентным напряжениям могут быть как

нулевой уровень ( $y = 0$ ), так и уровень точки  $K$  ( $y_K = (h/2) - t$ ), расположенной на границе ребра и полки (см. рис. 1). Поэтому важно определить такое (граничное) значение  $M/Q$ , при котором величины  $\sigma_{\text{экв}}$  на обоих этих уровнях одинаковы. Тогда при  $(M/Q) < (M/Q)_{\text{гр}}$  опасным будет нулевой уровень, а при  $(M/Q) > (M/Q)_{\text{гр}}$  – уровень точки  $K$ .

Значение  $(M/Q)_{\text{гр}}$  найдем из условия

$$\sigma_{\text{экв}}(0) = \sigma_K^{\text{экв}}. \quad (15)$$

При этом оба значения  $\sigma_{\text{экв}}$  определим по формуле (9):

$$\sigma_{\text{экв}}(0) = \sqrt{\alpha} \frac{QS_x}{dJ_x}; \quad (16)$$

$$\sigma_K^{\text{экв}} = Q \sqrt{\left(\frac{M}{Q}\right)^2 \frac{y_K^2}{J_x^2} + \frac{\alpha}{d^2 J_x^2} \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot dy_K^2\right)^2}. \quad (17)$$

Подставив (16) и (17) в (15) и решив полученное уравнение относительно  $M/Q$ , получим

$$\frac{M}{Q} = \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{гр}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{dy_K} \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot dy_K^2\right)^2}.$$

При  $\alpha = 3$  величина  $(M/Q)_{\text{гр}}$  составляет: для двутавра № 10 – 118,2 мм, для двутавра № 30 – 330,2 мм, для двутавра № 60 – 559,5 мм, т.е. везде  $(M/Q)_{\text{гр}} < (M/Q)_{\text{кр}}$ .

В случаях, когда  $(M/Q) \geq (M/Q)_{\text{кр}}$ , т.е. когда функция (9) имеет минимум на нулевом уровне, опасным по эквивалентным напряжениям является уровень точки  $K$ . Обратим внимание, что в данных случаях, как и в предыдущем, отношение  $M/Q$  превышает граничное.

Указанное обстоятельство позволяет сформулировать для всех трех возможных случаев единых принцип нахождения мест действия наибольших эквивалентных напряжений в сечении двутавровой балки: если отношение  $M/Q$  в сечении не превышает граничного значения, то  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}}$  действует на нулевом уровне, а если превышает – на уровне точки  $K$ ; при равенстве  $M/Q$  и  $(M/Q)_{\text{гр}}$  наибольшие эквивалентные напряжения действуют одновременно на обоих указанных уровнях.

Сформулированный принцип иллюстрируется рядом кривых, изображенных на рис. 2 и являющихся графиками функции (9), построенными для двутавра № 30 при следующих исходных данных:  $\alpha = 3$ ;  $Q = 10^5$  Н;  $M = 30,703 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 1),  $33,020 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 2),  $34,115 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 3),  $35,170 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 4),  $37,000 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 5).

Теперь выясним, при каких условиях  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}}$  не превышают  $[\sigma]$ , т.е. когда выполняется условие прочности по эквивалентным напряжениям (3).

Начнем с нулевого уровня. В этом случае

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}} = \sqrt{\alpha} \frac{QS_x}{dJ_x} = \sqrt{\alpha} \tau_{\text{max}}. \quad (18)$$

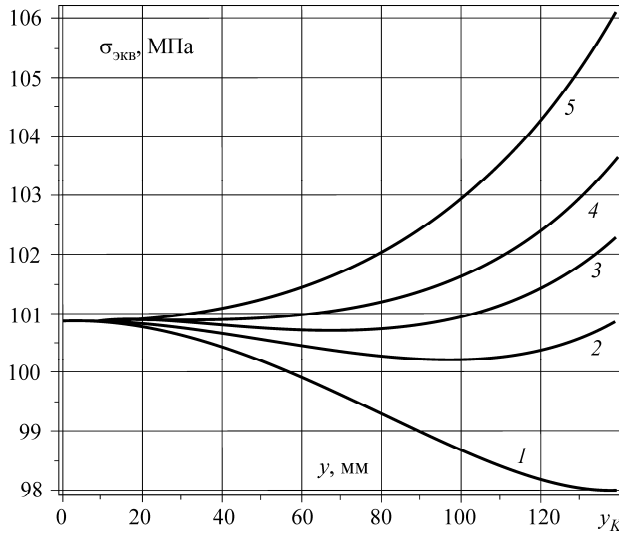


Рис. 2. Влияние отношения  $M/Q$  на характер изменения эквивалентных напряжений по высоте двутавра № 30:  $(M/Q)_1 = 307,03$  мм;  $(M/Q)_2 = 330,20$  мм;  $(M/Q)_3 = 341,15$  мм;  $(M/Q)_4 = 351,70$  мм;  $(M/Q)_5 = 370,00$  мм

Если в сечении балки выполняется условие прочности по касательным напряжениям [2], то с учетом (18) имеем

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}}}{\sqrt{\alpha}} \leq [\tau]. \quad (19)$$

Но  $[\tau]$ , как известно, связано с  $[\sigma]$ :

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{\alpha}}. \quad (20)$$

Тогда из (19) и (20) следует, что  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{max}} \leq [\sigma]$ , т.е. что здесь автоматически выполняется и условие прочности по эквивалентным напряжениям (3).



Перейдем теперь к уровню точки  $K$ . Запишем выражение для  $\sigma_{\text{эКВ}}$  на этом уровне:

$$\begin{aligned}\sigma_K^{\text{эКВ}} &= \sqrt{\left(\frac{My_K}{J_x}\right)^2 + \alpha \left[\frac{Q}{dJ_x} \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot dy_K^2\right)\right]^2} = \\ &= [\sigma] \sqrt{M^2 \left(\frac{y_K}{J_x[\sigma]}\right)^2 + Q^2 \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{dJ_x[\sigma]} \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot dy_K^2\right)\right]^2}.\end{aligned}\quad (21)$$

Расчеты показывают, что значение корня в (21) для любого номера двутавра может быть больше единицы, даже если величины  $M$  и  $Q$  не превышают своих максимально возможных (допустимых) значений:

$$[M] = W_x[\sigma], \quad (22)$$

$$[Q] = \frac{dJ_x[\sigma]}{S_x \sqrt{\alpha}}. \quad (23)$$

Следовательно, условие прочности по эквивалентным напряжениям (3) выполняется в данном случае не при любых значениях  $M$  и  $Q$ , а только при таких, которые не выходят за определенные границы.

Для установления таких границ приравняем (21) к величине максимального эквивалентного напряжения, еще удовлетворяющего условию (3):

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{max}} = [\sigma],$$

получим

$$[\sigma] \sqrt{M^2 \left(\frac{y_K}{J_x[\sigma]}\right)^2 + Q^2 \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{dJ_x[\sigma]} \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot dy_K^2\right)\right]^2} = [\sigma]. \quad (24)$$

Отсюда – равенство единице квадратного корня в выражении (24), а значит, и его подкоренного выражения:

$$M^2 \left(\frac{y_K}{J_x[\sigma]}\right)^2 + Q^2 \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{dJ_x[\sigma]} \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot dy_K^2\right)\right]^2 = 1. \quad (25)$$

Введем обозначения:

$$\frac{y_K}{J_x[\sigma]} = \frac{1}{\beta}, \quad (26)$$

$$\frac{\sqrt{\alpha} \left(S_x - 0,5 \cdot dy_K^2\right)}{dJ_x[\sigma]} = \frac{1}{\gamma}. \quad (27)$$

Подставим (26) и (27) в (25), получим:

$$\frac{M^2}{\beta^2} + \frac{Q^2}{\gamma^2} = 1.$$

Это и есть уравнение линии, ограничивающей геометрическое место точек с координатами  $M$  и  $Q$ , где выполняется условие прочности (3), т.е. дуги эллипса с полуосями  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\beta = \frac{J_x [\sigma]}{y_k},$$

$$\gamma = \frac{dJ_x [\sigma]}{\sqrt{\alpha} (S_x - 0,5 \cdot dy_k^2)}.$$

При построении указанной линии необходимо ограничить величины  $M$  и  $Q$  их допустимыми значениями (22) и (23):

$$M \leq [M], \quad (28)$$

$$Q \leq [Q]. \quad (29)$$

Введение ограничений (28) и (29) заменяет часть дуги эллипса прямолинейными отрезками, что позволяет исключить из ограничиваемого факторного пространства все те точки, значения  $M$  и  $Q$  в которых хотя и удовлетворяют условию прочности (3), но нарушают условия (1) и (2). Таким образом, факторное пространство становится универсальным, пригодным для проверки сразу трех названных условий прочности.

Проиллюстрируем изложенное примером полной проверки прочности двутавровой балки № 30 ( $J_x = 7080 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$ ,  $y_k = 139,8 \text{ мм}$ ,  $d = 6,5 \text{ мм}$ ,  $\alpha = 3$ ,  $S_x = 268 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$ ,  $W_x = 472 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$ ,  $[\sigma] = 150 \text{ Н/мм}^2$ ), представленной на рис. 3 [7].

Для построения факторного пространства выполним необходимые расчеты, согласно которым  $\beta = 75,966 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $\gamma = 194,910 \text{ кН}$ ;  $[M] = 70,800 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $[Q] = 148,715 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Факторное пространство для приведенной балки (заштрихованная площадь) представлено на рис. 4, где координаты пронумерованных точек являются значениями поперечных сил и изгибающих моментов в соответствующих сечениях балки (рис. 3):  $Q_1 = 81,5 \text{ кН}$ ;  $M_1 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_2 = 18,5 \text{ кН}$ ;  $M_2 = 63 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_3 = 73,5 \text{ кН}$ ;  $M_3 = 63 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_4 = 73,5 \text{ кН}$ ;  $M_4 = 4,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_5 = 73,5 \text{ кН}$ ;  $M_5 = 44,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_6 = 73,5 \text{ кН}$ ;  $M_6 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_7 = 0 \text{ кН}$ ;  $M_7 = 66,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

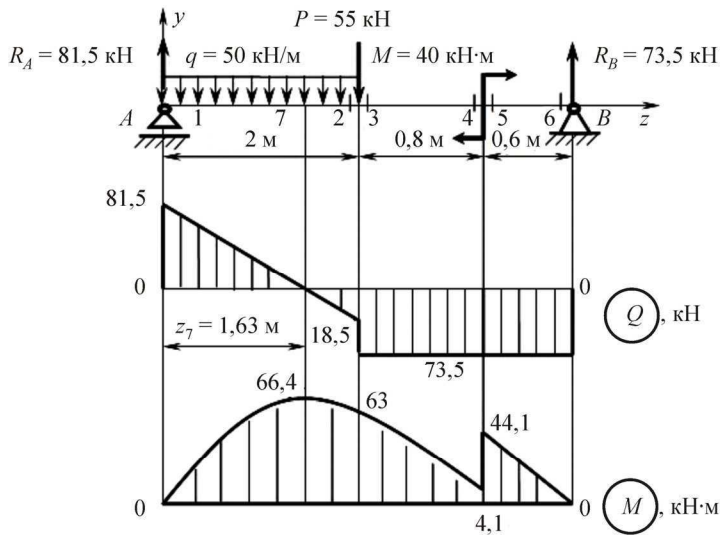


Рис. 3. Схема балки с эпюрами поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$

Поскольку ни одна из обозначенных точек не выходит за границы факторного пространства (см. рис. 4), то в каждом из соответствующих сечений балки должны одновременно выполняться условия прочности по нормальным (1), касательным (2) и эквивалентным (3) напряжениям. Убедимся в этом.

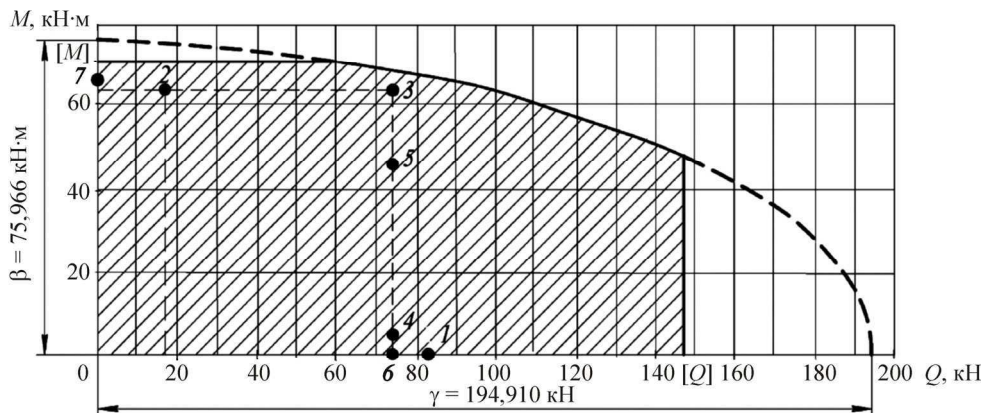


Рис. 4. Факторное пространство для приведенной балки

Вертикальные координаты всех указанных точек не превышают  $[M]$ , значит, во всех соответствующих сечениях выполняется условие прочности (1).

Горизонтальные координаты этих точек не превышают  $[Q]$ , поэтому в соответствующих сечениях балки выполняется и условие прочности (2).

В сечениях 1, 4 и 6 отношения значений  $M$  и  $Q$  меньше граничного (330,21 мм), поэтому, как отмечалось раньше, условие прочности (3) в них выполняется автоматически, так как выполнено условие (2).

В остальных сечениях – 2, 3, 5 и 7 – отношения  $M/Q$  превышают граничное, но поскольку соответствующие точки не выходят за границу факторного пространства, очерченную дугой эллипса, то и в этих сечениях выполняется условие прочности (3). Нетрудно таким же образом убедиться в выполнении всех условий прочности в любых других сечениях приведенной балки.

Факторное пространство, изображенное на рис. 4, пригодно для полной проверки прочности балок данного профиля (№ 30) при любом варианте их нагружения.

Выполнив подобные построения для всех других номеров двутавра, выпускаемых промышленностью, можно создать солидную справочную базу для прочностных расчетов этих балок по упрощенной графической методике, изложенной выше. Такая методика может быть полезна как студентам и преподавателям технических вузов, так и производственным специалистам в области прочностных расчетов.

Таким образом, ходе исследования установлена взаимосвязь мест действия наибольших эквивалентных напряжений с внутренними силовыми факторами в сечении двутавровой балки. Показано, что такие напряжения могут возникать на уровне центра тяжести сечения, если отношение величин изгибающего момента и поперечной силы в этом сечении меньше определенной (граничной) величины, зависящей от параметров двутавра и принятой теории прочности, а также на стыке ребра с полкой, если указанное отношение превышает граничное; при равенстве этого отношения и его граничной величины наибольшие эквивалентные напряжения возникают сразу на обоих названных уровнях.

Доказано, что в случае максимума эквивалентных напряжений на уровне центра тяжести сечения условие прочности по этим напряжениям выполняется автоматически, если в сечении выполнено условие прочности по касательным напряжениям.

Установлено, что выполнимость условия прочности по эквивалентным напряжениям при их максимуме на стыке ребра с полкой зависит от комбинации величин изгибающего момента и поперечной силы в сечении балки. Это условие выполняется, если указанная комбинация в виде соответствующей точки факторного пространства с координатами «изгибающий момент – поперечная сила» не выходит за его границу, очерченную дугой эллипса с полуосями, определяемыми параметрами двутавра, допусковым нормальным напряжением и принятой теорией прочности.

По результатам исследования предложена упрощенная (графическая) методика комплексной оценки прочности двутавровой балки, основанная на использовании построенного факторного пространства с соответствующими ограничениями, вытекающими из условий прочности по нормальным и касательным напряжениям. Она может быть рекомендована к применению как в учебных, так и в практических целях.

Работы по данной тематике целесообразно продолжить в направлении интегрирования предложенной методики в соответствующую компьютерную технологию прочностных расчетов.

### Список литературы

1. Сопротивление материалов: учебн. для техн. вузов / Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.
2. Дарков А.В., Шниро Г.С. Сопротивление материалов: учебник для техн. вузов. – М.: Высшая школа, 1989. – 624 с.
3. Цурпал И.А. Краткий курс сопротивления материалов: учеб. пособие. – Киев: Вища шк., 1989. – 311 с.
4. Матвиенко Ю.Г., Сапунов В.Т. Сопротивление материалов в задачах и решениях: учеб. пособие. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 88 с.
5. Холодняк Ю.С., Подлесный С.В., Роменский Е.Ю. Прочностные расчеты в машиностроении и необходимость учета в них эквивалентных напряжений // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії. – 2006. – № 1Е (6). – С. 74–80.
6. Особенности прочностного расчета балок и их учет в изложении технических дисциплин / Ю.С. Холодняк [и др.] // Качество образования – управление, сертификация, признание: сб. науч. работ междунар. науч. метод. конференции / под общ. ред. С.В. Ковалевского; ДГМА. – Краматорск, 2011. – С. 463–469.
7. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів» (для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання) / Л.В. Кутовой, В.А. Овчаренко, Ю.С. Холодняк [та ін.]; ДДМА. – Краматорск, 2007. – 220 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – Т. 1. – 624 с.

Получено 1.11.2012

**Холодняк Юрий Сергеевич** – кандидат технических наук, доцент, Донбасская государственная машиностроительная академия (84313, Украина, Донецкая область, г. Краматорск, ул. Шкадинова, 72, e-mail: texmex@dgma.donetsk.ua).

**Периг Александр Викторович** – кандидат технических наук, старший преподаватель, Донбасская государственная машиностроительная академия (84313, Украина, Донецкая область, г. Краматорск, ул. Шкадинова, 72, e-mail: alexander.perig@dgma.donetsk.ua, olexander.perig@gmail.com).

**Матвеев Иван Анатольевич** – студент, Донбасская государственная машиностроительная академия (84313, Украина, Донецкая область, г. Краматорск, ул. Шкадинова, 72, e-mail: matveev.ivan.dgma@gmail.com).

**Holodnyak Yuri Sergeevich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Donbass State Engineering Academy (84313, Ukraine, Kramatorsk, Shkadinova st., 72, e-mail: texmex@dgma.donetsk.ua).

**Perig Aleksandr Viktorovich** – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer, Donbass State Engineering Academy (84313, Ukraine, Kramatorsk, Shkadinova st., 72, e-mail: alexander.perig@dgma.donetsk.ua, olexander.perig@gmail.com).

**Matveev Ivan Anatolyevich** – Student, Donbass State Engineering Academy (84313, Ukraine, Kramatorsk, Shkadinova st., 72, e-mail: matveev.ivan.dgma@gmail.com).