

А.А. Заборских, В.М. Тверье

A.A. Zaborskikh, V.M. Tverier

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Perm National Research Polytechnic University

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ГУБЧАТОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE INTENAL STRUCTURE OF CANCELLOUS BONE

Одной из основных задач современной биомеханики зубочелюстной системы является учет структурных особенностей для различных ее отделов. Неоднородность пористой структуры может быть описана методами количественной стереологии; при этом структурные особенности костной ткани описываются посредством тензора структуры \mathbf{H} (*fabric tensor*). В работе рассмотрена измерительная процедура, позволяющая проводить стереологические исследования. Исследованы свойства тензора структуры посредством его построения для образца губчатой кости, высеченного из головки бедренной кости человека.

Ключевые слова: биомеханическое моделирование, закон Вольфа, структура костных тканей, трабекулярная (губчатая) костная ткань, тензор структуры, эллипс структуры.

Consideration of structural features of the dentofacial system units is one of the main problems of contemporary dental biomechanics. Heterogeneity of spongy structure can be described by methods of quantitative stereology. At the same time, structural bone tissue features are described by means of the fabric tensor \mathbf{H} . The measuring procedure for stereological investigations is analyzed. Properties of fabric tensor by constructing it for a sample of cancellous bone, carved out of the femoral head of human was investigated.

Keywords: biomechanical modelling, Wolff's law, bone tissue structure, cancellous bone tissue, fabric tensor, ellipse structure.

Каждая из более чем 200 костей скелета является живым, активно функционирующим и непрерывно обновляющимся органом. Особенности внутреннего строения кости как у млекопитающих, так и у человека обусловлены ее компактным и губчатым веществом.

Компактное вещество (*substantia compacta*) плотным слоем располагается на периферии кости. Основу его составляют костные пластинки. Губчатое вещество (*substantia spongiosa*) расположено под компактным, имеет пористую структуру, образовано отдельными костными перекладинами, или трабекулами, основу микроскопического строения которых также составляют ко-

стные пластинки [1]. Направление их хода строго соответствует ориентации и выраженности действующих на кость сил.

Механические свойства костей подчиняются тем же принципам, что и несущие конструкции, сделанные людьми. Однако способность позвоночных приспосабливать структуру своей костной ткани к приложенной нагрузке, с точки зрения и эволюции генетического плана для скелета, и способности резко изменять этот план клеточной деятельностью, приводит к такой структуре, которая является очень сложной и, будучи здоровой, исключительно эффективной [2].

Среди законов, описывающих поведение костной ткани под влиянием каких-либо факторов, например нагрузок, закон Вольфа является наиболее известным, хотя его точная математическая запись до сих пор четко и однозначно не разработана. Этот закон отмечает изменение кости (или мягких тканей) вследствие функциональных требований. Каждое изменение в форме или функции сопровождается определенными изменениями во внутренней архитектуре и во внешней форме. Закон Вольфа применительно к живой костной ткани звучит следующим образом: кость приспосабливает свою внешнюю форму и внутреннюю структуру к тем механическим силам, которые она должна выдержать [2].

Поведение костной ткани под влиянием нагрузок необходимо описать количественно. Это возможно осуществить методами количественной стереологии. Методы стереологии необходимы при измерении величин, относящихся к структуре и составу кости [3–9].

В настоящее время общепризнано, что наиболее удачным способом описания локальной структуры губчатой кости, в том числе степени ее анизотропии, является симметричный, положительно определенный тензор второго ранга, названный тензором структуры \mathbf{H} [10–12]. Тензор структуры позволяет компактно в тензорной форме описать анизотропию костной структуры.

В данной статье рассмотрены методика и особенности построения тензора структуры с помощью программы Image Tool и рассмотрены примеры построения тензора структуры для поперечного среза шейки бедренной кости человека.

Материалы и методы. Существенной особенностью тензора структуры является его всеобщность: посредством данного тензора можно описать структурные особенности любой губчатой кости человека. Описание костной структуры в терминах тензора структуры (или связанных с ним величин) осуществлялось для различных костей человека.

Для построения \mathbf{H} необходимо определить вспомогательную стереометрическую величину L . В стереологии среднее расстояние между порами L позволяет описать степень анизотропии материала. Согласно классическому определению E. Underwood [6], среднее расстояние между порами – это сред-

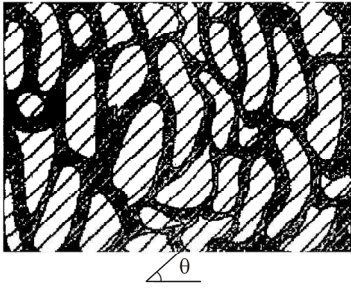


Рис. 1. Измерение среднего расстояния между порами в пористом материале [13]

нее расстояние между двумя границами кость – пора, измеряемая вдоль определенного направления. Для определения L в данном направлении θ на образец (или его изображение) накладывается сетка, состоящая из параллельных тестовых линий; измерения повторяются в различных направлениях θ (рис. 1).

Для построения L необходимо осуществить определение ряда стереометрических величин. В первую очередь определяется относительная площадь кости на поверхности шлифа, обозначаемая как A_{Ab} . Другая измеряемая величина – это число пересечений между линиями специальной тестовой сетки и границами кость – пора, обозначаемое как $I(\theta)$.

На практике среднее расстояние между порами принято вычислять по формуле

$$L_b(\theta) = 2 \frac{\sum l}{I(\theta)} A_{Ab},$$

где $\sum l$ – суммарная длина тестовых линий; $I(\theta)$ – число пересечений между линиями сетки и границами кость – пора; A_{Ab} – относительная площадь кости.

В результате серии измерений в различных направлениях будет получено синусоидальное распределение $L_b(\theta)$, что эквивалентно эллиптической кривой распределения в полярной системе координат.

Таким образом, среднее расстояние между порами как функция направления $L_b(\theta)$ может быть аппроксимировано уравнением эллипса

$$\left(\frac{1}{L_b(\theta)} \right)^2 = \frac{m_{\alpha\alpha} + m_{\beta\beta}}{2} + \frac{m_{\alpha\alpha} - m_{\beta\beta}}{2} \cos 2\theta + m_{\alpha\beta} \sin 2\theta, \quad (1)$$

где индексы α и β (не суммировать!) обозначают соответственно оси e_α и e_β в системе координат, введенной на плоскости костного шлифа, в которой проводятся измерения. В результате измерений получается эллипс, соответствующий формуле (1).

Наттиган и Манн в работе 1984 г. [14], основываясь на экспериментально полученных данных, показали, что в трехмерном случае (во всех трехмерных губчатых структурах) среднее расстояние между порами L_b следует представлять в виде эллипсоида:

$$\left(\frac{1}{L_b(\theta)} \right)^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении тестовой линии – на шлифе костного образца определяется как

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{e}_\alpha + \sin \theta \mathbf{e}_\beta,$$

поэтому оно эквивалентно симметричному, положительно определенному тензору второго ранга: тензору анизотропии. Тогда согласно теореме об обратном тензорном признаке $m_{\alpha\alpha}$, $m_{\beta\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора анизотропии \mathbf{M} , который в матричном представлении имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}.$$

Работы Whitehouse (1974) [15], Harrigan и Mann (1984) [16], Turner (1987) [17] и многие другие показали, что тензор анизотропии \mathbf{M} является хорошей мерой для описания структурной анизотропии пористых материалов, в частности губчатой костной ткани [18].

Тензор анизотропии \mathbf{M} может быть построен с помощью методики, описанной в работе [12] для кубического костного образца. При исследовании трехмерного образца костной ткани необходимо провести исследование трех взаимно ортогональных плоскостей (построить эллипс структуры путем измерения различных по направлению $L_b(\theta)$ на исследуемых шлифах) и найти для каждой проекции соответствующие компоненты тензора анизотропии.

В 1986 г. Cowin предложил называть тензор, алгебраически связанный с тензором анизотропии, тензором структуры. Тензор структуры принято обозначать как \mathbf{H} , он связан с тензором анизотропии \mathbf{M} следующим образом:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

При этом главные оси тензоров \mathbf{H} и \mathbf{M} совпадают, однако форма эллипсоидов, геометрически отображающих эти два тензора, несколько отлична друг от друга.

Полученные результаты также позволяют определить степень анизотропии R эллипса структуры. Если ввести обозначения

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_{\alpha\alpha} + m_{\beta\beta}}{2}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_{\alpha\alpha} - m_{\beta\beta}}{2}, \quad \gamma \stackrel{\text{def}}{=} m_{\alpha\beta},$$

то степень анизотропии эллипса структуры вычисляется как

$$R = \left(\frac{\alpha + c}{\alpha - c} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим теоретически, каким образом может быть определен тензор анизотропии для плоского случая, а именно

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{\alpha\alpha} & m_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} & m_{\beta\beta} \end{pmatrix}.$$

Для определения трех компонент тензора \mathbf{M} необходимо провести три измерения $L_b(\theta)$ для трех различных (желательно равноотстоящих друг от друга) направлений θ , а затем решить систему уравнений (1) относительно $m_{\alpha\alpha}$, $m_{\beta\beta}$ и $m_{\alpha\beta}$ [19].

Обозначим левую часть уравнения (1) как некоторую функцию $f(\theta)$, зависящую от измеряемых стереологических параметров, а именно

$$f(\theta) = \left(\frac{1}{L_b(\theta)} \right)^2.$$

В этом случае возможно получить зависимость компонент тензора \mathbf{M} от этой функции в общем виде. Для простоты изложения произведем следующие обозначения:

$$f_l \stackrel{\text{def}}{=} f(\theta_l), \quad \psi_l \stackrel{\text{def}}{=} 2\theta_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

где f_l – значения введенной стереометрической функции для соответствующих направлений θ_l .

Тогда компоненты тензора анизотропии $m_{\alpha\alpha}$, $m_{\beta\beta}$ и $m_{\alpha\beta}$ могут быть определены по следующим общим формулам:

$$m_{\alpha\alpha} = \frac{f_2(1 - \cos \psi_1) - f_1(1 - \cos \psi_2)}{\cos \psi_2 - \cos \psi_1} + \kappa \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) (1 - \cos \psi_1) - \sin \psi_1 \right), \quad (2)$$

$$m_{\beta\beta} = \frac{f_1(1 + \cos \psi_2) - f_2(1 + \cos \psi_1)}{\cos \psi_2 - \cos \psi_1} - \kappa \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) (1 + \cos \psi_1) + \sin \psi_1 \right), \quad (3)$$

$$m_{\alpha\beta} = \kappa. \quad (4)$$

Функция κ , введенная для простоты изложения, может быть записана как

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_3 - k \cdot f_2 + f_1(k-1)}{\sin \psi_3 - k \cdot \sin \psi_2 + \sin \psi_1(k-1)},$$

где k – коэффициент, зависящий от выбранных направлений при стереологических измерениях:

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos \psi_3 - \cos \psi_1}{\cos \psi_2 - \cos \psi_1}.$$

При этом должно выполняться условие

$$\frac{\sin(\psi_1 - \psi_2) + \sin(\psi_2 - \psi_3) + \sin(\psi_3 - \psi_1)}{2f_1 f_2 f_3} \neq 0.$$

На практике наиболее распространенным случаем являются стереологические измерения для следующих направлений: $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$ и $\theta_3 = 240^\circ$. Тогда, с учетом уравнений (2)–(4) компоненты тензора анизотропии могут быть записаны следующим образом:

$$m_{\alpha\alpha} = f_1,$$

$$m_{\beta\beta} = \frac{1}{3}(2 \cdot (f_2 + f_3) - f_1),$$

$$m_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{3}}{3}(f_3 - f_2),$$

где $k = 1$. При этом необходимое условие положительной определенности тензора \mathbf{M} может быть записано как

$$f_1 > 0, \\ 2(f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_1 f_3) > (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2).$$

Тензор структуры описывает точечную анизотропию структуры (точнее, анизотропию некоего выделенного, конечного представительного объема), и поэтому его необходимо рассматривать как непрерывную функцию распределения материала [20]. С учетом методики определения тензора структуры можно сказать, что в общем случае тензор \mathbf{H} (как и тензор анизотропии \mathbf{M}) зависит от размера, числа и расположения структурных элементов (пор, например) в исследуемом образце, т.е. является функцией вида

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(d, N, \omega),$$

где d , N и ω – величины, характеризующие размер микроструктурных элементов, их число и расположение на костном шлифе соответственно.

Более точно проследить такого рода зависимость для реальных костных образцов чрезвычайно сложно, однако возможно для некоторых идеализированных тестовых микроструктур.

Пример построения тензора структуры для трабекулярной костной ткани. Было проведено исследование фотографии шлифа губчатой кости, высеченного из головки бедренной кости человека [21] (рис. 2).

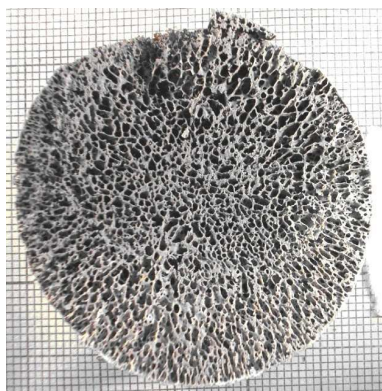


Рис. 2. Поперечный срез шейки бедренной кости [22]

Для выявления структуры костной ткани образцы подвергались прокаливанию в муфельной печи при температуре 600 °С в течение 4 ч. Обработка изображения и последующие необходимые стереометрические измерения проводились в программе для обработки и анализа изображений Image Tool. Для образца был построен тензор структуры и его геометрический образ (рис. 3).

Полученные данные позволяют утверждать, что данный образец практически изотропен.

Далее микрофотография была разбита на пять равных частей (рис. 4), и исследования были проведены для каждой из них (рис. 5).

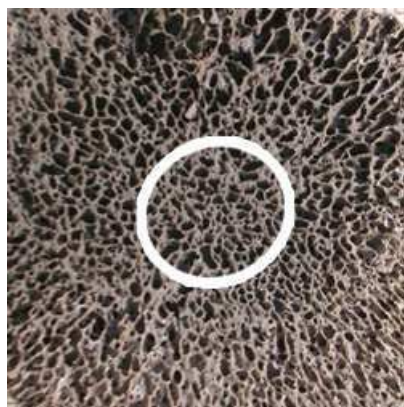


Рис. 3. Образец губчатой ткани шейки бедренной кости человека с наложенным эллипсом структуры

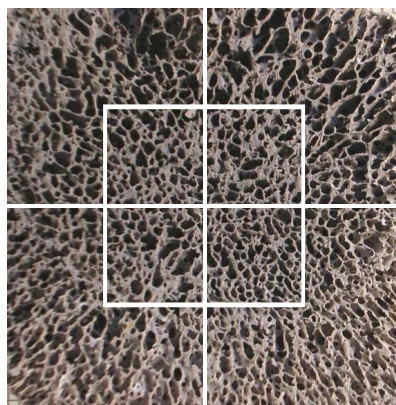
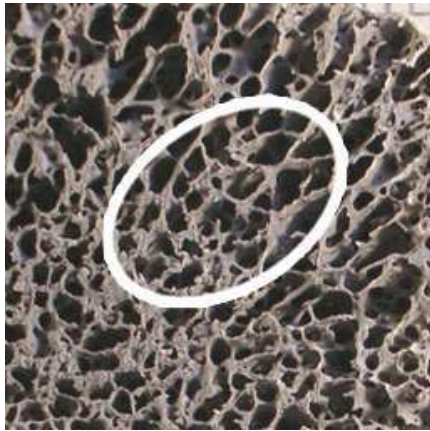
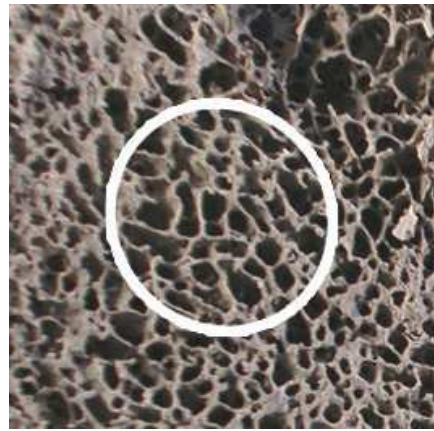


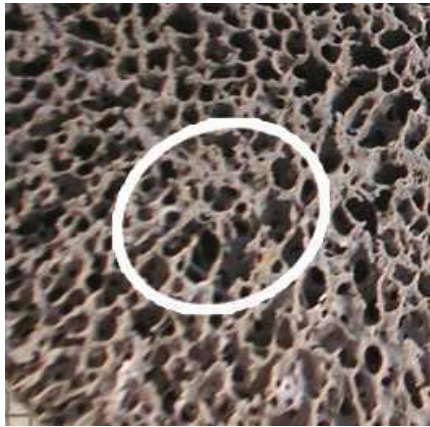
Рис. 4. Разбиение фотографии на пять частей



a



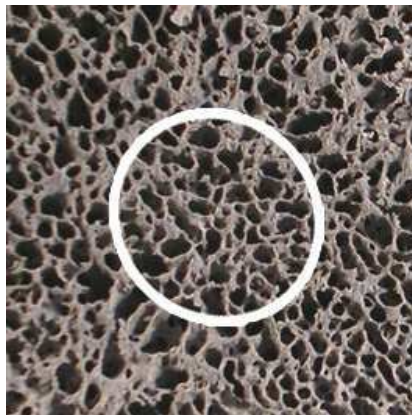
б



в



г



д

Рис. 5. Пять равных частей микрофотографии образца губчатой ткани шейки бедренной кости человека с наложенными эллипсами структуры: *a* – верхняя правая; *б* – верхняя левая; *в* – нижняя левая; *г* – нижняя правая; *д* – центральная

После разбиения микрофотографии на пять равных частей получили, что образец также практически изотропен, что соответствует литературным данным.

Таким образом, было показано, что особенности микроструктуры могут быть описаны методами количественной стереологии. Микроструктурные особенности костной ткани описывались посредством тензора второго ранга – тензора структуры. Таким образом, тензор структуры отражает закономерности формирования костной ткани различных отделов скелета человека. Это в полной мере относится к формированию и функционированию зубочелюстной системы человека. Биомеханическое давление наряду с другими факторами в значительной степени определяет отдаленные последствия своего изменения, что можно проследить при моделировании эволюции во времени тензора структуры [23–25].

Список литературы

1. Анатомический атлас человеческого тела: Т. 1 / под ред. Ф. Кишша. – Будапешт: Изд-во Академии наук Венгрии, 1973. – 315 с.
2. Martin R.B., Burr D.B., Sharkey N.A. Skeletal tissue mechanics. – 2nd edition. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 392 p.
3. Салтыков С.А. Стереологическая металлография. – М.: Металлургия, 1958. – 446 с.
4. Lloyd E., Hodges D. Quantitative characterisation of bone. A computer analysis of microradiographs // J. Clin. Orthop. – 1971. – Vol. 78. – P. 230–250.
5. Underwood E. Quantitative stereology. – Mass.: Addison Wesley, 1970. – 274 p.
6. Whitehouse W.J., Dyson E.D., Jackson K.C. The scanning electron microscope in studies of trabecular bone in a human vertebral body // J. Anat. – 1971. – Vol. 108. – P. 481–496.
7. Whitehouse W.J. The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone // J. Microscopy. – 1974. – Vol. 101. – P. 153–168.
8. Whitehouse W.J. A stereological method for calculating the internal surface areas in structures which have become anisotropic as the result of linear expansions or contractions // J. Microscopy. – 1974. – Vol. 101. – P. 169–176.
9. Whitehouse W.J., Dyson E.D. Scanning electron microscope studies of trabecular bone in the proximal end of the human femur // J. Anat. – 1974. – Vol. 118. – P. 417–444.
10. Cowin S.C. Fabric dependence of an anisotropic strength criterion // J. Mech. Materials. – 1986. – Vol. 5. – P. 251–260.

11. Cowin S.C. Bone Mechanics Handbook. – 2nd edition. – New York: CRC Press, 2001.

12. Билич Г.Л. Сапин М.Р. Анатомия человека: Кн. 1. – М.: Издательский дом «ОНИКС», 1998. – 463 с.

13. Turner C.H., Cowin S.C. On the dependence of elastic constants of an anisotropic porous material upon porosity and fabric // *J. Mater. Sci.* – 1987. – Vol. 22. – P. 3178–3184.

14. Harrigan T.P., Mann R.W. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor // *J. Mater. Sci.* – 1984. – Vol. 19. – P. 761–767.

15. Whitehouse W.J. A stereological method for calculating the internal surface areas in structures which have become anisotropic as the result of linear expansions or contractions // *J. Microscopy.* – 1974. – Vol. 101. – P. 169–176.

16. Cowin S.C., Mehrabadi M.M. Identification of the elastic symmetry of bone and other materials // *J. Biomechanics.* – 1989. – Vol. 22. – P. 503–515.

17. Telega J.J., Jemiolo S. Fabric tensor in bone mechanics // *J. Engineering Transactions.* – 1998. – Vol. 46. – P. 3–26.

18. Fabric and elastic principal directions of cancellous bone are closely related / A. Odgaard, J. Kabel, B. van Rietbergen, M. Dalstra, R. Huiskes // *J. Biomechanics.* – 1997. – Vol. 30. – P. 487–495.

19. Биомеханическое описание структуры костных тканей зубочелюстной системы человека / В.М. Тверье, Е.Ю. Симановская, А.Н. Еловицова, Ю.И. Няшин, А.А. Киченко // *Российский журнал биомеханики.* – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 9–24.

20. Wolff J. Das Gesetz der Transformation der Knochen. – Berlin: Hirshwald, 1892.

21. Акулич А.Ю., Акулич Ю.В., Денисов А.С. Экспериментальное определение разрушающих касательных напряжений трабекулярной костной ткани головки бедра человека // *Российский журнал биомеханики.* – 2010. – Т. 14, № 4. – С. 7–16.

22. Акулич Ю.В., Акулич А.Ю., Денисов А.С. Определение параметров структуры губчатой кости проксимального отдела бедра человека по оптической плотности рентгенологического изображения // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Медицинские науки.* – 2007. – № 1. – С. 3–11.

23. Биомеханическое описание особенностей функций жевательного аппарата у человека в норме и при различных патологических процессах / Е.Ю. Симановская, А.Н. Еловицова, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин // *Российский журнал биомеханики.* – 2004. – Т. 8, № 4. – С. 15–26.

24. Тверье В.М., Симановская Е.Ю., Няшин Ю.И. Атрофический синдром, связанный с изменениями биомеханического давления в зубочелюстной системе человека // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 1. – С. 9–13.

25. Тверье В.М., Симановская Е.Ю., Няшин Ю.И. Биомеханическое давление, сопутствующее формированию зубоальвеолярного блока у человека // Российский журнал биомеханики. – 2005. – Т. 9, № 3. – С. 9–15.

Получено 18.10.2012

Заборских Анна Александровна – магистрант, ПНИПУ, ФПММ, БММ-11, e-mail: kichenko.alex@yandex.ru.

Тверье Виктор Моисеевич – кандидат технических наук, доцент, ПНИПУ, ФПММ, e-mail: tverier_55@perm.ru.