

А.А. Суходоева, К.А. Тихомирова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УСТОЙЧИВОСТИ

Решается нелинейная задача определения формы изогнутой оси стержня после потери устойчивости в упругой зоне с помощью уравнений эластики Эйлера. Вычисляется критическая сила, а также поле продольных и поперечных перемещений. Для стержней, потеря устойчивости которых происходит в пластической области, определение критической силы и перемещений осуществляется по касательному модулю упругости методом Энгессера – Шенли. При этом предполагается, что материал следует диаграмме сжатия с линейным упрочнением. Данная методика позволит перейти от расчета отдельного стержня к расчету на устойчивость пространственных стержневых систем.

Ключевые слова: устойчивость, критическая сила, нелинейные дифференциальные уравнения, прогибы, касательный модуль упругости.

A.A. Sukhodoeva, K.A. Tikhomirova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

STUDY THE BEHAVIOR OF A COMPRESSED ROD OUTSIDE THE STABILITY

The problem of determining the shape of the curved axis of the rod after buckling in the elastic zone with the help of the Euler equations of elastic is solved. Critical force is calculated, as well as field of linear and transverse displacements. For rods, the loss of stability which occurs in the plastic region, the definition of critical load and displacement is carried out on a tangent modulus of elasticity by Engesser-Shanley. It is thus supposed that the material follows the compression diagram with line hardening. This technique will allow passing from calculation of a separate rod to calculation on stability of three dimensional rod systems.

Keywords: stability, the critical force, the nonlinear differential equations, the deflections, a tangent modulus of elasticity.

Введение

Стержневые конструкции имеют широкое применение в строительстве. Их основным достоинством является высокая грузоподъемность при сравнительно небольшом конструктивном весе.

Среди несущих стержневых конструкций можно выделить два основных типа: фермы и структурные перекрестно-стержневые покрытия. В этих конструкциях стержни шарнирно соединены в узлах и воспринимают только сжимающую нагрузку. Поскольку жесткость стержня на сжатие намного выше, чем на изгиб, то для обеспечения работоспособности конструкции важно, чтобы стержни сохраняли прямолинейную форму равновесия. Как только стержень теряет устойчивость, его жесткость, а следовательно, и несущая способность резко уменьшаются, что отражается на работе всей конструкции. Поэтому при проектировании конструкций, состоящих из центрально сжатых стержней, важное место занимает проверка их на устойчивость. Задаче определения критической силы посвящено значительное число работ: для отдельного стержня – [1–3], стержневых систем – [4].

Как известно [5], исследование устойчивости зависит от гибкости стержня. Для длинных и тонких стержней, гибкость которых велика, критическая сила определяется по формуле Эйлера, которая применима только тогда, когда материал подчиняется закону Гука. В данной работе для определения формы изогнутой оси стержня и перемещений после потери устойчивости в упругой зоне используются уравнения элаستيци Эйлера.

Для стержней, потеря устойчивости которых происходит в пластической области, определение критической силы и перемещений осуществляется по касательному модулю упругости методом Энгессера – Шенли.

1. Постановка задачи потери устойчивости с помощью уравнений элаستيци Эйлера

В работе рассматриваются стальные стержни разной гибкости трубчатого сечения, шарнирно закрепленные по концам, расчетная схема представлена на рис. 1. Стержень сжимается вдоль оси силой P , по величине больше критической силы Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

где E – модуль упругости, МПа; $E = 2,058 \cdot 10^5$; δ – толщина стенки сечения; I – момент инерции тонкостенной трубки, определяемый по формуле

$$I = \frac{\pi d_{\text{ср}}^3 \delta}{8},$$

где $d_{\text{ср}}$ – средний диаметр, $d_{\text{ср}} = (d_{\text{н}} + d_{\text{вн}})/2$.

Размеры таких стержней представлены в табл. 1.

Таблица 1

Размеры стержней

Стержни	Внутренний радиус $r_{\text{вн}}$, м	Наружный радиус $r_{\text{н}}$, м	Длина l , м	Гибкость λ
1	0,01775	0,021	1,95	141
2	0,0263	0,03	3,28	164

Решается задача определения максимальной нагрузки, которую может выдержать стержень после потери устойчивости не разрушаясь, а также перемещений характерных точек: по оси x – конец стержня, по оси y – сечение в середине длины. При нагрузке, превышающей критическую, стержень искривляется, появляются изгибные напряжения. Опасным является сечение в середине стержня, так как там прогиб, а следовательно, и изгибные напряжения, максимальны.

В качестве предельного было взято напряжение $[\sigma] = 210$ МПа.

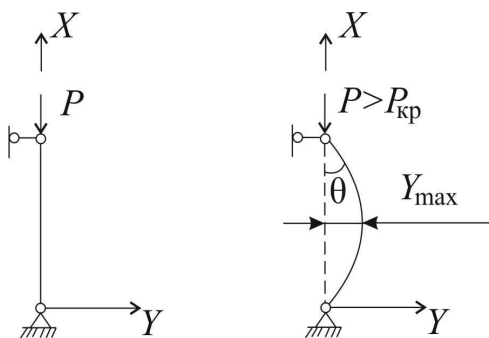


Рис. 1. Расчетная схема

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = -k^2 y, \quad (1)$$

где s – дуговая координата; Θ – угол между касательной к изогнутой оси стержня и осью x (см. рис. 1); $k^2 = \frac{P}{EI}$.

После дифференцирования по s и подстановки выражения

$$\frac{dy}{ds} = \sin \Theta$$

получим

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial s^2} = -k^2 \sin \Theta. \quad (2)$$

Проинтегрируем это уравнение с учетом граничных условий при $s = 0$:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = 0, \quad \Theta = \Theta_0,$$

где Θ_0 – угол наклона касательной к оси стержня в точке с координатой $s = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial s} \right)^2 &= 2k^2 (\cos \Theta - \cos \Theta_0), \\ \left(\frac{\partial \Theta}{\partial s} \right)^2 &= 4k^2 \left(\sin^2 \frac{\Theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Сделаем замену переменных с учетом того, что $\Theta \leq \Theta_0$. Приняв $\sin \frac{\Theta}{2} = \sin \frac{\Theta_0}{2} \sin \varphi$, после дифференцирования получим

$$\cos \frac{\Theta}{2} d \frac{\Theta}{2} = \sin \frac{\Theta_0}{2} \cos \varphi d \varphi.$$

После подстановки данной замены в (3) получим, разделяя переменные,

$$ds = \frac{1}{k} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} \sin^2 \varphi}}. \quad (4)$$

Положим $\sin(\Theta_0/2) = m$ и учтем граничные условия при $s=0$: $\Theta = \Theta_0$ и $\varphi = \pi/2$.

$$s = -\frac{1}{k} \int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (5)$$

Это выражение можно записать в виде

$$ks = -F(\varphi) + F, \quad (6)$$

где $F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}}$, $F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}}$ – эллиптические интегралы.

Получим выражения для координат точек изогнутой оси стержня:

$$dy = \sin \Theta ds = -\frac{2m}{k} \sin \varphi d\varphi, \quad (7)$$

$$dx = \cos \Theta ds = -\frac{1}{k} \left[2\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}} \right] d\varphi. \quad (8)$$

Интегрируя с учетом граничных условий $x = y = 0$ при $\varphi = \pi/2$, получим параметрические уравнения изогнутой оси:

$$y = \frac{2m}{k} \cos \varphi, \quad (9)$$

$$x = \frac{1}{k} [2(E - E(\varphi)) - (F - F(\varphi))], \quad (10)$$

где $E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ – эллиптический интеграл второго рода;

$E(\pi/2)=E$.

Условие прочности при изгибе имеет вид

$$M_{\max} = P \cdot y_{\max} \leq \frac{I}{r_{\max}} \cdot [\sigma].$$

Из выражения (9) получаем

$$y_{\max} = \frac{2m}{k}.$$

При $s = l/2$ в силу симметрии $\Theta = 0$ и $\varphi = 0$. Поэтому выражение (6) примет вид

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

В результате получили зависимость силы P и величины m , что позволяет определить величину прогиба для каждого значения силы P .

В табл. 2 приведены значения критической силы $P_{кр}$ для стержней, разница между предельной и критической нагрузкой ΔP , вертикальное перемещение конца стержня и максимальный прогиб при $s = l/2$.

Таблица 2

Результаты расчетов

Стержни	$P_{кр}$, кН	ΔP , Н	Y_{max} , мм	X_{max} , мм
1	38,55	4,7	19,4	0,5
2	47,57	5	38,2	1,1

Как видно из табл. 2, после потери стержнем устойчивости дальнейшее возрастание нагрузки быстро приводит к его разрушению.

На рис. 2, 3 показаны продольные и поперечные перемещения стержней 1 и 2 соответственно.

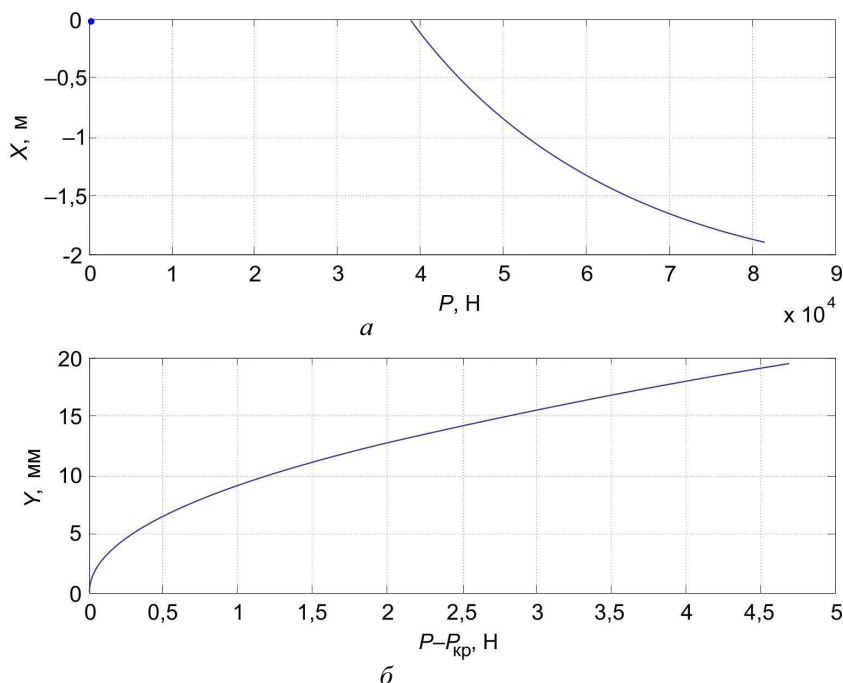


Рис. 2. Зависимость величины продольного перемещения конца стержня $s = 0$ (а) и прогиба в сечении $s = l/2$ (б) от нагрузки в первом стержне

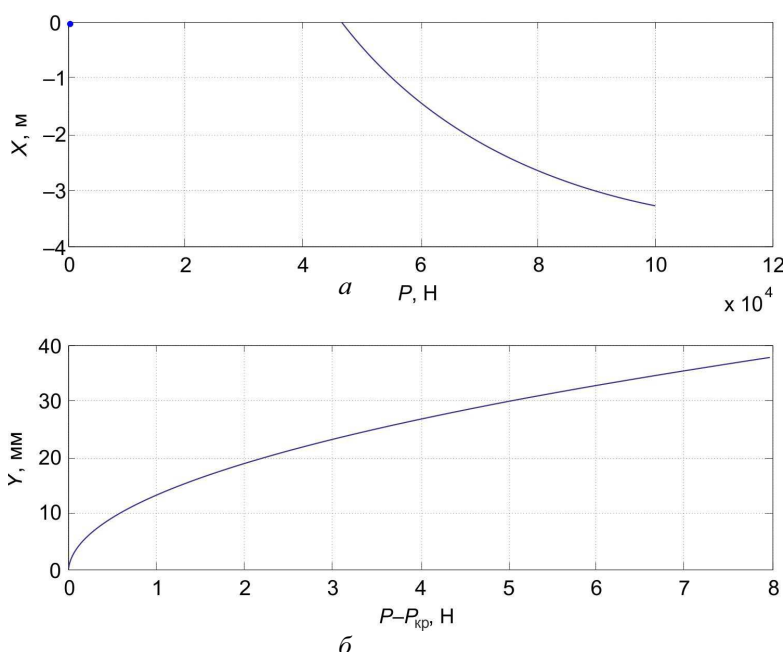


Рис. 3. Зависимость величины продольного перемещения конца стержня $s = 0$ (а) и прогиба в сечении $s = l/2$ (б) от нагрузки во втором стержне

На рис. 2, а и 3, а показана зависимость перемещения конца стержня от приложенной силы после потери устойчивости, она перестает быть линейной. Однако скорость роста продольного перемещения гораздо ниже, чем величины прогиба середины стержня, и в момент потери прочности оно составляет порядка 2 % от поперечного прогиба.

Из рис. 2, б и 3, б видно, что быстро возрастающий прогиб определяет возрастание изгибающего момента и максимальных напряжений. Так как разница между максимальной нагрузкой и критической силой невелика (менее 1 %), то подобные системы имеет смысл рассчитывать только на устойчивость.

2. Задача потери устойчивости стержня за пределами упругости методом Энгессера – Шенли

Для стержней, гибкость которых мала ($\lambda < 100$), потеря устойчивости происходит при напряжениях, превосходящих предел пропорциональности, т.е. в пластической области. В работе были рассмотрены два таких стержня, размеры которых приведены в табл. 3.

Таблица 3

Размеры стержней

Стержни	Внутренний радиус $r_{\text{вн}}, \text{ м}$	Наружный радиус $r_{\text{н}}, \text{ м}$	Длина $l, \text{ м}$	Гибкость, λ
3	0,0757	0,083	3,0	53
4	0,0961	0,1045	3,28	46

Проследим поведение стержня при возрастании сжимающей силы. Предположим, что достигнув критического значения P_0 (по формуле Энгессера – Шенли сила $P_0 = \frac{\pi^2 E_m I}{l^2}$), при некоторых малых возмущениях стержень изогнулся. Введем в рассмотрение изменение напряжения:

$$\Delta\sigma = E_m \Delta\varepsilon, \quad (11)$$

где E_m – касательный модуль, $E_m = d\sigma/d\varepsilon$.

Поскольку сжимающая сила при потере устойчивости остается неизменной по предположению, то в одной части сечения будет $\Delta\sigma > 0$, в этом случае двигаемся по диаграмме вверх (рис. 4); в другой, где $\Delta\sigma < 0$ происходит разгрузка, и зависимость между приращением напряжения и деформации изображается прямой, параллельной начальному, упругому участку диаграммы:

$$\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon. \quad (12)$$

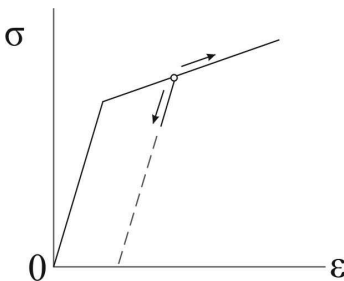


Рис. 4. Диаграмма сжатия

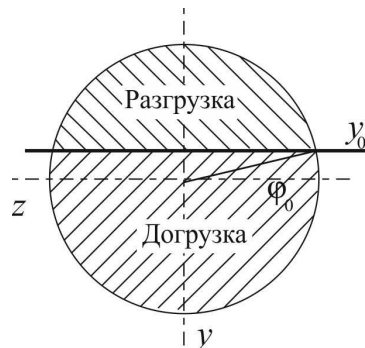


Рис. 5. Положение нейтральной оси

Сжимающая сила при потере устойчивости остается постоянной, поэтому

$$\int_F \Delta \sigma dF = 0.$$

Ось y_0 делит сечение на две части, в одной справедливо соотношение (11), в другой – соотношение (12), причем положение этой нейтральной оси заранее неизвестно (рис. 5).

Будем считать материал следующим диаграмме сжатия с линейным упрочнением, т.е. касательный модуль постоянный $E_m = 0,5 \cdot 10^5$ МПа [6]. Обозначим $\Delta \varepsilon$ – изменение оси стержня при изменении силы от P_0 до P , χ – соответствующую кривизну изогнутой оси. Деформацию волокна с координатой y обозначим

$$\Delta \varepsilon' = \Delta \varepsilon + \chi y.$$

На нейтральной оси она равна нулю, следовательно,

$$y_0 = -\Delta \varepsilon / \chi.$$

Таким образом уравнения (11) и (12) примут вид:

$$\Delta \sigma = E_m (\Delta \varepsilon + \chi y), \quad y > y_0,$$

$$\Delta \sigma = E (\Delta \varepsilon + \chi y), \quad y < y_0.$$

Вычислим приращение силы $\Delta P = P - P_0$ и изгибающий момент

$$\begin{aligned} \Delta P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} \Delta \sigma r dr = E_m \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} d\varphi \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} (\Delta \varepsilon + \chi y) r dr + \\ + E \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} d\varphi \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} (\Delta \varepsilon + \chi y) r dr, \end{aligned} \quad (13)$$

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} \Delta \sigma y r dr = E_m \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} d\varphi \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} (\Delta \varepsilon + \chi y) y r dr + E \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} d\varphi \int_{r_{\text{вн}}}^{r_{\text{н}}} (\Delta \varepsilon + \chi y) y r dr,$$

где можно выразить $y = r \sin \varphi$.

Определим поперечные перемещения сжатого стержня, если учтем, что момент в сечении с координатой x равен $M = -Py(x)$, а кривизна изогнутой оси

$$\chi = y''(x) = -\frac{1}{P} M''.$$

Окончательно дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{E_m I}{P} m'' + \tilde{\chi}(m) = 0,$$

а с учетом формулы Энгессера – Шенли [7]

$$\frac{l^2}{\pi^2} \frac{P_0}{P} m'' + \tilde{\chi}(m) = 0,$$

где m , $\tilde{\chi}$, – безразмерные величины, полученные из выражений (13),

$$m = \frac{M}{\Delta P \cdot r}; \quad \tilde{\chi} = \frac{E_m \pi d^2 \delta}{\Delta P} \chi.$$

В табл. 4 приведены значения критической силы, вычисленной по касательному модулю для двух стержней, значения вертикального перемещения конца стержня и максимальный прогиб при $s = l/2$. Поскольку критическая сила для стержней малой гибкости существенно больше, чем у гибких стержней, то и перемещения, особенно продольные, также больше, а вот поперечные перемещения отличаются незначительно.

Таблица 4

Результаты расчетов

Стержни	P_0 , МН	$X_{\max}$, мм	$Y_{\max}$, мм
3	0,63	10	39,1
4	1,22	15	40,2

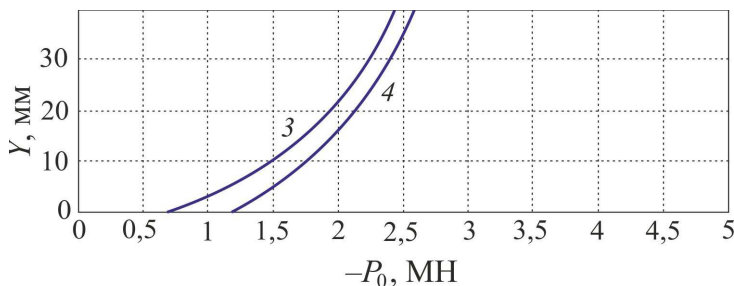


Рис. 6. Зависимость величины поперечного перемещения сечения $s = l/2$ в стержнях 3 и 4

На рис. 6 показано изменение поперечного перемещения от приложенной продольной силы. Видно, что при $P=P_0$ прогиб первоначально прямого стержня равен нулю, а затем резко возрастает. Фактически за момент потери устойчивости принимается момент, когда прогиб достигает некоторой достаточно большой величины, но значения силы при этом настолько большие, что напряжения превосходят предельные значения. Таким образом, негибкие стержни можно рассчитывать только на прочность.

Библиографический список

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
2. Кузнецов В.В., Левяков С.В. О вторичной потере устойчивости Эйлера стержня // Прикладная математика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 6. – С. 184–185.
3. Левяков С.В. Формы равновесия и вторичная потеря устойчивости прямого стержня, нагруженного продольной силой // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 2. – С. 153–159.
4. Бартоломей М.Л., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Численный анализ устойчивости многоэлементной стержневой конструкции при непропорциональном нагружении // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 25–32.
5. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.
6. Третьяков А.В., Зюзин В.И. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. – М.: Металлургия, 1973. – 224 с.
7. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

References

1. Popov E.P. Teorija i raschet gibkih uprugih sterzhnej [Theory and design of flexible elastic rods]. Moscow, Nauka, 1986, 296 p.
2. Kuznecov V.V., Levjakov S.V. O vtorichnoj potere ustojchivosti Ejlerova sterzhnja [On the secondary loss of stability of Euler rod]. *Prikladnaja matematika i tekhnicheskaja fizika*, 1999, vol. 40, no. 6, pp 184–185.
3. Levjakov S.V. Formy ravnovesija i vtorichnaja poterja ustojchivosti prjamogo sterzhnja, nagruzhennogo prodol'noj siloj [Equilibrium forms and secondary loss of stability of a straight rod with longitudinal force loading]. *Prikladnaja matematika i tekhnicheskaja fizika*, 2001, vol. 42, no. 2, pp 153–159.

4. Bartolomej M.L., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Chislennyj analiz ustojchivosti mnogojelementnoj sterzhnevoj konstrukcii pri neproporcional'nom nagruzhenii [Numerical analysis of the stability of the multiple-rod structure with non-proportional loading]. *Vychislitel'naja mehanika sploshnyh sred*, 2012, vol. 5, no. 1, pp 25–32.

5. Pisarenko G.S. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Kiev: Vissha shkola, 1986, 775 p.

6. Tret'jakov A.V., Zjuzin V.I. Mehanicheskie svojstva metallov i splavov pri obrabotke davleniem. Spravochnik. [Mechanical properties of metals and alloys under pressure treatment. Directory]. Moscow: Metallurgija, 1973, 224 p.

7. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruемого твердого тела [Fracture Mechanics]. Moscow: Nauka, 1988, 712 p.

Получено 27.09.2012

Об авторах

Суходоева Алла Алексеевна (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: sukhodoeva@ya.ru).

Тихомирова Ксения Алексеевна (Пермь, Россия) – студентка кафедры динамики и прочности машин Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: vmm@pstu.ru).

About the authors

Sukhodoeva Alla Alekseevna (Perm, Russia) – Ph.D. of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: sukhodoeva @ya.ru).

Tikhomirova Kseniya Alekseevna (Perm, Russia) – student, Department of Dynamic and Strength of Mechanism, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: vmm@pstu.ru).